ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ & ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ
ΘΕΩΡΙΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Φθίνουσα Ταλάντωση

Φθίνουσα λέγεται κάθε ταλάντωση το πλάτος της οποίας ελαττώνεται συνεχώς και μηδενίζεται βαθμιαία. Η απόσβεση αυτή οφείλεται σε αντιστάσεις (μηχανικές, ηλεκτρικές κ.α.) και στην πραγματικότητα εμφανίζεται σε όλες τις ταλαντώσεις που γίνονται στη φύση. Μια συνήθης περίπτωση τέτοιου είδους ταλάντωσης είναι η απλή αρμονική ταλάντωση ενός σώματος, στην οποία όμως εμφανίζεται και μια δύναμη αντίστασης T αντίθετη της ταχύτητας και ανάλογη με αυτή. Δηλαδή:

$T = -bυ = -bdx/dt$, όπου b η σταθερά απόσβεσης.

Τότε σύμφωνα με το 2^{ο} νόμο του Newton η εξίσωση κίνησης είναι:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Θέτοντας $\gamma = b/2m$ και $\omega_o = \sqrt{k/m}$ (φυσική συχνότητα) η **(1)** γράφεται:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

- Αν $\gamma^2 < \omega_o^2$ (μικρή απόσβεση), η λύση της **(2)** είναι:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi) \qquad \textbf{(3)}$$

όπου A και φ σταθερές, οι τιμές των οποίων προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες και $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$.
Συνεπώς η απόσβεση προκαλεί μείωση της συχνότητας ταλάντωσης καθώς και μείωση του πλάτους ταλάντωσης, το οποίο δίνεται από τον όρο $Ae^{-\gamma t}$ της **(3)** και δεν είναι σταθερός. Η ενέργεια που χάνεται από το ταλαντούμενο σώμα απορροφάται από το περιβάλλον μέσο.

- Αν $\gamma^2 = \omega_o^2$ (κρίσιμη απόσβεση) τότε η γενική λύση της **(2)** είναι:

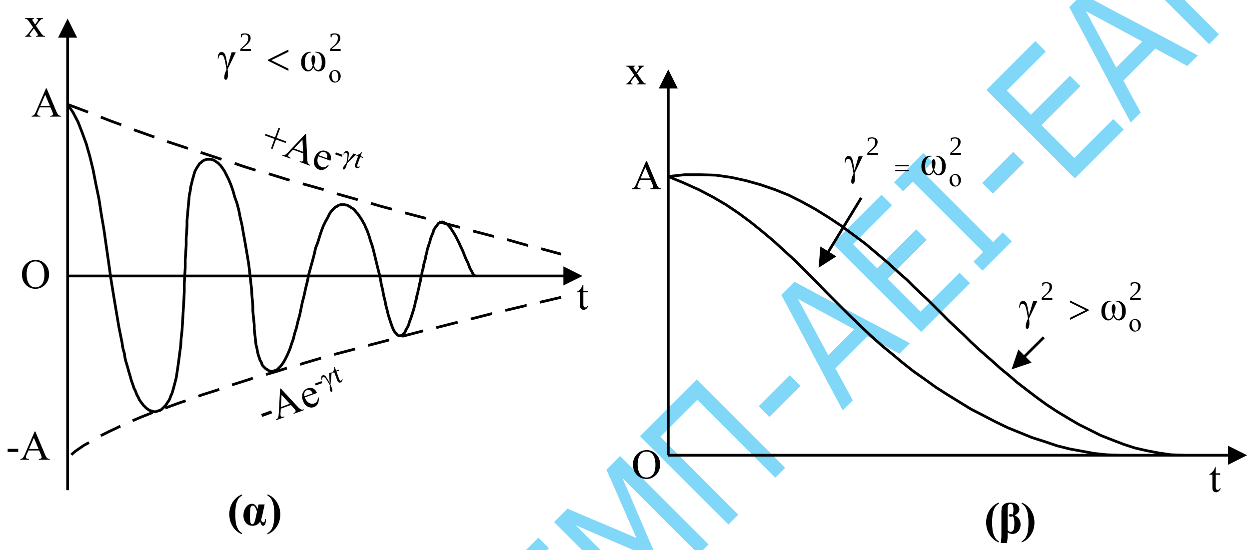
$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} \qquad \textbf{(4)}$$

όπου A,B σταθερές καθοριζόμενες από τις αρχικές συνθήκες.

- Αν $\gamma^2 > \omega_o^2$ (μεγάλη απόσβεση) τότε η γενική λύση της **(2)** είναι:

$$x(t) = (Ae^{pt} + Be^{-pt})\,e^{-\gamma t}, \quad \text{όπου} \quad p = \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2} \qquad \textbf{(5)}$$

Παρατηρείται ότι στις περιπτώσεις κρίσιμης και μεγάλης απόσβεσης, η κίνηση δεν είναι περιοδική. Ακολούθως στο **Σχήμα 9.7** φαίνεται η γραφική απεικόνιση της απομάκρυνσης του ταλαντωτή από τη θέση ισορροπίας συναρτήσει του χρόνου για τις τρεις παραπάνω περιπτώσεις.



Σχήμα 9.7

Εξαναγκασμένη Ταλάντωση

Οι ταλαντώσεις που παράγονται όταν το ταλαντούμενο σύστημα δέχεται μια εξωτερική περιοδική διεγείρουσα δύναμη λέγονται **εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.**
Οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις έχουν τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης και όχι τη φυσική συχνότητα ω_o του συστήματος. Παραδείγματα εξαναγκασμένης ταλάντωσης αποτελούν μια γέφυρα η οποία δονείται υπό την επίδραση του βήματος των στρατιωτών που περνούν πάνω από αυτή ή διαπασών το οποίο δονείται όταν εκτεθεί στην περιοδική δύναμη ενός ηχητικού κύματος.
Επομένως η κίνηση ενός σώματος μάζας m στο οποίο ασκούνται οι δυνάμεις $-kx$, $-bu$ (απόσβεση) και $F_o\cos\omega t$ (διεγείρουσα δύναμη) είναι εξαναγκασμένη ταλάντωση, που περιγράφεται από την εξίσωση κίνησης:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -kx - b\frac{dx}{dt} + F_o\cos\omega t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Θέτοντας $2\gamma = b/m$ και $\omega_o^2 = k/m$ η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m}\cos\omega t \qquad \textbf{(6)}$$

Η **(6)** είναι μια μη ομογενής διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές, η γενική λύση της οποίας είναι:

$$x(t) = A\sin(\omega t - \delta) + Be^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi) \qquad \textbf{(7)}$$

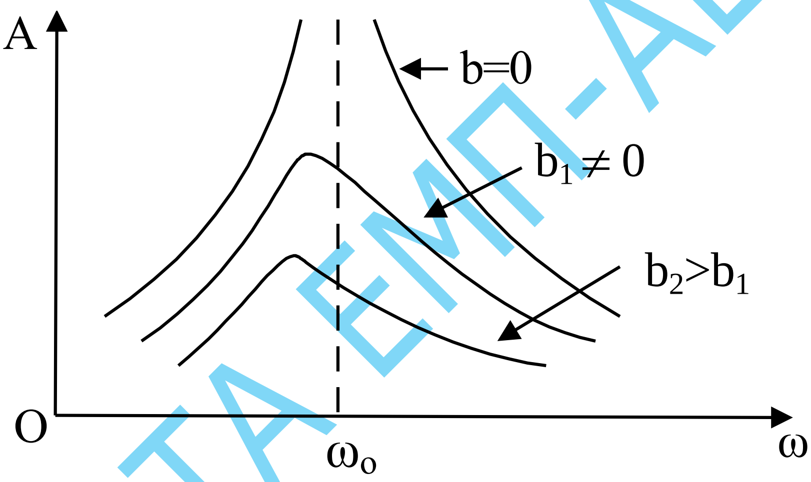
όπου $$A = \frac{F_o}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_o^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \qquad \textbf{(8)}$$

και $$\delta = \tan^{-1}\frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_o^2} \qquad \textbf{(9)}$$

το πλάτος και η διαφορά φάσης της εξαναγκασμένης ταλάντωσης αντίστοιχα.
Ο δεύτερος όρος της **(7)** μειώνεται εκθετικά με το χρόνο κι έτσι έχει σημασία στην αρχή της ταλάντωσης. Άρα το σώμα τελικά εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα ίση με αυτή της διεγείρουσας δύναμης (η οποία αναπληρώνει την απώλεια ενέργειας από τις αποσβέσεις), όπου περιγράφεται από τον πρώτο όρο της **(7)**.

☞**Παρατήρηση**

Από τη σχέση **(8)** αποδεικνύεται ότι το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης γίνεται μέγιστο όταν $\omega^2 = \omega_o^2 - 2\gamma^2$. Η χαρακτηριστική αυτή τιμή της εξωτερικής συχνότητας ω στην οποία το πλάτος ταλαντώσεως γίνεται μέγιστο λέγεται **συχνότητα συντονισμού** και η κατάσταση αυτή του συστήματος λέγεται **συντονισμός.**
Γενικά όσο μικρότερη είναι η απόσβεση σε ένα σύστημα τόσο πιο κοντά στη φυσική συχνότητα ω_o είναι η συχνότητα συντονισμού.Στην οριακή περίπτωση όπου δεν υπάρχει απόσβεση (γ=0), η εξωτερική συχνότητα προσεγγίζει τη φυσική $(\omega \to \omega_o)$ με αποτέλεσμα το πλάτος της ταλάντωσης να απειρίζεται ($A \to \infty$).
Στο **Σχήμα 9.8** φαίνεται το πλάτος μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης συναρτήσει της εξωτερικής συχνότητας ω για διαφορετικούς συντελεστές αποσβέσεως.



Σχήμα 9.8

Άσκηση 1

Σωματίδιο μάζας m = 1 kgr κινείται πάνω στον άξονα x και έλκεται από την αρχή O με μια δύναμη μέτρου F = 4x Nt. Αν για t = 0 είναι x_o =10 m και $\upsilon_o = 0$ να υπολογιστούν:
α) Η διαφορική εξίσωση κίνησης και η περίοδος της ταλάντωσης.
β) Η θέση και η ταχύτητα του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.
γ) Αν στο σωματίδιο επιδρά επιπλέον μια δύναμη τριβής μέτρου T = 2υ Nt, όπου υ η ταχύτητα, να υπολογιστούν οι συναρτήσεις x(t) και υ(t).

Λύση

α) O $2^{ος}$ νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow -F = m\ddot{x} \Rightarrow -4x = \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + 4x = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

δηλαδή το σωματίδιο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση περί το O με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{4} = 2\ \text{rad/sec}$ και περίοδο $T = 2\pi/\omega = \pi\ \text{sec}$.

β) Η γενική λύση της **(1)** είναι:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(2)}$$

οπότε
$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(3)}$$

Οι αρχικές συνθήκες στις **(2), (3)** δίνουν:

$$10 = A\cos\varphi \qquad \textbf{(4)}$$

$$0 = -A\omega\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pm 2n\pi \quad (\text{n ακέραιος})$$

και η **(4)** δίνει για το πλάτος ταλάντωσης: A=10m

Άρα :
$$x(t) = 10\cos(2t \pm 2n\pi)\ \text{m}$$
$$\upsilon(t) = -20\sin(2t \pm 2n\pi)\ \text{m/sec}$$

γ) Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε φθίνουσα ταλάντωση και ο 2^{ος} νόμος του Newton τώρα δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow -F - T = m\ddot{x} \Rightarrow -4x - 2\dot{x} = \ddot{x} + 2\dot{x} + 4x = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

Συγκρίνοντας την (5) με την εξίσωση (9-24) παρατηρείται ότι γ=1 rad/sec και ω_o = 2 red/sec. Οπότε $\gamma^2 < \omega_o^2$ (μικρή απόσβεση) και η λύση της **(5)** είναι της μορφής :

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi) = Ae^{-1}\cos(\omega_1 t + \varphi) \qquad \textbf{(6)}$$

όπου $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ rad/sec .

Η ταχύτητα είναι :

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -Ae^{-t}\left[\cos(\omega_1 t + \varphi) + \omega_1 \sin(\omega_1 t + \varphi)\right] \qquad \textbf{(7)}$$

Οι αρχικές συνθήκες στις **(6)** και **(7)** δίνουν:

$$10 = A\cos\varphi \qquad \textbf{(8)}$$

$$0 = -A(\cos\varphi + \omega_1 \sin\varphi) \Rightarrow \cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = -\pi/6$$

και η **(8)** δίνει για το αρχικό πλάτος ταλάντωσης: $A = \dfrac{10}{\cos(-\pi/6)} \cong 11{,}5\text{m}$

Άρα: $x(t) = 11{,}5e^{-t}\cos(\sqrt{3}t - \pi/6)$ m

$$\upsilon(t) = -11{,}5e^{-t}[\cos(\sqrt{3}t - \pi/6) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t - \pi/6)] \text{ m/sec}$$

Άσκηση 2

Το πλάτος ενός αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση πέφτει στο 1/e της αρχικής τιμής μετά από n περιόδους. Να δειχθεί ότι ο λόγος της περιόδου T με απόσβεση προς την περίοδο T_o χωρίς απόσβεση δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{T}{T_o} = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}}$$

Λύση

Η περίοδος του ταλαντωτή χωρίς απόσβεση είναι:

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} \Rightarrow \omega_o = \frac{2\pi}{T_o} \qquad \textbf{(1)}$$

ενώ με απόσβεση είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega_1} \Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_o}$ **(2)**

όπου $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} \Rightarrow \omega_o^2 = \omega_1^2 + \gamma^2$ **(3)**

Αφού το πλάτος του ταλαντωτή με απόσβεση πέφτει στο 1/e της αρχικής τιμής μετά από n περιόδους, προκύπτει σύμφωνα με την εξίσωση θέσης αρμονικού ταλαντωτή με μικρή απόσβεση για φ=0:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos\omega_1 t \Rightarrow \frac{1}{e}A = Ae^{-\gamma nT}\cos\omega_1 nT \overset{(2)}{\Rightarrow} e^{-1} = e^{-\gamma nT}\cos 2\pi n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-1} = e^{-\gamma nT} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{nT} \qquad \textbf{(4)}$$

Επομένως η **(3)** λόγω των **(1)**, **(2)** και **(4)** δίνει:

$$\frac{4\pi^2}{T_o^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{1}{n^2T^2} \Rightarrow \frac{T^2}{T_o^2} = 1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2} \Rightarrow \frac{T}{T_o} = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}}$$

Άσκηση 3

Ένας αρμονικός ταλαντωτής παρουσιάζει κρίσιμη απόσβεση. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $x(0) = x_o$ και $\upsilon(0)=0$ να υπολογισθεί η θέση και η ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου.

Λύση

Η χρονική μεταβολή της θέσης ενός αρμονικού ταλαντωτή που παρουσιάζει κρίσιμη απόσβεση είναι:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα η ταχύτητα είναι :

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -\gamma A e^{-\gamma t} + B e^{-\gamma t} + Bt(-\gamma)e^{-\gamma t} \Rightarrow$$

$$\upsilon(t) = [-\gamma A + B(1-\gamma t)]e^{-\gamma t} \Rightarrow \qquad \textbf{(2)}$$

Οι αρχικές συνθήκες στις **(1)** και **(2)** δίνουν:

$$A = x_o \quad \text{και} \quad 0 = (-\gamma A + B) \Rightarrow B = \gamma A \Rightarrow B = \gamma x_o$$

Άρα: $x(t) = x_o(1+\gamma t)e^{-\gamma t}$

και $\upsilon(t) = (-\gamma x_o + \gamma x_o - \gamma^2 x_o t)e^{-\gamma t} \Rightarrow \upsilon(t) = -\gamma^2 x_o t e^{-\gamma t}$

όπου $\gamma=b/2m$.

Άσκηση 4

Δίνεται απλό εκκρεμές μήκους $\ell = 1\text{m}$, το οποίο βρίσκεται στον αέρα και το πλάτος της γωνίας ταλάντωσης μειώνεται από 6^o σε $5{,}4^o$ σε χρόνο 27min.
Να βρεθεί η εξίσωση της ταλάντωσης, ο χρόνος ηρέμησης και η κυκλική συχνότητα.

Λύση

Το εκκρεμές αυτό αποτελεί φθίνουσα ταλάντωση, η εξίσωση κίνησης της οποίας είναι:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\gamma\frac{d\varphi}{dt} + \omega_o^2\varphi = 0$$

Η γενική λύση της παραπάνω είναι: $\varphi(t) = \varphi_o e^{-\gamma t}\cos\omega t$ **(1)**

όπου $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$ η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης και $\varphi_o = 6^o = \frac{2\pi}{360}\cdot 6\text{rad} = \frac{\pi}{30}\text{rad}$ το αρχικό πλάτος της ταλάντωσης.

Η χρονική μείωση του πλάτους της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi(t) = \varphi_o e^{-\gamma t} \qquad \textbf{(2)}$$

Έτσι για $t = 27\text{min} = 1620\text{ sec}$ είναι $\Phi = 5{,}4^o = \frac{2\pi}{360}5{,}4\text{rad} = 0{,}03\pi\text{rad}$

Άρα η **(2)** δίνει:

$$0{,}03\pi = \frac{\pi}{30}e^{-1620\gamma} \Rightarrow e^{-1620\gamma} = 0{,}9 \Rightarrow -1620\gamma = \ell n 0{,}9 \Rightarrow \gamma = 6{,}5\cdot 10^{-5}\text{ sec}^{-1}$$

Η φυσική συχνότητα του εκκρεμούς είναι : $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \sqrt{\frac{10}{1}} = \sqrt{10}\text{ rad/sec}$

Άρα: $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} = \sqrt{10 - (6{,}5\cdot 10^{-5})^2} \cong \sqrt{9{,}999} \Rightarrow \omega \cong 3{,}16\text{rad/sec}$

Συνεπώς: $\varphi(t) = \frac{\pi}{30}e^{-6{,}5\cdot 10^{-5}t}\cos(3{,}16t)\text{ rad}$

Ο χρόνος ηρέμησης αντιστοιχεί στο χρόνο στον οποίο το πλάτος της ταλάντωσης θα μηδενιστεί, δηλαδή όταν $\Phi(t) = 0$ κι αυτό συμβαίνει όταν $e^{-\gamma t} = 0$, δηλαδή για $t \to \infty$. Συνεπώς θεωρητικά μετά από άπειρο χρόνο το εκκρεμές θα ηρεμήσει.

Άσκηση 5

Από κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k=100 N/m εξαρτάται σώμα μάζας m=25kgr. Στο σώμα εφαρμόζεται εξωτερική περιοδική δύναμη F(t) = 150cos5t Nt, καθώς ασκείται σε αυτό μια δύναμη τριβής T = -20υ Nt. Να υπολογιστούν:
α) Η συχνότητα, το πλάτος και η περίοδος στην μόνιμη κατάσταση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης.
β) Η απομάκρυνση συναρτήσει του χρόνου στην μόνιμη κατάσταση.

Λύση

α) Στην μόνιμη κατάσταση το σύστημα ταλαντώνεται με τη συχνότητα της εξωτερικής περιοδικής δύναμης. Δηλαδή ω= 5rad/sec.
Άρα η περίοδος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5}\,\text{sec}$$

Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης είναι**:**

$$A = \frac{F_o}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_o^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$$

όπου $\omega_o^2 = \frac{k}{m} = \frac{100}{25} = 4\ \text{rad/sec}$ και $\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{20}{2\cdot 25} = \frac{10}{25} = 0{,}4\ \text{rad/sec}$.

Άρα : $A = \frac{150}{25\sqrt{(25-4)^2+(0{,}8\cdot 4)^2}} = \frac{150}{25\sqrt{430{,}76}} \Rightarrow A = 0{,}29\ \text{m}$

β) Η απομάκρυνση συναρτήσει του χρόνου του εξαναγκασμένου ταλαντωτή στη μόνιμη κατάσταση είναι:

$$x(t) = A\sin(\omega t-\delta)$$

όπου $\delta = \tan^{-1}\frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_o^2} = \tan^{-1}\frac{3{,}2}{25-4} = \tan^{-1}\frac{3{,}2}{21} = 0{,}15\ \text{rad}$

Άρα: $x(t) = 0{,}29\sin(5t-0{,}15)\ \text{m}$