ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΣΤΗΝ ΥΛΗ

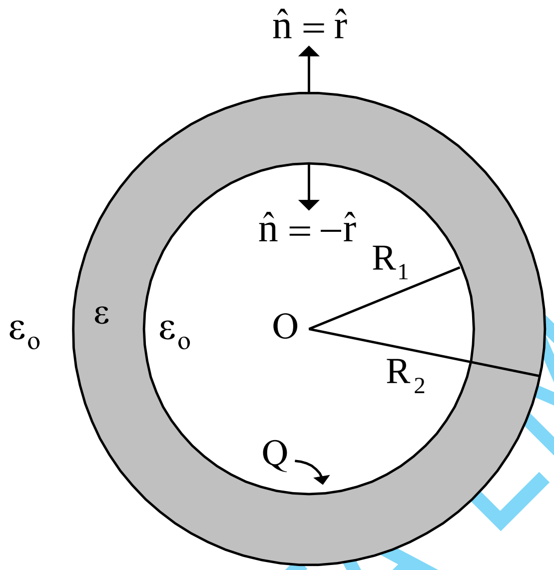
Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 1

Ο χώρος μεταξύ δυο ομόκεντρων σφαιρικών επιφανειών ακτίνων R_1 και R_2 είναι γεμάτος με διηλεκτρικό απόλυτης διηλεκτρικής σταθεράς ε, ενώ η εσωτερική σφαιρική επιφάνεια είναι φορτισμένη με φορτίο Q. Να υπολογιστούν τα μεγέθη $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$ καθώς και οι πυκνότητες των δέσμιων φορτίων σ_p και ρ_p παντού στο χώρο.

Λύση



Το φορτίο Q είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην εσωτερική επιφάνεια ακτίνας R_1 και αποτελεί το ελεύθερο φορτίο του συστήματος. Έτσι λόγω σφαιρικής συμμετρίας οι ιδιότητες συμμετρίας του $\vec{E}$ ισχύουν και για το $\vec{D}$.
Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss για διηλεκτρικό σε σφαιρική επιφάνεια προκύπτει :

Για $r < R_1$ **:** $$\oint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow \vec{D}_1 = 0 \quad (\text{επειδή } q_f = 0)$$

Για $R_1 < r < R_2$ **:** $$\oint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D_2 4\pi r^2 = Q \Rightarrow D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\text{ή} \quad \vec{D}_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Για $r > R_2$ **:** $\oint_{S_3} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D_3 4\pi r^2 = Q \Rightarrow D_3 = \dfrac{Q}{4\pi r^2}$

$$\text{ή} \quad \vec{D}_3 = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου προκύπτει ως :

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} 0, & \text{για} \quad r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{r}, & \text{για} \quad R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\hat{r}, & \text{για} \quad r > R_2 \end{cases}$$

Ενώ το διάνυσμα της πόλωσης $\vec{P}$ προκύπτει ως :

$$\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_o\vec{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \begin{cases} 0, & \text{για} \quad r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\left(1 - \dfrac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\hat{r}, & \text{για} \quad R_1 < r < R_2 \\ 0, & \text{για} \quad r > R_2 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων σ_p δίνεται από τη σχέση :

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

όπου $\hat{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα από το διηλεκτρικό προς το κενό.

Αλλά στην εσωτερική επιφάνεια για $r = R_1$ είναι $\hat{n} = -\hat{r}$, οπότε λόγω και της **(1)** προκύπτει :

$$\sigma_{1p} = -\hat{r}\cdot\frac{Q}{4\pi R_1^2}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\hat{r} \Rightarrow \sigma_{1p} = \frac{Q}{4\pi R_1^2}\left(\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}-1\right)$$

ενώ στην εξωτερική επιφάνεια για $r = R_2$ είναι $\hat{n} = \hat{r}$, οπότε :

$$\sigma_{2p} = \hat{r}\cdot\frac{Q}{4\pi R_2^2}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\hat{r} \Rightarrow \sigma_{2p} = \frac{Q}{4\pi R_2^2}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)$$

Η χωρική πυκνότητα των δέσμιων φορτίων ρ_p δίνεται από τη σχέση :

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά λαμβάνοντας υπόψη ότι $\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \vec{r}/r$ η σχέση **(1)** της πόλωσης $\vec{P}$ ανάγεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες :

$$\vec{P} = \frac{Q}{4\pi r^2}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\hat{r} = \frac{Q}{4\pi r^3}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\vec{r} = \frac{Q}{4\pi}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\frac{(x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Άρα η **(2)** τώρα δίνει :

$$\rho_p = -\frac{Q}{4\pi r}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]\right\} =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\left[\frac{1(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - x\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2x}{(x^2+y^2+z^2)^3}+\right.$$

$$+\frac{1(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-y\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2y}{(x^2+y^2+z^2)^3}+$$

$$\left.+\frac{1(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-z\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}2z}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right]=$$

$$=-\frac{Q}{4\pi}\left(1-\frac{\varepsilon_o}{\varepsilon}\right)\frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\cdot$$

$$\cdot(x^2+y^2+z^2-3x^2+x^2+y^2+z^2-3y^2+x^2+y^2+z^2-3z^2)=0$$

Άρα $\rho_p = 0$, δηλαδή το χωρικό δέσμιο φορτίο είναι μηδενικό.

Θέμα 2

Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από δυο ομόκεντρους αγώγιμους σφαιρικούς οπλισμούς ακτίνων R_1, R_2, που είναι φορτισμένοι με ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$ και ο μεταξύ τους χώρος γεμίζει από δυο διηλεκτρικά ίσων όγκων, απόλυτων διηλεκτρικών σταθερών ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.
Να υπολογιστούν :

α) Η ένταση $\vec{E}$.

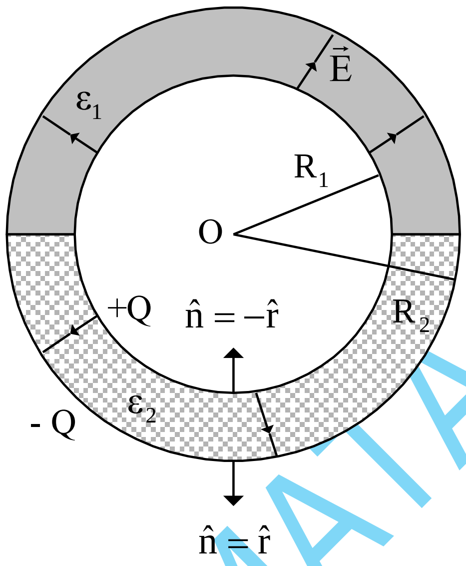
β) Η διηλεκτρική μετατόπιση $\vec{D}$.

γ) Η πόλωση $\vec{P}$.

δ) Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων σ_p.

ε) Η χωρητικότητα C του πυκνωτή αυτού.

Λύση



α) Οι εφαπτομενικές συνιστώσες της έντασης στη διαχωριστική επιφάνεια είναι ίσες, με άμεση συνέπεια η ένταση στα δυο διηλεκτρικά για την ίδια απόσταση r από το κέντρο O να είναι ίδια. Δηλαδή $E_1(r) = E_2(r) = E(r)$. Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss στα διηλεκτρικά σε σφαιρική επιφάνεια S ακτίνας $R_1 < r < R_2$ προκύπτει :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow \oint_{S_1} \vec{D}_1\cdot d\vec{S} + \oint_{S_2} \vec{D}_2\cdot d\vec{S} = Q \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $q_f = Q$ το ελεύθερο φορτίο του οπλισμού που περικλείει η επιφάνεια S και S_1, S_2 η άνω και κάτω ημισφαιρική επιφάνεια αντίστοιχα.
Αλλά είναι :

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_1\vec{E} \quad \text{και} \quad \vec{D}_2 = \varepsilon_2\vec{E} \qquad \textbf{(2)}$$

Συνεπώς η εξίσωση **(1)** δίνει :

$$\varepsilon_1\oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \varepsilon_2\oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q \Rightarrow \varepsilon_1 E 2\pi r^2 + \varepsilon_2 E 2\pi r^2 = Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} \quad \text{ή διανυσματικά} \quad \vec{E} = \frac{Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r} \qquad \textbf{(3)}$$

β) Η διηλεκτρική μετατόπιση $\vec{D}$, λόγω των σχέσεων **(2)** και **(3)** είναι :

$$\vec{D}_1 = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r} \quad \text{για το άνω ημισφαίριο}$$

$$\vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r} \quad \text{για το κάτω ημισφαίριο}$$

γ) Σύμφωνα με την **(4 – 8)** η πόλωση $\vec{P}$ είναι :

$$\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_o\vec{E} \overset{(4-11)}{=} \varepsilon\vec{E} - \varepsilon_o\vec{E} \Rightarrow \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o)\vec{E}$$

Άρα λόγω της **(3)** είναι : $\vec{P}_1 = \dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_o)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r}$ και $\vec{P}_2 = \dfrac{(\varepsilon_2-\varepsilon_o)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r}$

δ) Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$ για $r = R_1$ και $r = R_2$.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα στην εσωτερική επιφάνεια $r = R_1$ είναι $\hat{n} = -\hat{r}$ οπότε :

$$\sigma_{1p} = \vec{P}_1\cdot\hat{n} = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_o)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\hat{r}\cdot(-\hat{r}) \Rightarrow \sigma_{1p} = \frac{(\varepsilon_o-\varepsilon_1)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

για την άνω εσωτερική επιφάνεια

$$\sigma_{2p} = \vec{P}_2\cdot\hat{n} \Rightarrow \sigma_{2p} = \frac{(\varepsilon_o-\varepsilon_2)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$$

για την κάτω εσωτερική επιφάνεια.

Ενώ στην εξωτερική επιφάνεια $r = R_2$ είναι $\hat{n} = \hat{r}$, οπότε :

$$\sigma_{1p} = \vec{P}_1 \cdot \hat{n} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_o)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\hat{r}\cdot\hat{r} \Rightarrow \sigma_{1p} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_o)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

για την άνω εξωτερική επιφάνεια

$$\sigma_{2p} = \vec{P}_2 \cdot \hat{n} \Rightarrow \sigma_{2p} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_o)Q}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

για την κάτω εξωτερική επιφάνεια.

ε) Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι :

$$dV = -Edr \overset{(3)}{\Rightarrow} \int_{V(R_2)}^{V(R_1)} dV = -\frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \Delta V = V(R_1) - V(R_2) =$$

$$= \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \overset{(4)}{\Rightarrow} C = 2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Θέμα 3

Διηλεκτρικό σε σχήμα κυλίνδρου ύψους ℓ και ακτίνας βάσης R, τοποθετείται με τον άξονά του να συμπίπτει με τον άξονα z και τις βάσεις του στις θέσεις $z = 0$ και $z = \ell$. Το διηλεκτρικό αυτό είναι πολωμένο με πόλωση $\vec{P} = (\alpha z^2 + b)\hat{z}$, όπου α,b σταθερές.

Να υπολογιστούν :

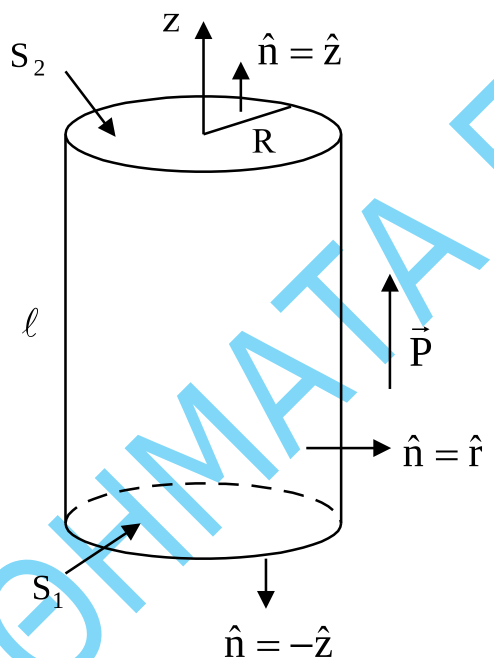
α) Οι επιφανειακές πυκνότητες των δέσμιων φορτίων σ_{1p} και σ_{2p}, που εμφανίζονται στις δυο βάσεις του κυλίνδρου και τα αντίστοιχα φορτία Q_1 και Q_2 των δυο βάσεων.

β) Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων σ_{3p} της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου.

γ) Η χωρική πυκνότητα των δέσμιων φορτίων ρ_p.

δ) Αποδείξτε ότι το συνολικό φορτίο του διηλεκτρικού είναι μηδέν.

Λύση



α) Οι επιφανειακές πυκνότητες των δέσμιων φορτίων στις θέσεις $z = 0$ και $z = \ell$ αντίστοιχα είναι :

$$\sigma_{1p} = \vec{P}(z=0)\cdot\hat{n} = b\hat{z}\cdot(-\hat{z}) \Rightarrow \sigma_{1p} = -b$$

$$\sigma_{2p} = \vec{P}(z=\ell)\cdot\hat{n} = (\alpha\ell^2 + b)\hat{z}\cdot\hat{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_{2p} = \alpha\ell^2 + b$$

Τα αντίστοιχα φορτία των δυο βάσεων είναι :

$$Q_1 = \int_{S_1}\sigma_{1p}dS = -b\int_{S_1}dS \Rightarrow Q_1 = -b\pi R^2$$

$$Q_2 = \int_{S_2}\sigma_{2p}dS = (\alpha\ell^2 + b)\int_{S_2}dS \Rightarrow Q_2 = (\alpha\ell^2 + b)\pi R^2$$

β) Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων της παράπλευρης επιφάνειας είναι :

$$\sigma_{3p} = \vec{P}\cdot\hat{n} = (\alpha z^2 + b)\hat{z}\cdot\hat{r} \Rightarrow \sigma_{3p} = 0 \quad (\text{επειδή } \hat{z}\cdot\hat{r} = 0 \text{ αφού } \hat{z}\perp\hat{r}).$$

γ) Η χωρική πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι :

$$\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}(\alpha z^2 + b) \Rightarrow \rho_p = -2\alpha z$$

δ) Το συνολικό δέσμιο φορτίο του διηλεκτρικού είναι :

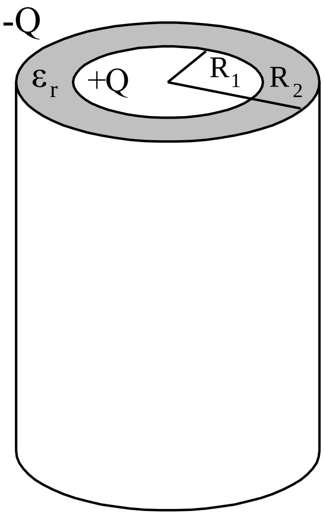
$$Q = \int_V \rho_p dV + \int_{S_1} \sigma_{1p} dS + \int_{S_2} \sigma_{2p} dS = -2\alpha\int_0^{\ell} zSdz - b\int_{S_1} dS + (\alpha\ell^2 + b)\int_{S_2} dS =$$

$$= \frac{-2\alpha S\ell^2}{2} - bS + (\alpha\ell^2 + b)S = 0$$

Θέμα 4

Δυο ομοαξονικές αγώγιμες κυλινδρικές επιφάνειες ακτίνων R_1 και R_2 ($R_1 < R_2$) και απείρου μήκους είναι φορτισμένες με ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$. Ο χώρος μεταξύ των επιφανειών αυτών είναι γεμάτος με διηλεκτρικό υλικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς $\varepsilon_r = \alpha r$, όπου α θετική σταθερά και r η απόσταση από τον άξονα των κυλίνδρων.
Να υπολογιστεί η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του συστήματος του πυκνωτή που σχηματίζουν οι αγώγιμες επιφάνειες.

Λύση



Εφαρμόζοντας το νόμο Gauss στα διηλεκτρικά σε κυλινδρική επιφάνεια S ακτίνας $R_1 < r < R_2$ και μήκους ℓ προκύπτει :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D2\pi r\ell = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{2\pi r\ell}$$

ή $$\vec{D} = \frac{Q}{2\pi r\ell}\hat{r} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $q_f = Q$ το ελεύθερο φορτίο του οπλισμού που περικλείει η επιφάνεια S και ροή του διανύσματος $\vec{D}$ παρατηρείται μόνο στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου.

Άρα : $$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o\varepsilon_r} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o \alpha r} \overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \alpha r^2 \ell}\hat{r}$$

Επομένως η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_{V_2}^{V_1} dV = -\int_{R_2}^{R_1} E dr \Rightarrow \Delta V = V_1 - V_2 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \alpha\ell}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \alpha \ell}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o \alpha \ell}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \qquad \textbf{(2)}$$

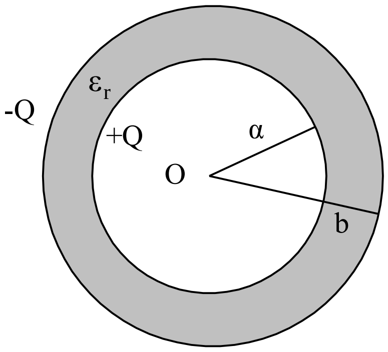
Άρα η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του συστήματος είναι :

$$\frac{C}{\ell} = \frac{Q}{\Delta V \ell} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{C}{\ell} = 2\pi\varepsilon_o \alpha \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Θέμα 5

Ένας σφαιρικός πυκνωτής έχει οπλισμούς ακτίνων α, b που είναι φορτισμένοι με ίσα και αντίθετα φορτία $\pm Q$. Ανάμεσα στους οπλισμούς τοποθετείται διηλεκτρικό υλικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς $\varepsilon_r = b/r$, όπου r η απόσταση από το κέντρο του πυκνωτή. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή.

Λύση



Λόγω σφαιρικής συμμετρίας, εφαρμόζοντας το νόμο Gauss για διηλεκτρικά σε σφαιρική επιφάνεια S ακτίνας $\alpha < r < b$ προκύπτει :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D4\pi r^2 = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\text{ή} \quad \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r} \qquad \textbf{(1)}$$

Επομένως η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο μεταξύ των οπλισμών είναι :

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o \varepsilon_r} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_o \frac{b}{r}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o br}\hat{r} \qquad \textbf{(2)}$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι :

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_{V_2}^{V_1} dV = -\int_b^{\alpha} Edr \overset{(2)}{\Rightarrow} \Delta V = V_1 - V_2 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o b}\int_b^{\alpha}\frac{dr}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o b}\ell n\frac{b}{\alpha} \qquad \textbf{(3)}$$

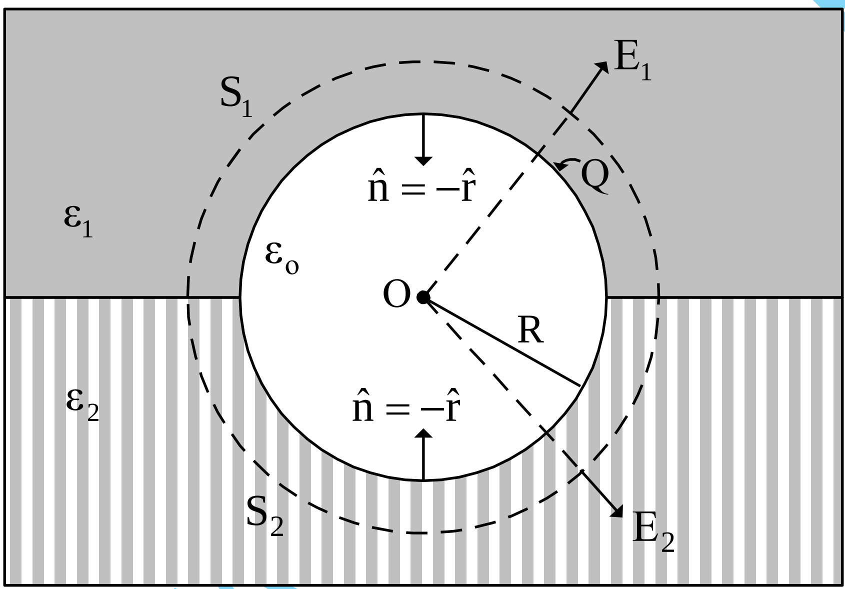
Άρα η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι :

$$C=\frac{Q}{\Delta V}\overset{(3)}{\Rightarrow}C=\frac{4\pi\varepsilon_o b}{\ell n\frac{b}{\alpha}}$$

Θέμα 6

Μια αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R φορτισμένη με φορτίο Q, τοποθετείται κατά τέτοιο τρόπο ώστε το κέντρο της να βρίσκεται πάνω στην επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια δυο διηλεκτρικών υλικών στο χώρο με απόλυτες διηλεκτρικές σταθερές ε_1 και ε_2 αντίστοιχα. Να υπολογιστούν η ένταση $\vec{E}$, το διάνυσμα $\vec{D}$, η πόλωση $\vec{P}$ και οι επιφανειακές πυκνότητες των δέσμιων σ_p και των ελεύθερων φορτίων σ_f.

Λύση



Ηλεκτρικό πεδίο προφανώς υφίσταται μόνο στην περιοχή των διηλεκτρικών. Οι εφαπτομενικές συνιστώσες της έντασης στη διαχωριστική επιφάνεια των δυο διηλεκτρικών είναι ίσες κι επομένως η ένταση στα δυο διηλεκτρικά για την ίδια απόσταση από το κέντρο O είναι ίδια.

Δηλαδή : $E_1(r) = E_2(r) = E(r)$.

Εφαρμόζοντας το νόμο Gauss για διηλεκτρικά στην σφαιρική επιφάνεια ακτίνας r > R προκύπτει :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow \int_{S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = Q \qquad \textbf{(1)}$$

όπου S_1, S_2 η άνω και κάτω ημισφαιρική επιφάνεια αντίστοιχα.

Αλλά: $\vec{D}_1 = \varepsilon_1 \vec{E}$ και $\vec{D}_2 = \varepsilon_2 \vec{E}$ **(2)**

Οπότε η εξίσωση **(1)** δίνει :

$$\varepsilon_1 \int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \varepsilon_2 \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q \Rightarrow \varepsilon_1 E 2\pi r^2 + \varepsilon_2 E 2\pi r^2 = Q \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$$

Άρα οι **(2)** δίνουν : $\vec{D}_1 = \dfrac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$ και $\vec{D}_2 = \dfrac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$

Η πόλωση $\vec{P}$ είναι : $\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_o\vec{E} = \varepsilon\vec{E} - \varepsilon_o\vec{E} \Rightarrow \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o)\vec{E}$

Δηλαδή : $\vec{P}_1 = \dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_o)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$ και $\vec{P}_2 = \dfrac{(\varepsilon_2-\varepsilon_o)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^2}\hat{r}$

Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι : $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$

Ενώ των ελεύθερων φορτίων είναι :

$$\sigma_f = -\vec{D}\cdot\hat{n}$$

Αλλά στην επιφάνεια της αγώγιμης σφαίρα είναι $\hat{n} = -\hat{r}$ οπότε :

$$\sigma_{1p} = \vec{P}_1(R)\cdot(-\hat{r}) = \frac{(\varepsilon_o-\varepsilon_1)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}, \quad \sigma_{1f} = -\vec{D}_1(R)\cdot(-\hat{r}) = \frac{\varepsilon_1 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}$$

$$\sigma_{2p} = \vec{P}_2(R)\cdot(-\hat{r}) = \frac{(\varepsilon_o-\varepsilon_2)Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}, \quad \sigma_{2f} = -\vec{D}_2(R)\cdot(-\hat{r}) = \frac{\varepsilon_2 Q}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)R^2}$$

Θέμα 7

Σφαίρα ακτίνας R είναι ομοιόμορφα πολωμένη με ακτινική πόλωση $\vec{P} = P_o \hat{r}$. Να υπολογιστούν :

α) Η επιφανειακή και χωρική πυκνότητα των δέσμιων φορτίων σ_p και ρ_p αντίστοιχα.

β) Η ένταση $\vec{E}$ και το διάνυσμα $\vec{D}$, υποθέτοντας ότι δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία ($q_f = 0$).

Λύση

α) Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι :

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = P_o \hat{r} \cdot \hat{r} \Rightarrow \sigma_p = P_o \quad (\text{όπου} \quad \hat{n} = \hat{r})$$

Για τον υπολογισμό της χωρικής πυκνότητας των δέσμιων φορτίων ρ_p, η πόλωση $\vec{P}$ γράφεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως :

$$\vec{P} = P_o \hat{r} = \frac{P_o}{r} \vec{r} = \frac{P_o}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$$

Άρα :
$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right)$$

Εκτελώντας τις παραπάνω παραγωγίσεις εύκολα καταλήγουμε στο αποτέλεσμα :

$$\rho_p = \frac{-2P_o}{r}$$

β) Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss στο διηλεκτρικό σε σφαιρική επιφάνεια S ακτίνας r < R προκύπτει :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow \vec{D} = 0 \quad (\text{αφού} \ q_f = 0)$$

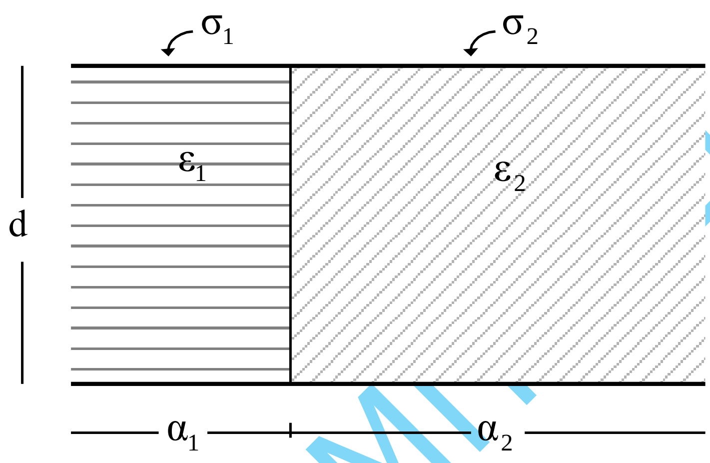
Άρα η ένταση $\vec{E}$ θα υπολογιστεί μέσω της σχέσης :

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{-\vec{P}}{\varepsilon_o} = \frac{-P_o}{\varepsilon_o}\hat{r}$$

Θέμα 8

Ένας επίπεδος πυκνωτής αποτελείται από ορθογώνιους οπλισμούς διαστάσεων α, b που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d << α, b. Ο πυκνωτής περιέχει δυο διηλεκτρικά απόλυτων διηλεκτρικών σταθερών ε_1, ε_2 και διαστάσεων $\alpha_1 \times b \times d$ και $\alpha_2 \times b \times d$ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή.

Λύση



Υποθέτοντας ότι ο πάνω οπλισμός έχει φορτίο +Q τότε ένα μέρος του Q_1 κατανέμεται στο τμήμα του που εφάπτεται στο υλικό διηλεκτρικής σταθεράς ε_1 και το υπόλοιπο $Q_2 = Q - Q_1$ στο τμήμα που εφάπτεται στο υλικό διηλεκτρικής σταθεράς ε_2. Συνεπώς οι επιφανειακές πυκνότητες φορτίου στα δυο τμήματα είναι :

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q_1}{\alpha_1 b} \quad \text{και} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{Q_2}{\alpha_2 b} \qquad \textbf{(1)}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss στα δυο διηλεκτρικά σε κλειστές επιφάνειες εμβαδού βάσης S_1 και S_2 αντίστοιχα στο χώρο μεταξύ των οπλισμών προκύπτει :

$$\oint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D_1 S_1 = Q_1 \Rightarrow D_1 = \frac{Q_1}{\alpha_1 b} \overset{(1)}{\Rightarrow} D_1 = \sigma_1 \qquad \textbf{(2)}$$

$$\oint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow D_2 S_2 = Q_2 \Rightarrow D_2 = \frac{Q_2}{\alpha_2 b} \overset{(1)}{\Rightarrow} D_2 = \sigma_2 \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σύμφωνα με τη σχέση $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ και λόγω των **(2)**, **(3)** είναι αντίστοιχα :

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \quad \text{και} \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών, όταν υπολογιστεί κατά μήκος διαδρομής στο υλικό με διηλεκτρική σταθερά ε_1 δίνει :

$$dV = -E_1 dx \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}\int_d^0 dx \Rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} d \overset{(1)}{=} \frac{Q_1 d}{\alpha_1 b \varepsilon_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{\alpha_1 b \varepsilon_1}{d}\Delta V \qquad \textbf{(4)}$$

Ενώ κατά μήκος του υλικού με διηλεκτρική σταθερά ε_2 δίνει :

$$dV = -E_2 dx \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}\int_d^0 dx \Rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} d \overset{(1)}{=} \frac{Q_2 d}{\alpha_2 b \varepsilon_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{\alpha_2 b \varepsilon_2}{d}\Delta V \qquad \textbf{(5)}$$

Σημειώνεται ότι η διαφορά δυναμικού των οπλισμών είναι ίδια από οποιαδήποτε διαδρομή και να υπολογιστεί.
Επομένως λόγω της αρχής διατήρησης του φορτίου ισχύει :

$$Q = Q_1 + Q_2 \overset{(4),(5)}{\Rightarrow} Q = \frac{\alpha_1 b \varepsilon_1}{d}\Delta V + \frac{\alpha_2 b \varepsilon_2}{d}\Delta V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\alpha_1 b \varepsilon_1}{d} + \frac{\alpha_2 b \varepsilon_2}{d} \Rightarrow C = \frac{b}{d}(\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2)$$

2ος τρόπος

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να επιλυθεί εναλλακτικά θεωρώντας ότι ο πυκνωτής αυτός αποτελείται από δυο πυκνωτές χωρητικοτήτων $C_1 = \varepsilon_1 \frac{S_1}{d} = \varepsilon_1 \frac{\alpha_1 b}{d}$ και $C_2 = \varepsilon_2 \frac{S_2}{d} = \varepsilon_2 \frac{\alpha_2 b}{d}$, οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι παράλληλα μεταξύ τους (αφού έχουν κοινή διαφορά δυναμικού στα άκρα τους).

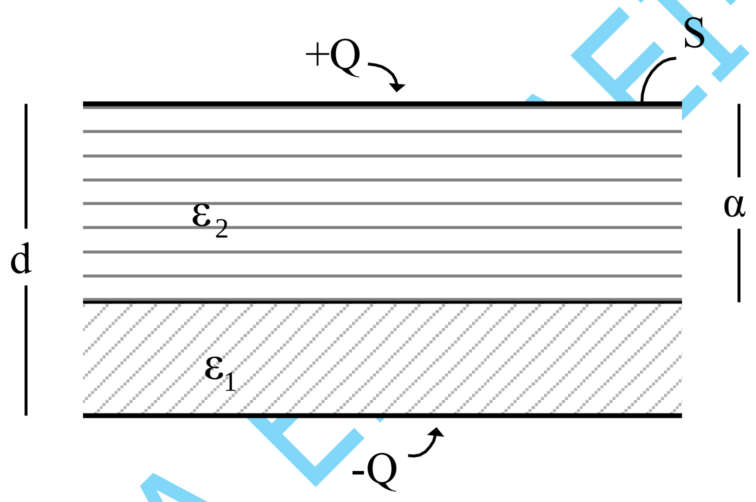
Άρα η ολική χωρητικότητα είναι :

$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_1 \frac{\alpha_1 b}{d} + \varepsilon_2 \frac{\alpha_2 b}{d} \Rightarrow C = \frac{b}{d}(\varepsilon_1 \alpha_1 + \varepsilon_2 \alpha_2)$$

Θέμα 9

Ένας επίπεδος πυκνωτής αποτελείται από ορθογώνιους οπλισμούς εμβαδού S που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d και μεταξύ των οπλισμών τοποθετούνται δυο διηλεκτρικά υλικά με απόλυτες διηλεκτρικές σταθερές ε_1 και ε_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή αυτού.

Λύση



Έστω ότι +Q είναι το φορτίο του πάνω οπλισμού και –Q το φορτίο του κάτω οπλισμού. Εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss στα διηλεκτρικά υπολογίζεται η διηλεκτρική μετατόπιση ως :

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = q_f \Rightarrow DS = Q \Rightarrow D = \frac{Q}{S}$$

Άρα η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι :

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{Q}{S\varepsilon_1} \qquad \text{και} \qquad E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{Q}{S\varepsilon_2}$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή είναι :

$$dV = -Edx \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{d}^{0} Edx \Rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = \int_{0}^{d} Edx = \int_{0}^{\alpha} E_2 dx + \int_{\alpha}^{d} E_1 dx =$$

$$= \frac{Q}{S\varepsilon_2}\int_{0}^{\alpha} dx + \frac{Q}{S\varepsilon_1}\int_{\alpha}^{d} dx = \frac{Q}{S\varepsilon_2}\alpha + \frac{Q}{S\varepsilon_1}(d-\alpha) \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{S}\left(\frac{\alpha}{\varepsilon_2} + \frac{d-\alpha}{\varepsilon_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{S}{\dfrac{\alpha}{\varepsilon_2} + \dfrac{d-\alpha}{\varepsilon_1}}$$

2ος τρόπος

Το ισοδύναμο του πυκνωτή αυτού είναι δυο πυκνωτές χωρητικοτήτων $C_1 = \varepsilon_1 \frac{S}{d-\alpha}$ και $C_2 = \varepsilon_2 \frac{S}{\alpha}$, οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι σε σειρά.

Άρα η ολική χωρητικότητά του είναι :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{S}{\dfrac{\alpha}{\varepsilon_2} + \dfrac{d-\alpha}{\varepsilon_1}}$$

Θέμα 10

Να αποδειχθεί ότι η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων σ_p ενός διηλεκτρικού συνδέεται με την επιφανειακή πυκνότητα των ελεύθερων φορτίων σ_f μέσω της σχέσης :

$$\sigma_p = \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\sigma_f$$

Λύση

Είναι : $\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_o\vec{E}$ **(1)**

Αλλά: $\vec{D} = \varepsilon_o\varepsilon_r\vec{E} \Rightarrow \varepsilon_o\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\varepsilon_r}$

οπότε η **(1)** γίνεται :

$$\vec{P} = \vec{D} - \frac{\vec{D}}{\varepsilon_r} = \vec{D}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \Rightarrow \vec{P} = \vec{D}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{P}\cdot\hat{n} = \vec{D}\cdot\hat{n}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \qquad \textbf{(2)}$$

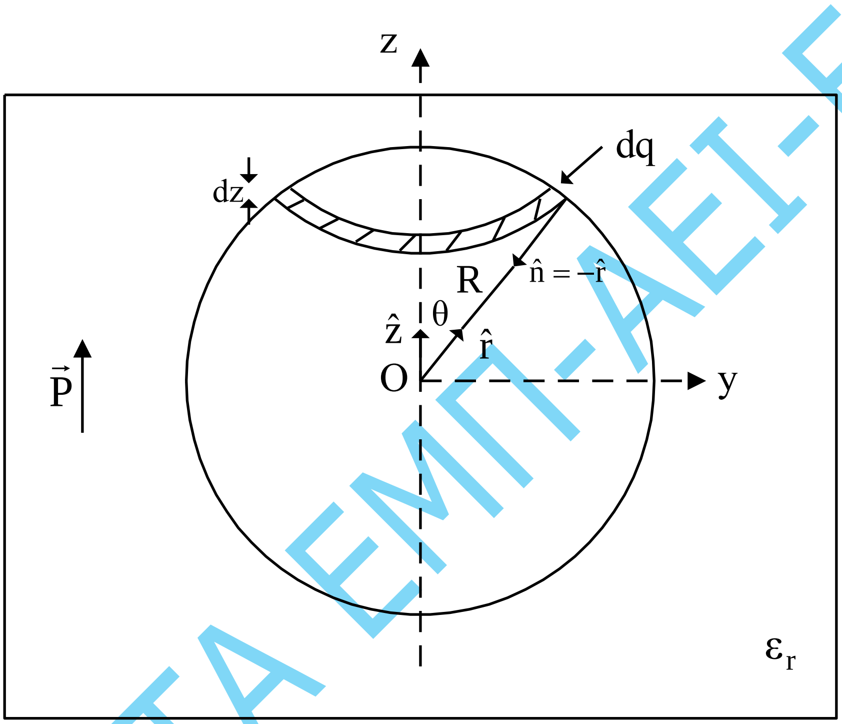
Αλλά είναι $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n}$ και $\sigma_f = -\vec{D}\cdot\hat{n}$, οπότε η **(2)** γράφεται :

$$\sigma_p = -\sigma_f\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \Rightarrow \sigma_p = \sigma_f\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}$$

Θέμα 11

Εντός απείρου διηλεκτρικού σταθερής πόλωσης $\vec{P} = P_o \hat{z}$ υπάρχει σφαιρική οπή ακτίνας R. Υπολογίστε τις προβολές της έντασης $\vec{E}$ στο κέντρο της οπής O, λόγω των δέσμιων φορτίων.

Λύση



Η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι :

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = P_o \hat{z} \cdot (-\hat{r}) \Rightarrow \sigma_p = -P_o \cos\theta$$

όπου P_o το μέτρο της σταθερής πόλωσης.

Η ένταση στο κέντρο O οφείλεται στο φορτισμένο σφαιρικό φλοιό. Θεωρώντας ως στοιχειώδες φορτίο dq ένα κυκλικό δακτύλιο του φλοιού, η ένταση αυτού είναι :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{dq}{R^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά : $\sigma_p = \dfrac{dq}{dS} \Rightarrow dq = \sigma_p dS = -P_o \cos\theta dS$

και $dS = 2\pi R\sin\theta dz = 2\pi R\sin\theta R d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$

οπότε : $dq = -P_o 2\pi R^2 \cos\theta \sin\theta d\theta$ και η **(1)** γίνεται :

$$dE = -\frac{P_o}{2\varepsilon_o}\cos\theta\sin\theta d\theta \qquad \textbf{(2)}$$

Αναλύοντας την ένταση dE στις προβολές της προκύπτει :

$$dE_y = dE\sin\theta \overset{(2)}{=} -\frac{P_o}{2\varepsilon_o}\cos\theta\sin^2\theta d\theta$$

Άρα : $E_y = \int dE_y = -\dfrac{P_o}{2\varepsilon_o}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos\theta\sin^2\theta d\theta = -\dfrac{P_o}{2\varepsilon_o}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2\theta d(\sin\theta) =$

$$= -\frac{P_o}{2\varepsilon_o}\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} \Rightarrow E_y = 0$$

και $dE_z = dE\cos\theta \overset{(2)}{=} -\dfrac{P_o}{2\varepsilon_o}\cos^2\theta\sin\theta d\theta$

Άρα : $E_z = \int dE_z = -\dfrac{P_o}{2\varepsilon_o}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta = -\dfrac{P_o}{2\varepsilon_o}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2\theta[-d(\cos\theta)] =$

$$= \frac{P_o}{2\varepsilon_o}\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} \Rightarrow \frac{P_o}{2\varepsilon_o}\frac{(-2)}{3} \Rightarrow E_z = -\frac{P_o}{3\varepsilon_o}$$

Θέμα 12

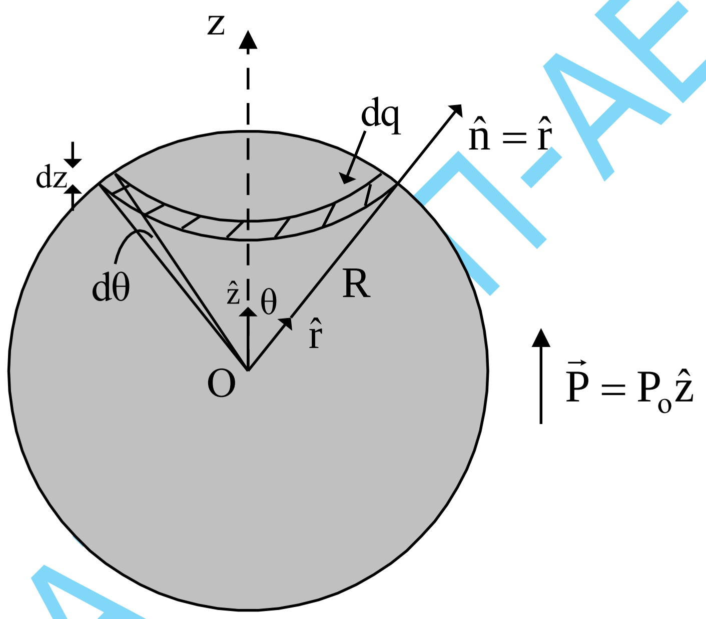
Σφαίρα από διηλεκτρικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ε_r διαθέτει σταθερή πόλωση $\vec{P} = P_o \hat{z}$.

α) Υπολογίστε το συνολικό δέσμιο φορτίο που αναλογεί σε κάθε ημισφαίριο.

β) Τοποθετείστε πάνω στον άξονα z με ακρίβεια το ισοδύναμο προς τη σφαίρα ηλεκτρικό δίπολο.

γ) Ποια είναι η ολική ενέργεια του συστήματος ;

Λύση



α) Η χωρική πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι :

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0 \qquad (\text{αφού } \vec{P} = \text{σταθερή})$$

ενώ η επιφανειακή πυκνότητα των δέσμιων φορτίων είναι :

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = P_o \hat{z} \cdot \hat{r} \Rightarrow \sigma_p = P_o \cos\theta \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα στο άνω ημισφαίριο που αντιστοιχεί σε γωνία $0 \le \theta \le \pi/2$, το δέσμιο φορτίο που αναλογεί δίνεται από το ολοκλήρωμα :

$$q_p = \int_S \sigma_p dS$$

όπου dS είναι το εμβαδό του στοιχειώδους φορτίου dq και είναι :

$$dS = 2\pi R\sin\theta dz = 2\pi R\sin\theta R d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

Οπότε : $$q_p = \int_0^{\pi/2} P_o \cos\theta 2\pi R^2 \sin\theta d\theta = 2\pi R^2 P_o \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta =$$

$$= 2\pi R^2 P_o \int_0^{\pi/2} \sin\theta d(\sin\theta) = 2\pi R^2 P_o \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= 2\pi R^2 P_o \frac{1}{2} \Rightarrow q_p = \pi R^2 P_o \qquad \textbf{(2)}$$

Στο κάτω ημισφαίριο, που αντιστοιχεί σε γωνία $\pi/2 \le \theta \le \pi$, αναλογεί δέσμιο φορτίο που υπολογίζεται όπως παραπάνω και είναι :

$$q_p' = -\pi R^2 P_o = -q_p$$

Δηλαδή παρατηρείται μια συσσώρευση θετικών φορτίων στο άνω ημισφαίριο και αρνητικών στο κάτω ημισφαίριο, έτσι ώστε το συνολικό φορτίο να είναι πάντα μηδέν.

β) Το ισοδύναμο προς τη διηλεκτρική σφαίρα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται προφανώς από τα δυο φορτία $\pm q_p$ σε απόσταση d μεταξύ τους, τέτοια ώστε η προκύπτουσα πόλωση να είναι η P_o. Επομένως επειδή η ηλεκτρική ροπή του διπόλου είναι $\vec{p} = q_p d\hat{z}$ προκύπτει:

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} \Rightarrow P_o \hat{z} = \frac{q_p d\hat{z}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow d = \frac{4\pi R^3}{3q_p} P_o \overset{(2)}{=} \frac{4\pi R^3 P_o}{3\pi R^2 P_o} \Rightarrow d = \frac{4}{3} R$$

γ) Η ολική ενέργεια του συστήματος είναι :

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \qquad \textbf{(3)}$$

όπου $\vec{E}$ η ένταση στο κέντρο Ο που οφείλεται στο σφαιρικό φορτισμένο φλοιό ακτίνας R και σύμφωνα με το **Θέμα 11** είναι :

$$\vec{E} = -\frac{P_o}{3\varepsilon_o} \hat{z}$$

και η ηλεκτρική διπολική ροπή $\vec{p}$ είναι :

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} \Rightarrow \vec{p} = \vec{P} V = \vec{P} \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \vec{p} = P_o \frac{4}{3}\pi R^3 \hat{z}$$

Άρα τελικά η **(3)** δίνει :

$$U = -P_o \frac{4}{3}\pi R^3 \hat{z} \cdot \left(-\frac{P_o}{3\varepsilon_o} \hat{z} \right) \Rightarrow U = \frac{4}{9\varepsilon_o} \pi R^3 P_o^2$$