ΦΘΙΝΟΥΣΕΣ ΚΑΙ ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

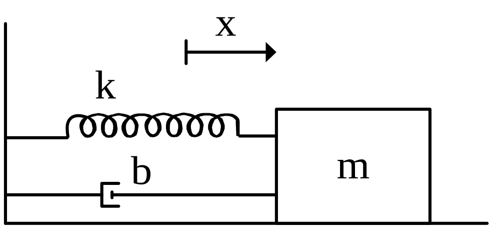
Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778

www.pmoiras.weebly.com

1. Απλός αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση



Σχήμα 3.1

Έστω ο απλός αρμονικός ταλαντωτής του **Σχήματος 3.1**, που αποτελείται από μάζα συνδεδεμένη με ελατήριο σταθεράς k, έτσι ώστε η δύναμη επαναφοράς να είναι $F_{\varepsilon\lambda} = -kx$ και επιπροσθέτως υπάρχει απόσβεση, δηλαδή μια δύναμη τριβής, η οποία θεωρείται ανάλογη της ταχύτητας $T = -b\upsilon = -b\dot{x}$, όπου b μια θετική σταθερά που ονομάζεται **σταθερά απόσβεσης**. Η παρουσία αντίστασης στην κίνηση προκαλεί απώλεια ενέργειας κι επομένως μείωση του πλάτους των ταλαντώσεων με το χρόνο. Γι' αυτό το λόγο οι ταλαντώσεις αυτές λέγονται **φθίνουσες**.

Σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton η εξίσωση κίνησης του συστήματος αυτού είναι:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow -kx - b\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Θέτοντας $\gamma = b/2m$ και $\omega_o^2 = k/m$ είναι η φυσική συχνότητα των αμείωτων ταλαντώσεων, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_o^2 x = 0 \qquad \textbf{(3-1)}$$

η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης **(3-1)**, είναι:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_o^2 = 0$$

Επομένως διακρίνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις:

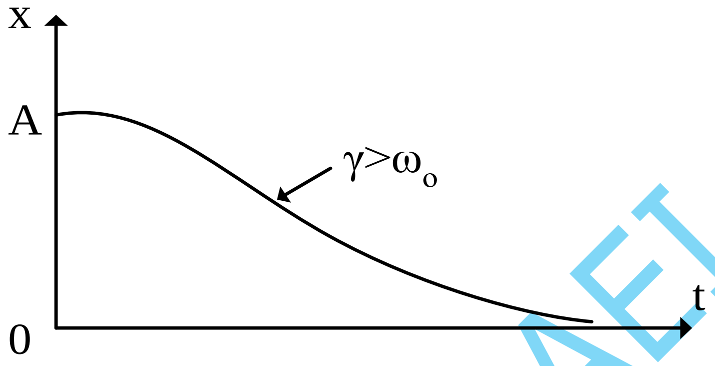
α) Αν $\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_o^2 > 0$, δηλαδή για $\gamma > \omega_o$, που αντιστοιχεί στην περίπτωση μεγάλης απόσβεσης, το τριώνυμο έχει πραγματικές αρνητικές ρίζες, που είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_o^2}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$$

Οπότε η γενική λύση της **(3-1)**, είναι:

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \qquad \textbf{(3-2)}$$

όπου Α, Β σταθερές που εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή δεν παρατηρείται ταλάντωση και χαρακτηρίζεται ως **υπεραπόσβεση.**
Το ακόλουθο σχήμα, απεικονίζει τη συμπεριφορά ενός συστήματος με υπεραπόσβεση, όταν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(t=0)=A$ και $\dot{x}(t=0)=0$.



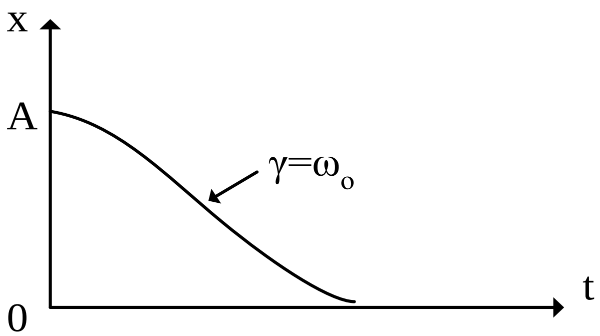
Σχήμα 3.2

β) Αν $\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_o^2 = 0$, δηλαδή για γ=ω$_o$, το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα, που είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = -2\gamma/2 = -\gamma$, οπότε η γενική λύση της **(3-1)**, είναι:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} \qquad \textbf{(3-3)}$$

όπου Α, Β σταθερές καθοριζόμενες από τις αρχικές συνθήκες.

Δηλαδή και πάλι δεν παρατηρείται ταλάντωση του συστήματος και μάλιστα ο ταλαντωτής επιστρέφει στη θέση ισορροπίας του γρηγορότερα απ' ότι στην περίπτωση της υπεραπόσβεσης. Η περίπτωση της απόσβεσης αυτής χαρακτηρίζεται ως **κρίσιμη απόσβεση**.
Το ακόλουθο σχήμα, απεικονίζει τη συμπεριφορά ενός συστήματος με κρίσιμη απόσβεση, όταν οι αρχικές συνθήκες είναι $x(t=0)=A$ και $\dot{x}(t=0)=0$.



Σχήμα 3.3

γ) Αν $\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_o^{\ 2} < 0$, δηλαδή για $\gamma < \omega_o$, που αντιστοιχεί στην περίπτωση μικρής απόσβεσης, το τριώνυμο έχει μιγαδικές ρίζες, που είναι:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\gamma \pm i\sqrt{4\omega_o^2 - 4\gamma^2}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$$

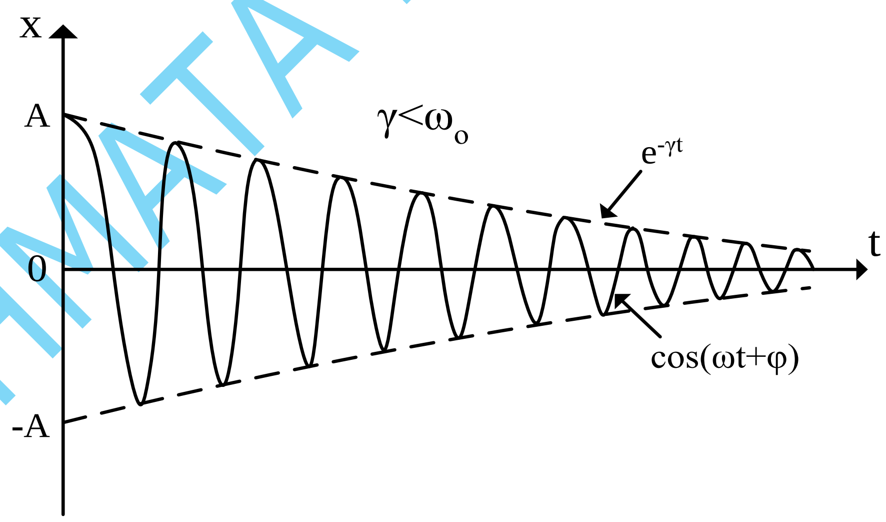
οπότε η γενική λύση της **(3-1)** είναι:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(3-4)}$$

όπου Α και φ σταθερές, οι οποίες προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες και $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$.

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή, το σύστημα εκτελεί ταλάντωση με κυκλική συχνότητα **ω**, διαφορετική από την ω_o και πλάτος ελαττούμενο εκθετικά με το χρόνο. Η περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται ως **υποαπόσβεση** ή **ασθενής απόσβεση**.

Το ακόλουθο σχήμα, παριστάνει τη συμπεριφορά ενός συστήματος με ασθενή απόσβεση, όταν οι αρχικές συνθήκες, είναι: $x(t=0) = A$ και $\dot{x}(t=0) = 0$.



Σχήμα 3.4

Παρατηρήσεις:

1) Η ταχύτητα του ταλαντωτή στην περίπτωση ασθενούς απόσβεσης σύμφωνα με την **(3-4)**, είναι:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -Ae^{-\gamma t}[\gamma\cos(\omega t+\varphi)+\omega\sin(\omega t+\varphi)] \qquad \textbf{(3-5)}$$

Συνεπώς η ολική ενέργεια του ταλαντωτή σε κάθε χρονική στιγμή θα είναι ίση με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας, δηλαδή:

$$E = K + V = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\omega_o^2x^2 \overset{(3-4),(3-5)}{\Rightarrow}$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2e^{-2\gamma t}[(\gamma\cos(\omega t+\varphi)+\omega\sin(\omega t+\varphi))^2+\omega_o^2\cos^2(\omega t+\varphi)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mA^2e^{-2\gamma t}[\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)+(\omega_o^2+\gamma^2)\cos^2(\omega t+\varphi)+$$

$$+2\gamma\omega\cos(\omega t+\varphi)\cdot\sin(\omega t+\varphi)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}mA^2e^{-2\gamma t}[\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)+(\omega_o^2+\gamma^2)\cos^2(\omega t+\varphi)+\gamma\omega\sin2(\omega t+\varphi)]$$

όπου $2\sin(\omega t+\varphi)\cdot\cos(\omega t+\varphi)=\sin2(\omega t+\varphi)$ και επειδή $\omega^2=\omega_o^2-\gamma^2$, η τελευταία γίνεται:

$$E = \frac{1}{2}mA^2e^{-2\gamma t}[\omega_o^2+\gamma^2(\cos^2(\omega t+\varphi)-\sin^2(\omega t+\varphi))+\gamma\omega\sin2(\omega t+\varphi)] \quad \textbf{(3-6)}$$

Στη διάρκεια μιας περιόδου της ταλάντωσης, ο εκθετικός παράγοντας ελάχιστα μεταβάλλεται (αφού στην περίπτωση ασθενούς απόσβεσης είναι $\gamma \ll \omega$) κι επομένως μπορεί να υπολογιστεί η μέση τιμή της ενέργειας στη διάρκεια μιας περιόδου της ταλάντωσης θεωρώντας τον εκθετικό παράγοντα σταθερό.

Αλλά οι μέσες τιμές των $\cos^2(\omega t+\varphi)$, $\sin^2(\omega t+\varphi)$ και $\sin2(\omega t+\varphi)$ στη διάρκεια μιας περιόδου της ταλάντωσης, είναι:

$$<\cos^2(\omega t+\varphi)> = \frac{1}{T}\int_0^T\cos^2(\omega t+\varphi)dt = \frac{1}{T}\int_0^T\frac{1+\cos2(\omega t+\varphi)}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2(\omega t+\varphi)}{4\omega}\right]_0^{T=2\pi/\omega} = \frac{1}{T}\left[\frac{T}{2} + \frac{\sin(4\pi + 2\varphi) - \sin 2\varphi}{4\omega}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow < \cos^2(\omega t+\varphi) >= \frac{1}{2}$$

Ομοίως:

$$< \sin^2(\omega t+\varphi) >= \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t+\varphi)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2(\omega t+\varphi)}{2}dt = \frac{1}{2}$$

και

$$< \sin 2(\omega t+\varphi) >= \frac{1}{T}\int_0^T \sin 2(\omega t+\varphi)dt = \frac{1}{T}\left[\frac{-\cos 2(\omega t+\varphi)}{2\omega}\right]_0^{T=2\pi/\omega} =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{-\cos(4\pi + 2\varphi) + \cos 2\varphi}{2\omega}\right] \Rightarrow < \sin 2(\omega t+\varphi) >= 0$$

Άρα η **(3-6)**, δίνει:

$$E(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-2\gamma t}\omega_o^2 \Rightarrow E(t) = E_o e^{-2\gamma t} \qquad \textbf{(3-7)}$$

όπου $E_o = \frac{1}{2} m\omega_o^2 A^2$ είναι η αρχική ολική ενέργεια του ταλαντωτή.
Δηλαδή σύμφωνα με τη σχέση **(3-7)** που περιγράφει την αποδιέγερση του ταλαντωτή, η ενέργεια φθίνει εκθετικά με το χρόνο.
Ο χρόνος που απαιτείται για να μειωθεί η ενέργεια στην τιμή E_o/e, είναι:

$$E_o e^{-1} = E_o e^{-2\gamma t} \Rightarrow 1 = 2\gamma t \Rightarrow t = 1/2\gamma = \tau$$

και ονομάζεται **χρόνος αποδιέγερσης** ή **αποκατάστασης** του ταλαντωτή.
Ενώ ο χρόνος που απαιτείται για να μειωθεί το πλάτος στην τιμή A/e, είναι:

$$Ae^{-1} = Ae^{-\gamma t} \Rightarrow 1 = \gamma t \Rightarrow t = 1/\gamma$$

Θεωρητικά βέβαια ο χρόνος που απαιτείται σε μια φυσική διεργασία εξασθένησης για να φτάσει ένα μέγεθος την τιμή του μηδενός, είναι άπειρος.

2) Ο αριθμός των ακτινίων κατά τον οποίο χρειάζεται να ταλαντωθεί ένα σύστημα με απόσβεση για να μειωθεί η ενέργειά του στην τιμή $E = E_o e^{-1}$ ορίζει το **συντελεστή ποιότητας Q** ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση και είναι:

$$Q = \frac{\omega_o}{2\gamma} = \frac{\omega_o m}{b} = 2\pi \frac{\text{αποθηκευμένη ενέργεια στο σύστημα}}{\text{απώλεια ενέργειας ανά περίοδο}} \qquad \textbf{(3-8)}$$

Γενικά ο συντελεστής ποιότητας Q εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο φθίνει η ενέργεια.

3) Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η παρουσία δύναμης τριβής σε μια ταλάντωση προκαλεί μείωση του πλάτους της ταλάντωσης με το χρόνο καθώς χάνεται ενέργεια. Η ολική ενέργεια όμως παραμένει ίση με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$E = K + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

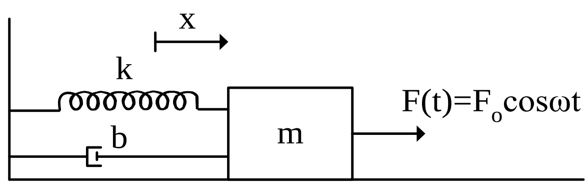
Όμως στην περίπτωση αυτή ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας δεν είναι ίσος με μηδέν, αλλά αρνητικός γιατί χάνεται ενέργεια. Δηλαδή:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{1}{2}m2\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}k2x\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx)$$

Επειδή όμως $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = -b\dot{x}$, οπότε τελικά είναι:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}(-b\dot{x}) \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -b\dot{x}^2 \qquad \textbf{(3-9)}$$

2. Εξαναγκασμένη ταλάντωση απλού αρμονικού ταλαντωτή



Σχήμα 3.5

Στην παράγραφο αυτή θα εξεταστεί η φυσική συμπεριφορά ενός εξαναγκασμένου μηχανικού ταλαντωτή με μάζα m, σταθερά ελατηρίου k και σταθερά απόσβεσης b, ο οποίος διεγείρεται από μια εξωτερική περιοδική δύναμη:

$$F(t) = F_o \cos \omega t$$

όπου F_o είναι το πλάτος της δύναμης και ω η συχνότητα αυτής.

Σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton, η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή αυτού, είναι:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow F_o \cos\omega t - kx - b\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_o}{m}\cos\omega t$$

Θέτοντας $\gamma = b/2m$ και $\omega_o^2 = k/m$ η παραπάνω σχέση, γράφεται:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m}\cos\omega t \qquad \textbf{(3-10)}$$

Η εξίσωση **(3-10)** που περιγράφει την εξαναγκασμένη ταλάντωση του ταλαντωτή αυτού, είναι μια διαφορική εξίσωση 2^{ης} τάξης μη ομογενής. Στη διερεύνηση που επακολουθεί, θα χρησιμοποιηθεί για απλοποίηση των αλγεβρικών πράξεων, μιγαδικός λογισμός. Έτσι σύμφωνα με τον τύπο του Euler $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$, η εξωτερική δύναμη F(t)=F$_o$cosωt μπορεί να παρασταθεί σαν το πραγματικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης $F(t) = F_o e^{i\omega t}$, αφού $F(t) = F_o(\cos\omega t + i\sin\omega t)$ και επομένως:

$$\mathrm{Re}\{F(t)\} = F_o \cos\omega t$$

Συνεπώς η μεταβλητή x θα αποτελεί το πραγματικό μέρος μιας μιγαδικής μεταβλητής z=x+iy (δηλαδή Re{z}=x) και η εξίσωση **(3-10)** μπορεί να γραφεί ως:

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_o^2 z = \frac{F_o}{m}e^{i\omega t} \qquad \textbf{(3-11)}$$

Ο ταλαντωτής, μετά από μια μεταβατική περίοδο προσαρμογής, εξαναγκάζεται στη μόνιμη κατάσταση να εκτελεί αρμονική ταλάντωση με συχνότητα ίση ακριβώς με τη συχνότητα **ω** της εξωτερικής δύναμης, με πλάτος και φάση όμως που μεταβάλλονται όταν μεταβληθεί η

συχνότητα της εξωτερικής διεγείρουσας δύναμης. Δηλαδή το πλάτος και η φάση στην περίπτωση αυτή δεν υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες αλλά θα καθοριστούν από τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης.
Επομένως θεωρείται ότι στη μόνιμη κατάσταση ο ταλαντωτής εκτελεί αρμονική κίνηση που περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad \textbf{(3-12)}$$

η οποία αποτελεί τη γενική λύση της **(3-10)** στη μόνιμη κατάσταση και είναι το πραγματικό μέρος της συνάρτησης $z(t)=Ae^{i(\omega t+\varphi)}$, δηλαδή:

$$\mathrm{Re}\{z(t)\}=A\cos(\omega t+\varphi)=x(t)$$

Επίσης είναι:

$$\dot{z}=i\omega Ae^{i(\omega t+\varphi)} \quad \text{και} \quad \ddot{z}=i^2\omega^2Ae^{i(\omega t+\varphi)}=-\omega^2Ae^{i(\omega t+\varphi)}$$

Αντικαθιστώντας τα $z, \dot{z}$ και $\ddot{z}$ στην **(3-11)**, προκύπτει:

$$-\omega^2Ae^{i(\omega t+\varphi)}+2\gamma i\omega Ae^{i(\omega t+\varphi)}+\omega_o^2Ae^{i(\omega t+\varphi)}=\frac{F_o}{m}e^{i\omega t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\omega^2Ae^{i\varphi}+i2\gamma\omega Ae^{i\varphi}+\omega_o^2Ae^{i\varphi}=\frac{F_o}{m}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A[(\omega_o^2-\omega^2)+i2\gamma\omega]=\frac{F_o}{m}e^{-i\varphi}=\frac{F_o}{m}(\cos\varphi-i\sin\varphi)$$

Άρα εξισώνοντας τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη στα δυο μέλη της τελευταίας σχέσης, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$(\omega_o^2-\omega^2)A=\frac{F_o}{m}\cos\varphi \quad \text{και} \quad 2\gamma\omega=-\frac{F_o}{m}\sin\varphi$$

Υψώνοντας τις δυο αυτές σχέσεις στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει το πλάτος A ως:

$$A(\omega)=\frac{F_o}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \qquad \textbf{(3-13)}$$

Ενώ διαιρώντας κατά μέλη τις δυο αυτές σχέσεις, προκύπτει η εφαπτομένη της φάσης, ως:

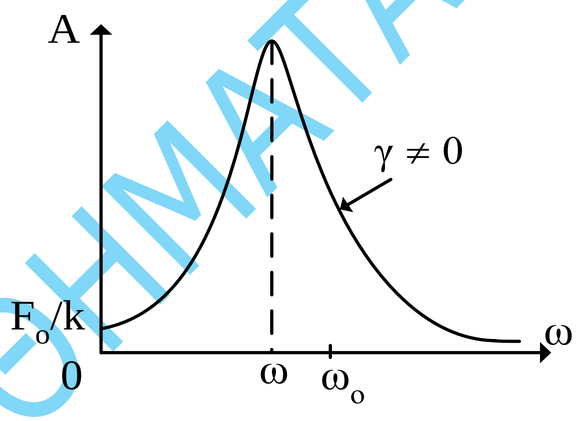
$$\tan\varphi(\omega) = \frac{-2\gamma\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \qquad \textbf{(3-14)}$$

Παρατηρείται ότι τόσο το πλάτος Α, όσο και η φάση φ είναι συναρτήσεις της συχνότητας **ω** της εξωτερικής δύναμης.
Επίσης από την **(3-13)**, συμπεραίνεται ότι όταν το ω τείνει στο μηδέν, το πλάτος A(ω) τείνει στο λόγο F_o/k, ενώ μετά καθώς το ω μεγαλώνει, το πλάτος αυξάνεται και μεγιστοποιείται όταν $dA/d\omega = 0$, δηλαδή εκτελώντας τις πράξεις εύκολα βρίσκεται ότι το πλάτος μεγιστοποιείται στη συχνότητα:

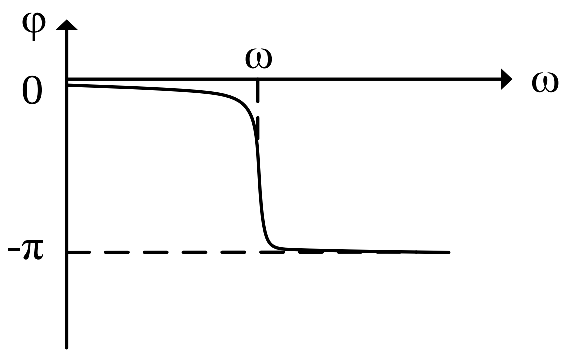
$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - 2\gamma^2} \qquad \textbf{(3-15)}$$

Έπειτα το πλάτος μειώνεται και τελικά τείνει στο μηδέν όταν το **ω** τείνει στο άπειρο. Η χαρακτηριστική αυτή τιμή της εξωτερικής συχνότητας **(3-15)** στην οποία το πλάτος ταλαντώσεως γίνεται μέγιστο, λέγεται **συχνότητα συντονισμού** και η κατάσταση αυτή του συστήματος, λέγεται **συντονισμός**.

Γενικά όσο μικρότερη είναι η απόσβεση του συστήματος ($\gamma \to 0$), τόσο πιο κοντά στη φυσική συχνότητα ω_o είναι η συχνότητα συντονισμού ($\omega \to \omega_o$). Στο ακόλουθο σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των μεγεθών Α(ω) και φ(ω).



(α)



(β)

Σχήμα 3.6

- **Ισχύς παρεχόμενη στον ταλαντωτή από τη διεγείρουσα δύναμη**

Για να διατηρηθούν οι ταλαντώσεις της μόνιμης κατάστασης στο σύστημα η διεγείρουσα εξωτερική δύναμη θα πρέπει να αναπληρώνει την ενέργεια που χάνεται σε κάθε κύκλο εξαιτίας της παρουσίας της τριβής.
Η στιγμιαία ισχύς εισόδου της διεγείρουσας δύναμης, είναι:

$$P(t)=\frac{dW}{dt}=F(t)\frac{dx}{dt}$$

όπου $F(x)=F_o\cos\omega t$ και $x=A\cos(\omega t+\varphi)\Rightarrow dx/dt=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$, οπότε:

$$P(t)=-\omega AF_o\cos\omega t\sin(\omega t+\varphi)$$

Αλλά είναι: $\sin(\omega t+\varphi)\cos\omega t=\frac{1}{2}[\sin(2\omega t+\varphi)+\sin\varphi]$, οπότε τελικά προκύπτει:

$$P(t)=-\frac{1}{2}\omega AF_o[\sin(2\omega t+\varphi)+\sin\varphi]$$

Δηλαδή παρατηρείται ότι η στιγμιαία ισχύς εισόδου μεταβάλλεται με συχνότητα διπλάσια από τη συχνότητα της εξωτερικής δύναμης.
Επομένως η μέση ισχύς εισόδου στο σύστημα, είναι:

$$P(\omega)=<P(t)>=-\frac{1}{2}\omega AF_o[<\sin(2\omega t+\varphi)>+<\sin\varphi>]$$

Αλλά: $<\sin(2\omega t+\varphi)>=0$

και $$<\sin\varphi>=\frac{1}{T}\int_0^T\sin\varphi dt=\sin\varphi=\tan\varphi\cdot\cos\varphi=\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$$

αφού $\cos^2\varphi=\frac{1}{1+\tan^2\varphi}\Rightarrow\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}$ και λόγω της **(3-14)** τελικά

είναι: $$<\sin\varphi>=\frac{-2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_o^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

Άρα η μέση ισχύς εισόδου P(ω) λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση **(3-13)** για το πλάτος A(ω) θα δίνεται από τη σχέση:

$$P(\omega)=\frac{F_o^2}{m}\frac{\gamma\omega^2}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} \qquad \textbf{(3-16)}$$

Από τη σχέση **(3-16)**, εύκολα φαίνεται ότι η μέγιστη τιμή της μέσης ισχύος εισόδου, παρατηρείται στη συχνότητα $\omega=\omega_o$ και είναι ίση με:

$$P_o=P(\omega_o)=\frac{F_o^2}{4m\gamma} \qquad \textbf{(3-17)}$$

Η συχνότητα $\omega=\omega_o$ στην οποία μεγιστοποιείται η μέση ισχύς εισόδου, ονομάζεται **συχνότητα συντονισμού** του συστήματος. Παρατηρείται ότι η συχνότητα συντονισμού ενός εξαναγκασμένου ταλαντωτή με απόσβεση γ είναι ίση με τη συχνότητα των ελεύθερων ταλαντώσεων του ίδιου ταλαντωτή, αλλά χωρίς απόσβεση (δηλαδή για γ=0). Η σπουδαιότητα του αποτελέσματος αυτού, είναι ότι επιτρέπει τον προσδιορισμό των συχνοτήτων συντονισμού ενός συστήματος όταν είναι γνωστές οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσής του.
Η στιγμιαία ισχύς τώρα που καταναλώνεται από τη δύναμη της τριβής:

$$T=b\,dx/dt=2m\gamma\,dx/dt$$

(επειδή $\gamma=b/2m$), είναι:

$$P_T(t)=T\frac{dx}{dt}=2m\gamma\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2m\gamma\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

Συνεπώς η μέση ισχύς της τριβής, είναι:

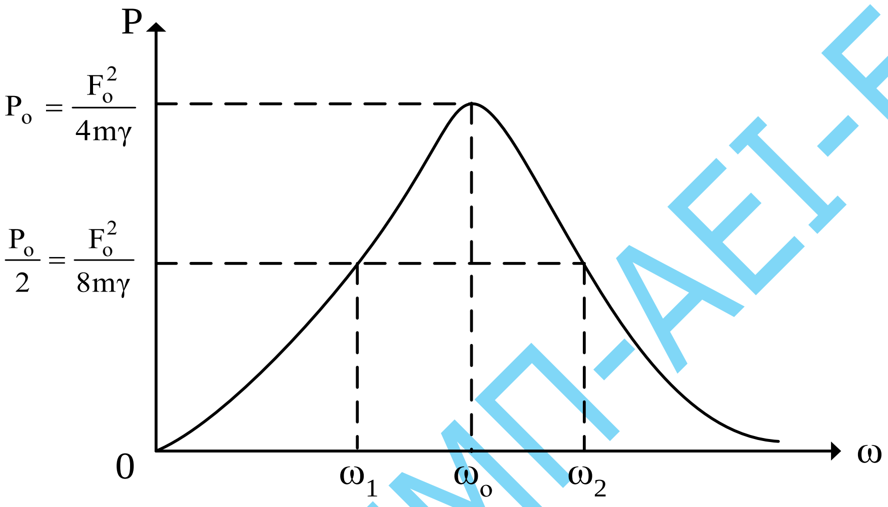
$$P_T(\omega)=<P_T(t)>=2m\gamma\omega^2A^2<\sin^2(\omega t+\varphi)>$$

Αλλά: $$<\sin^2(\omega t+\varphi)>=\frac{1}{T}\int_0^T\sin^2(\omega t+\varphi)dt=\frac{1}{2}$$

οπότε η παραπάνω αν ληφθεί υπόψη και η έκφραση **(3-13)** για το πλάτος $A(\omega)$, δίνει:

$$P_T(\omega)=m\gamma\omega^2A^2\Rightarrow P_T(\omega)=\frac{F_o^2}{m}\frac{\gamma\omega^2}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} \qquad \textbf{(3-18)}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις **(3-16)** και **(3-18)**, παρατηρείται ότι η μέση ισχύς που καταναλώνεται σε τριβές είναι ίση με τη μέση ισχύ εισόδου του συστήματος. Δηλαδή στη μόνιμη κατάσταση η ισχύς που παρέχει η εξωτερική δύναμη $F(t)$ αντισταθμίζει την ισχύ που καταναλώνεται στις τριβές του συστήματος.
Η καμπύλη της μέσης ισχύος $P(\omega)$ εισόδου ή ισοδύναμα των τριβών συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας ω της διεγείρουσας δύναμης, απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 3.7

Όπως και η καμπύλη του πλάτους μετατόπισης $A(\omega)$ συναρτήσει της ω **(Σχήμα 3.6(α))** έτσι και αυτή η καμπύλη της μέσης ισχύος $P(\omega)$ δίνει ένα μέτρο της απόκρισης του ταλαντωτή, ενώ η οξύτητα της κορυφής συντονισμού καθορίζεται και σε αυτή την περίπτωση από τη σταθερά απόσβεσης $(\gamma = b/2m)$. Η κορυφή εμφανίζεται στη συχνότητα συντονισμού όταν η ισχύς που απορροφά το σύστημα από τη διεγείρουσα δύναμη είναι μέγιστη και η καμπύλη αυτή λέγεται και **καμπύλη απορρόφησης** του ταλαντωτή.
Οι συχνότητες στις οποίες η ισχύς εισόδου του συστήματος είναι η μισή από την ισχύ εισόδου που αντιστοιχεί στη συχνότητα συντονισμού ω_o, δηλαδή για $P=P_o/2$ είναι σύμφωνα με τη σχέση **(3-16)**:

$$\frac{P_o}{2} = P_o \frac{4\gamma^2\omega^2}{(\omega_o^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} \Rightarrow (\omega_o^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2 = 8\gamma^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\omega_o^2-\omega^2)^2-4\gamma^2\omega^2 = 0 \Rightarrow (\omega_o^2-\omega^2+2\gamma\omega)(\omega_o^2-\omega^2-2\gamma\omega) = 0$$

Έτσι οι αποδεκτές μη αρνητικές λύσεις της τελευταίας, είναι:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 + \gamma^2} - \gamma \quad \text{και} \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_o^2 + \gamma^2} + \gamma$$

Άρα η διαφορά των δυο αυτών συχνοτήτων, είναι:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma \qquad \textbf{(3-19)}$$

και ονομάζεται **πλήρες εύρος συχνοτήτων συντονισμού**.

Παρατηρείται ότι το μέγεθος αυτό είναι το αντίστροφο του χρόνου αποδιέγερσης $\tau = 1/2\gamma$ ενός ταλαντωτή που εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις με απόσβεση. Επομένως δυο μεγέθη που χαρακτηρίζουν διαφορετικά μεταξύ τους φαινόμενα, του ίδιου όμως συστήματος, δηλαδή το εύρος συχνοτήτων συντονισμού $\Delta\omega$ που αναφέρεται στην εξαναγκασμένη ταλάντωση και ο χρόνος αποδιέγερσης τ που αναφέρεται στην φθίνουσα ταλάντωση, συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

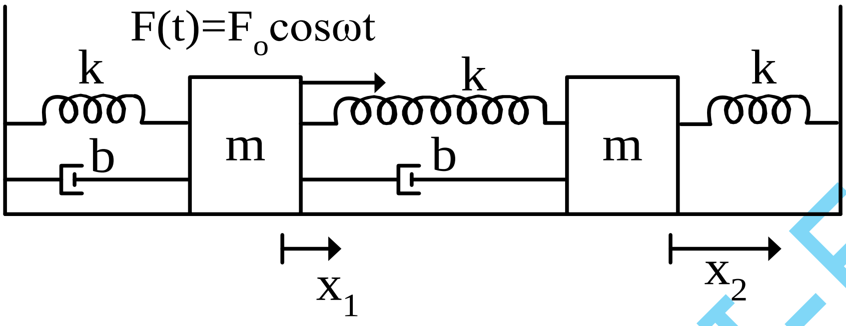
$$\Delta\omega \cdot \tau = 1 \qquad \textbf{(3-20)}$$

Η φυσική σημασία της τελευταίας σχέσης είναι ότι δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού του ενός μεγέθους από το άλλο.

Τέλος η οξύτητα της καμπύλης συντονισμού καθορίζεται επακριβώς από το **συντελεστή ποιότητας Q** του ταλαντούμενου συστήματος, που αναφέρεται στην απώλεια ενέργειας και ορίζεται ως:

$$Q = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_o}{\Delta\omega} \qquad \textbf{(3-21)}$$

3. Συντονισμοί συστήματος με δυο βαθμούς ελευθερίας



Σχήμα 3.8

Έστω το σύστημα με δυο βαθμούς ελευθερίας του **Σχήματος 3.8**, που αποτελείται από δυο ίσες μάζες m συζευγμένες από τρία ελατήρια ίδιας σταθεράς k και ο συντελεστής απόσβεσης b είναι κοινός και για τις δυο μάζες, ενώ διεγείρεται σε ταλάντωση από μια εξωτερική αρμονική δύναμη $F(t) = F_o \cos\omega t$, η οποία εφαρμόζεται σε μια από τις δυο μάζες του.
Θεωρώντας ότι σε κάποια χρονική στιγμή οι μετατοπίσεις των μαζών από τη θέση ισορροπίας τους (όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος) είναι x_1 και x_2 ($0<x_1<x_2$) τότε οι εξισώσεις κίνησης των δυο μαζών σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton, είναι:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_1 \Rightarrow -kx_1 + k(x_2 - x_1) - b\dot{x}_1 + F_o\cos\omega t = m\ddot{x}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \frac{2k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 = \frac{F_o}{m}\cos\omega t \qquad \textbf{(3–22α)}$$

και:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_2 \Rightarrow -kx_2 - k(x_2 - x_1) - b\dot{x}_2 = m\ddot{x}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 + 2\gamma\dot{x}_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{2k}{m}x_2 = 0 \qquad \textbf{(3–22β)}$$

όπου γ=b/2m και $\alpha_1 = \ddot{x}_1$, $\alpha_2 = \ddot{x}_2$ οι επιταχύνσεις των δυο μαζών.

Προσθέτοντας και αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις **(3-22α,β)**, όπως ακριβώς έγινε στην **παράγραφο 1.3** αναπτύσσοντας τη μέθοδο των κανονικών συντεταγμένων για την αναζήτηση των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, προκύπτουν οι ασύζευκτες εξισώσεις:

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + 2\gamma(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \frac{k}{m}(x_1 + x_2) = \frac{F_o}{m}\cos\omega t$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 + 2\gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \frac{3k}{m}(x_1 - x_2) = \frac{F_o}{m}\cos\omega t \qquad \textbf{(3-23)}$$

Οπότε ορίζοντας τις κανονικές συντεταγμένες του συστήματος:

$$y_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} \qquad \textbf{(3-24)}$$

και αντικαθιστώντας τις στις **(3-23)**, προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα:

$$\ddot{y}_1 + 2\gamma\dot{y}_1 + \omega_{o_1}^2 y_1 = \frac{F_o}{2m}\cos\omega t$$

$$\ddot{y}_2 + 2\gamma\dot{y}_2 + \omega_{o_2}^2 y_2 = \frac{F_o}{2m}\cos\omega t \qquad \textbf{(3-25)}$$

όπου $\omega_{o_1} = \sqrt{k/m}$ και $\omega_{o_2} = \sqrt{3k/m}$ είναι οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του ίδιου συστήματος όταν εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς τριβές. Συνεπώς κάθε μια από τις εξισώσεις **(3-25)** περιγράφει έναν από τους δυο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του συστήματος, όπως δείχνει η παρουσία των συντελεστών $\omega_{o_1}^2$ και $\omega_{o_2}^2$ των y_1 και y_2 αντίστοιχα και έχουν ακριβώς την ίδια μορφή με την εξίσωση **(3-10)** της εξαναγκασμένης ταλάντωσης ενός ταλαντωτή με ένα βαθμό ελευθερίας, εκτός από τον παράγοντα 1/2 στα δεύτερα μέλη τους (δηλαδή το πλάτος της εξωτερικής δύναμης είναι $F_o/2$).

Άρα ο κάθε τρόπος συμπεριφέρεται σαν ένας ταλαντωτής που διεγείρεται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση από μια εξωτερική περιοδική δύναμη με πλάτος $F_o/2$. Τότε στη μόνιμη κατάσταση σύμφωνα με τη σχέση **(3-12)** τα πλάτη των ταλαντώσεων δίνονται από τις σχέσεις:

$$y_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{και} \quad y_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \qquad \textbf{(3-26)}$$

όπου **ω** η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης και τα πλάτη A_1, A_2 και οι φάσεις φ_1, φ_2 σε αναλογία με τις σχέσεις **(3-13)** και **(3-14)** θα είναι αντίστοιχα:

$$A_1(\omega) = \frac{F_o}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_{o_1}^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

$$A_2(\omega) = \frac{F_o}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_{o_2}^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}} \qquad \textbf{(3-27)}$$

και $\tan\varphi_1(\omega) = \dfrac{-2\gamma\omega}{\omega_{o_1}^2-\omega^2}$, $\tan\varphi_2(\omega) = \dfrac{-2\gamma\omega}{\omega_{o_2}^2-\omega^2}$ **(3-28)**

Επίσης από τις σχέσεις **(3-24)** και με τη βοήθεια των **(3-26)** μπορούν να εκφραστούν οι στιγμιαίες μετατοπίσεις x_1 και x_2 των δυο μαζών ως:

$$x_1 = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1(t) = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$x_2 = y_1 - y_2 \Rightarrow x_2(t) = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) - A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \qquad \textbf{(3-29)}$$

όπου τα A_1, A_2 και φ_1, φ_2 δίνονται από τις σχέσεις **(3-27)** και **(3-28)** αντίστοιχα.

Συμπεραίνεται από τις σχέσεις **(3-29)** ότι τα σχήματα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος, διατηρούνται και στην περίπτωση της εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Πράγματι αν η συχνότητα ω της εξωτερικής δύναμης είναι ίση με τη συχνότητα ω_{o_1} του πρώτου κανονικού τρόπου ταλάντωσης, μόνο το πλάτος A_1 είναι σημαντικό σύμφωνα με τις σχέσεις **(3-27)** και επομένως θα είναι $x_1(t) = x_2(t)$, ενώ αν η συχνότητα της εξωτερικής δύναμης είναι ίση με τη συχνότητα ω_{o_2} του δεύτερου κανονικού τρόπου ταλάντωσης, σημαντική τιμή θα έχει μόνο το πλάτος A_2 και θα είναι $x_1(t) = -x_2(t)$, όπως ακριβώς και στην περίπτωση των ελεύθερων ταλαντώσεων του συστήματος.

- **Ισχύς συστήματος με δυο βαθμούς ελευθερίας**

Σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στην **παράγραφο 2** η ισχύς που καταναλώνει το σύστημα μέσω των τριβών θα αντισταθμίζεται από την ισχύ που παρέχει στο σύστημα η εφαρμοζόμενη εξωτερική δύναμη F(t).
Στο σύστημα του **Σχήματος 3.8** ασκούνται τριβές και στις δυο μάζες του, οπότε η συνολική στιγμιαία ισχύς που καταναλώνεται, είναι:

$$P_T(t) = P_{1T}(t) + P_{2T}(t) = T_1\dot{x}_1 + T_2\dot{x}_2 \Rightarrow P_T(t) = 2m\gamma(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

Αλλά σύμφωνα με τις σχέσεις **(3-29)** οι ταχύτητες των δυο μαζών, είναι:

$$\dot{x}_1 = -\omega A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) - \omega A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \omega A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Άρα η στιγμιαία ισχύς που καταναλώνεται στο σύστημα, είναι:

$$P_T(t) = 4m\gamma\omega^2[A_1^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) + A_2^2 \sin^2(\omega t + \varphi_2)]$$

Ενώ η μέση ισχύς που καταναλώνεται σε μια περίοδο της ταλάντωσης, είναι:

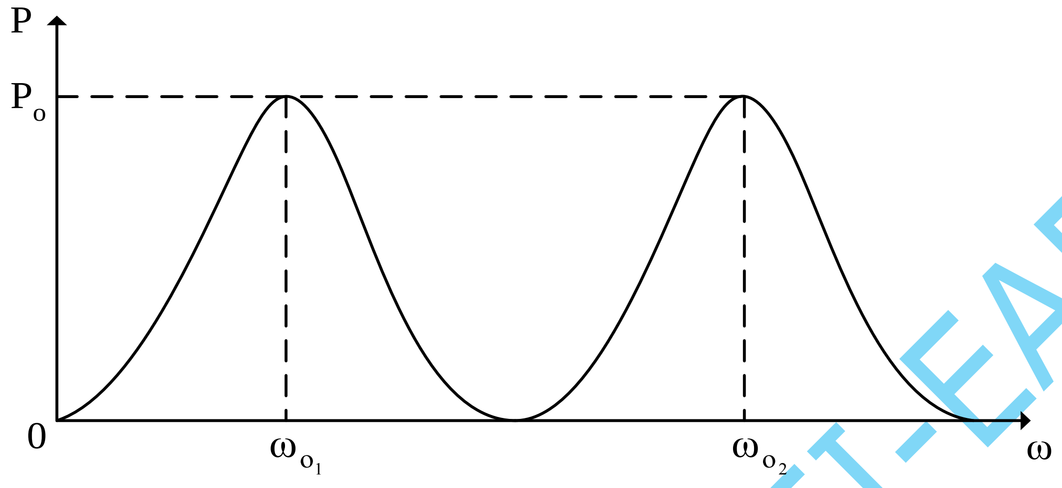
$$P(\omega) = \langle P_T(t) \rangle = 4m\gamma\omega^2[A_1^2 \langle \sin^2(\omega t + \varphi_1) \rangle + A_2^2 \langle \sin^2(\omega t + \varphi_2) \rangle] =$$

$$= 2m\gamma\omega^2(A_1^2 + A_2^2)$$

όπου $\langle \sin^2(\omega t + \varphi_1) \rangle = \langle \sin^2(\omega t + \varphi_2) \rangle = 1/2$ και αντικαθιστώντας τα πλάτη A_1, A_2 από τις σχέσεις **(3-27)** προκύπτει τελικά:

$$P(\omega) = \frac{2F_o^2}{m}\left[\frac{\gamma\omega^2}{(\omega_{o_1}^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} + \frac{\gamma\omega^2}{(\omega_{o_2}^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\right] \qquad \textbf{(3-30)}$$

Παρατηρείται ότι το σύστημα αυτό με δυο βαθμούς ελευθερίας χαρακτηρίζεται από δυο συντονισμούς (μεγιστοποιήσεις της μέσης ισχύος), οι οποίοι αντιστοιχούν στις συχνότητες ω_{o_1} και ω_{o_2} των κανονικών τρόπων ελεύθερης ταλάντωσης χωρίς τριβές.
Η καμπύλη της μέσης ισχύος P(ω) των τριβών (ή ισοδύναμα της εξωτερικής δύναμης) συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας ω της διεγείρουσας δύναμης, όπως δίνεται από τη σχέση **(3-30)** απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 3.9

❒ **Σημείωση:** Γενικά για σύστημα με Ν βαθμούς ελευθερίας οι συχνότητες συντονισμού είναι οι συχνότητες των Ν κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος για ελεύθερες ταλαντώσεις χωρίς τριβές.