☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ
ΘΕΩΡΙΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Περιεχόμενα

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

EMC^2

1. Φαινόμενα μεταφοράς – Ορισμοί

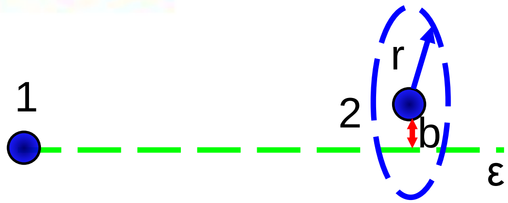
Σε αυτό το κεφάλαιο μελετούμε διάφορα φαινόμενα που οφείλονται στην κίνηση και τις κρούσεις των μορίων, όταν το σύστημα **δεν βρίσκεται** σε κατάσταση ισορροπίας.

Φαινόμενο μεταφοράς	Διαταραχή
Θερμική αγωγιμότητα	Όταν η **θερμοκρασία** είναι διαφορετική σε κάποια περιοχή του συστήματος προκαλεί μετακίνηση ενέργειας για την αποκατάσταση της ισορροπίας.
Διάχυση	Όταν η **πυκνότητα** είναι διαφορετική σε κάποια περιοχή του συστήματος προκαλεί μετακίνηση μορίων για την αποκατάσταση της ισορροπίας.
Εσωτερική τριβή ή ιξώδες	Όταν η **σχετική ταχύτητα** κάποιου τμήματος του συστήματος είναι διαφορετική προκαλεί μετακίνηση ορμής για την αποκατάσταση της ισορροπίας.

Χρόνος αποκατάστασης

Μετά από μία διαταραχή ο χρόνος που χρειάζεται το σύστημα να επανέλθει σε κατάσταση ισορροπίας ονομάζεται χρόνος αποκατάστασης.

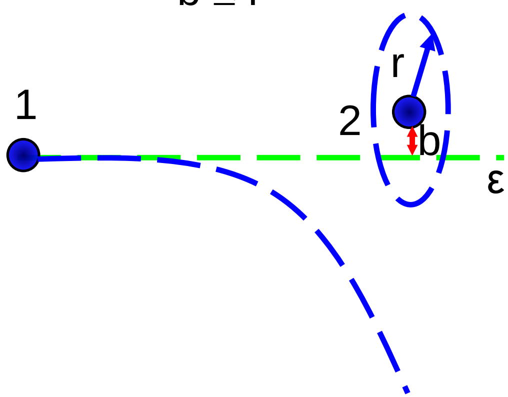
2. Ενεργός διατομή



Υποθέτουμε αλληλεπίδραση δύο σωματιδίων. Το σωματίδιο (1) θα αλληλεπιδράσει με το (2) όταν η παράμετρος κρούσης b (κάθετη απόσταση του φορέα της αρχικής ταχύτητας του σωματιδίου (ευθεία ε) από το κάντρο του σωματιδίου 2) είναι μικρότερη από μία οριακή ακτίνα r.

Με άλλα λόγια όταν b ≤ r το σωματίδιο θα σκεδαστεί δηλαδή η τροχιά του θα αποκλίνει από την αρχική ενώ στην αντίθετη περίπτωση δεν θα σκεδαστεί.

$b \leq r$



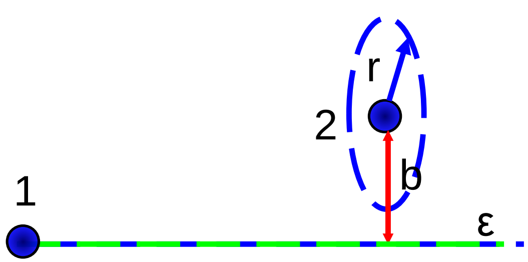
Το εμβαδό της οριακής ακτίνας αλληλεπίδρασης πr^2 ονομάζεται **ενεργός διατομή**.

Η ενεργός διατομή εξαρτάται:

1) Από το είδος της αλληλεπίδρασης

2) Από τις ενέργειες των σωματιδίων (ταχύτητα)

$b > r$



Όσο μεγαλύτερη είναι η ενέργεια των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων τόσο η απόκλιση στη τροχιά τους μικραίνει που σημαίνει ότι μικραίνει και η ενεργός διατομή.

Το φυσικό περιεχόμενο της ενεργού διατομής είναι ότι είναι ανάλογη της πιθανότητας αλληλεπίδρασης 2 σωματιδίων.

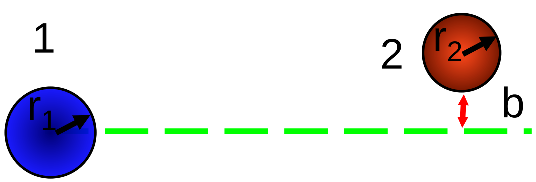
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

3. Ενεργός διατομή στο μοντέλο των σκληρών σφαιρών

Δώστε τον ορισμό της ενεργού διατομής του μοντέλου των σκληρών σφαιρών. Ποια είναι η ποιο σημαντική ατέλεια του μοντέλου.

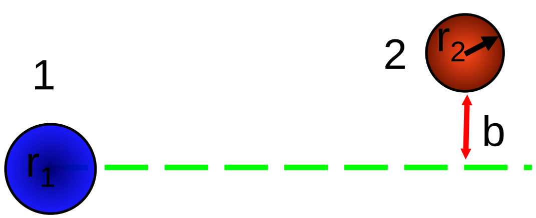
Στο μοντέλο των σκληρών σφαιρών θεωρούμε τα σωματίδια ως απαραμόρφωτες σκληρές σφαίρες και αλληλεπιδρούν μόνο όταν αυτά έρθουν σε επαφή.

$b \leq r_1 + r_2$



Όταν η παράμετρος κρούσης b είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο ακτινών τότε θα γίνει κρούσει, διαφορετικά όχι.

$b > r_1 + r_2$



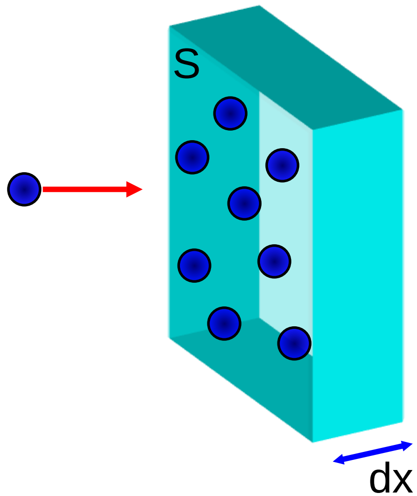
Για όμοια σωματίδια ακτίνας r η ενεργός διατομή θα είναι $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2 = 4\pi r^2$.

Η σημαντική ατέλεια του μοντέλου αυτού είναι ότι η ενεργός διατομή δεν εξαρτάται από την ενέργεια αλληλεπίδρασης.

Στην πραγματικότητα η ενεργός διατομή εξαρτάται από την ενέργεια, άρα από την ταχύτητα των σωματιδίων και τελικά από τη θερμοκρασία του αερίου. Στην πραγματικότητα όταν η θερμοκρασία του αερίου αυξάνει η ενεργός διατομή ελαττώνεται.

4. Πιθανότητα αλληλεπίδρασης

Υποθέσουμε ότι ένα σωματίδιο (βλήμα) το οποίο προσκρούει σε υλικό (στόχο) μετωπικής επιφάνειας S και πάχους dx.



Η πιθανότητα αλληλεπίδρασης του σωματιδίου με κάποιο σωματίδιο του στόχου σε ένα πάχος dx είναι:

$$dP = \frac{dS}{S}$$

Όπου dS είναι το άθροισμα όλων των ενεργών διατομών που δημιουργούν τα σωματίδια του στόχου στο πάχος dx.

Αν η συγκέντρωση των σωματιδίων του στόχου είναι n τότε σε πάχος dx θα έχουμε nSdx σωματίδια ενώ dS = σ (nSdx)

Άρα η πιθανότητα αλληλεπίδρασης ενός σωματιδίου μέσα σε πάχος dx θα είναι:

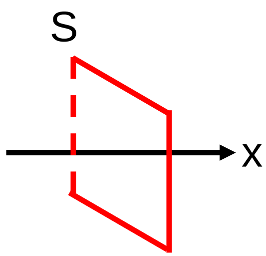
$$dP = \sigma n dx$$

Αν λάβουμε υπόψη τις σχετικές κινήσεις των σωματιδίων πρέπει να πολλαπλασιαστεί το με ένα παράγοντα $\sqrt{2}$

Η πιθανότητα αλληλεπίδρασης είναι ανάλογη της ενεργού διατομής.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

5. Πυκνότητα ροής



Ποια είναι η φυσική σημασία της πυκνότητας ροής

Έστω μία ποσότητα G η οποία μεταβάλλεται χωρικά και χρονικά, δηλαδή θα είναι διαφορετική από σημείο σε σημείο του χώρου και θα μεταβάλλεται με τη πάροδο του χρόνου.

Πυκνότητα ροής κατά μήκος ενός άξονα π.χ. του x ονομάζουμε το ρυθμό μεταβολής του G ως προς τον χρόνο ανά μονάδα επιφάνειας (που έχει διατομή κάθετη στον άξονα x).

$$I_G = \frac{\partial G}{S \partial T}$$

Για παράδειγμα η πυκνότητα ροής του νερού σε μία σωλήνα είναι η ποσότητα του νερού που διέρχεται στη μονάδα του χρόνου από μία διατομή της σωλήνας.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

6. Συχνότητα κρούσεων στο μοντέλο των σκληρών σφαιρών

Αν λάβομε υπόψη τη σχετική κίνηση των μορίων η συχνότητα κρούσεων (δηλαδή ο μέσος αριθμός κρούσεων ενός μορίου στη μονάδα του χρόνου) προκύπτει:

$$\nu' = \sqrt{2}\sigma\langle\upsilon\rangle n$$

όπου

$\sigma = 4\pi r^2$ η ενεργός διατομή στο μοντέλο των σκληρών σφαιρών (r η ακτίνα των σωματιδίων)

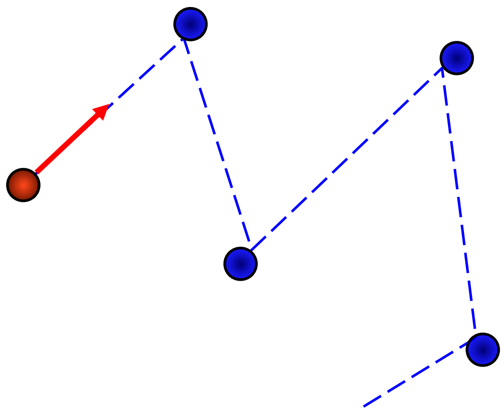
n η συγκέντρωση των σωματιδίων στο υλικό

$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$ η μέση ταχύτητα των σωματιδίων (T η θερμοκρασία και m η μάζα ενός σωματιδίου)

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

7. Μέση ελεύθερη διαδρομή

Ποια είναι η φυσική σημασία της μέσης ελεύθερης διαδρομής.



Στο μοντέλο των σκληρών σφαιρών ένα μόριο ανάμεσα σε δύο διαδοχικές συγκρούσεις του κινείται ευθύγραμμα.

Το μήκος της ευθείας ονομάζεται ελεύθερη διαδρομή.

Η μέση τιμή τους μήκους αυτού μετά από πολλές κρούσεις ονομάζεται μέση ελεύθερη διαδρομή.

Σε χρόνο t το σωματίδιο διανύει διαδρομή ίση με <υ>t και συγκρούεται ν΄t φορές άρα η μέση ελεύθερη διαδρομή θα είναι:

$$\langle \ell \rangle = \frac{\langle \upsilon \rangle t}{\nu' t} = \frac{\langle \upsilon \rangle}{\nu'} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$$

Άρα η μέση ελεύθερη διαδρομή μας δείχνει την μέση απόσταση που θα κινηθεί ένα μόριο δίχως να συγκρουστεί με τα άλλα μόρια.

Στον αέρα για παράδειγμα η μέση ελεύθερη διαδρομή είναι: $< l > \approx 0.6 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}$

Που σημαίνει ότι είναι 1000 φορές μεγαλύτερη από τις διαστάσεις των μορίων, δηλαδή ο χρόνος κρούσης των μορίων είναι 1000 φορές μικρότερος από το χρόνο της ελεύθερης κίνησης των μορίων. Σε κανονικές συνθήκες δηλαδή οι κρούσεις είναι «σπάνιες».

$$\langle \ell \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$$

Μέση ελεύθερη διαδρομή και πίεση

$$\langle \ell \rangle \propto \frac{1}{n} = \frac{kT}{P}$$

Η μέση ελεύθερη διαδρομή είναι αντιστρόφως ανάλογη της συγκέντρωσης των μορίων. Όταν η θερμοκρασία είναι σταθερή τότε είναι αντίστροφος ανάλογη της πίεσης.

Όταν η πίεση ελαττωθεί σημαντικά τότε η μέση ελεύθερη διαδρομή μεγαλώνει. Δηλαδή η συγκρούσεις των μορίων μεταξύ είναι πολύ σπάνιες. Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε ότι για χαμηλές πιέσεις η συγκρούσεις των μορίων είναι μόνο με τα τοιχώματα του δοχείου.

Μέση ελεύθερη διαδρομή και θερμοκρασία

$$\langle \ell \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$$

Όταν η πίεση P και η συγκέντρωση των μορίων n είναι σταθερά τότε η μέση ελεύθερη διαδρομή δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

Στην πραγματικότητα όμως η μέση ελεύθερη διαδρομή αυξάνει με την αύξηση της θερμοκρασίας, αφού είναι αντιστρόφως ανάλογο με το σ.

Αυτή είναι μια ακόμη ατέλεια του μοντέλου των σκληρών σφαιρών.

8. Κατανομή Μέσης ελεύθερης διαδρομής

Θα υπολογίσουμε το ποσοστό των μορίων τα οποία έχουν ελεύθερη διαδρομή από x έως x + dx

Αν αρχικά για t = 0 περνούν N_o μόρια τη θέση x = 0 κατά τη διάρκεια της διαδρομής τους ένας μέρος από αυτά συγκρούονται και ένα άλλο μέρος όχι.

Η πιθανότητα ενός μορίου να συγκρουσθεί μέσα σε πάχος dx (παίρνοντας υπόψη και τις σχετικές κινήσεις των μορίων) είναι:

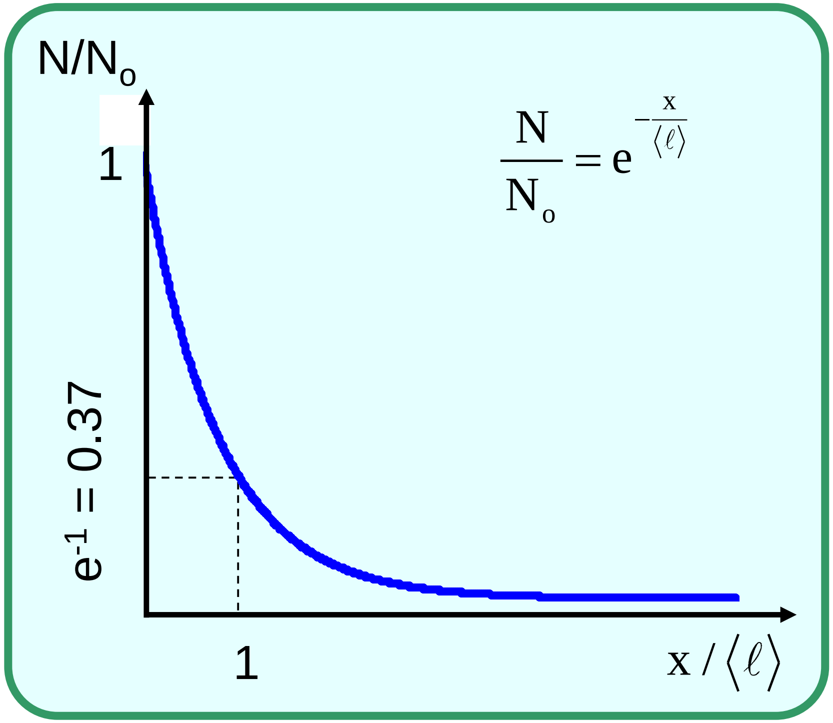
$$dP = \sqrt{2}\sigma n dx \overset{\langle \ell \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}}{=} \frac{dx}{\langle \ell \rangle}$$

Αν μετά από το διάστημα x που διένυσαν τα αρχικά μόρια δεν έχουν συγκρουστεί N μόρια, τότε ο αριθμός από αυτά dN που θα συγκρουστούν μέσα σε πάχος dx θα είναι ίσος με τον αριθμό των σωματιδίων επί την πιθανότητα του ενός μορίου για να συγκρουστεί (και επειδή ελαττώνεται ο αριθμός αυτός πρέπει να βάλουμε στη σχέση αρνητικό πρόσημο.

$$dN = -NdP = -N\frac{dx}{\langle \ell \rangle}$$

Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση βρίσκουμε: $N = N_o e^{-\frac{x}{\langle \ell \rangle}}$

Και μας δείχνει τον αριθμό των μορίων που δεν θα συγκρουστούν όταν διανύσουν μία διαδρομή x.



Στο σχήμα βλέπουμε το ποσοστό των μορίων συναρτήσει του $x/\langle \ell \rangle$

Το ποσοστό των μορίων τα οποία έχουν μεγαλύτερη ελεύθερη διαδρομή από την μέση είναι 37%. Δηλαδή το 63% των μορίων έχουν συγκρουστεί μέχρι να διανύσουν το πολύ τη μέση ελεύθερη διαδρομή.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

9. Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1

Υπολογίστε τι ποσοστό μορίων του αερίου:
α) θα περάσει χωρίς να συγκρουστεί απόσταση που υπερβαίνει τη μέση ελεύθερη διαδρομή $\langle \ell \rangle$
β) έχει μήκος ελεύθερης διαδρομή μεταξύ $\langle \ell \rangle$ και $2\langle \ell \rangle$

Αν αρχικά για t = 0 περνούν N_o μόρια τη θέση x = 0 και N ο αριθμός των μορίων του αερίου που διένυσαν διαδρομή x χωρίς να συγκρουστούν τότε ισχύει:

$$N = N_o e^{-\frac{x}{\langle \ell \rangle}}$$

α) το ποσοστό των μορίων που θα περάσει χωρίς να συγκρουστεί σε απόσταση που υπερβαίνει τη μέση ελεύθερη διαδρομή είναι:

$$\frac{N}{N_o} \le e^{-\frac{\langle \ell \rangle}{\langle \ell \rangle}} = e^{-1} = 37\%$$

β) το ποσοστό των μορίων που θα περάσει χωρίς να συγκρουστεί σε απόσταση από x εώς x + dx είναι είναι:

$$-\frac{dN}{N_o} = e^{-\frac{x}{\langle \ell \rangle}} \frac{dx}{\langle \ell \rangle}$$

Άρα το ποσοστό μορίων του αερίου που έχει μήκος ελεύθερης διαδρομή μεταξύ $\langle \ell \rangle$ και $2\langle \ell \rangle$

είναι:

$$\frac{\Delta N}{N_o} = -\frac{N_{2\langle \ell \rangle} - N_{\langle \ell \rangle}}{N_o} = \int_{\langle \ell \rangle}^{2\langle \ell \rangle} e^{-\frac{x}{\langle \ell \rangle}} \frac{dx}{\langle \ell \rangle} = \left[-e^{-\frac{x}{\langle \ell \rangle}} \right]_{\langle \ell \rangle}^{2\langle \ell \rangle} = e^{-1} - e^{-2} = 23\%$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 2

Αν αdt η πιθανότητα ένα μόριο να μην υποστεί κρούση σε χρόνο dt (α = σταθερά) να υπολογίστε α) την πιθανότητα να μην υποστεί κρούση το μόριο σε χρόνο t β) το χρόνο ανάμεσα σε δύο διαδοχικές κρούσεις.

Η πιθανότητα ενός μορίου να συγκρουσθεί όταν διανύσει μήκος dx είναι: $dP(x)=\dfrac{dx}{\langle \ell \rangle}$

Η πιθανότητα ενός μορίου να συγκρουσθεί μέσα σε χρόνο dt (όπου έχει διανύσει μήκος dx) είναι: $dP(t)=\alpha dt$

Οι δύο πιθανότητες προφανώς είναι ίσες και επομένως:

$$dP(x)=dP(t) \Rightarrow \frac{dx}{\langle \ell \rangle}=\alpha dt \overset{\langle \upsilon \rangle=\upsilon=\frac{dx}{dt}}{\Rightarrow} \frac{\langle \upsilon \rangle}{\langle \ell \rangle}=\alpha$$

α) Η πιθανότητα να μην υποστεί το μόριο κρούση μέχρι να διανύσει απόσταση x (σε χρόνο t) είναι:

$$P(x)=e^{-\frac{x}{\langle \ell \rangle}} \overset{x=\langle \upsilon \rangle t}{=} e^{-\frac{\langle \upsilon \rangle}{\langle \ell \rangle}t} \overset{\frac{\langle \upsilon \rangle}{\langle \ell \rangle}=\alpha}{=} e^{-\alpha t}=P(t)$$

β) Η σταθερά α έχει διαστάσεις αντιστρόφου χρόνου, ο χαρακτηριστικός χρόνος τ = 1/α δίνει πιθανότητα 37%, αυτή είναι και η πιθανότητα (το ποσοστό των μορίων) να έχει ένα μόριο μεγαλύτερη ελεύθερη διαδρομή από τη μέση, δηλαδή είναι ο μέσος χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικές κρούσεις.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 3

Πως εξαρτάται η μέση ελεύθερη διαδρομή κι ο αριθμό των κρούσεων κάθε μορίου στη μονάδα του χρόνου από την απόλυτη θερμοκρασία του ιδανικού αερίου αν αυτό εκτελεί α) ισόχωρη διαδικασία β) ισοβαρή;

Για ένα ιδανικό αέριο ισχύει η καταστατική εξίσωση:

$$PV = \nu RT \Rightarrow PV = \nu N_A \frac{R}{N_A} T \Rightarrow PV = NkT \Rightarrow P = \frac{N}{V} kT \Rightarrow P = nkT$$

Άρα η συγκέντρωση είναι: $n = \dfrac{P}{kT}$

Η συχνότητα κρούσεων (δηλαδή ο αριθμός κρούσεων ενός μορίου στη μονάδα του χρόνου) είναι: $\nu' = \sqrt{2}\sigma \langle \upsilon \rangle n$

Σε χρόνο t το σωματίδιο διανύει διαδρομή ίση με <υ>t και συγκρούεται ν΄t φορές άρα η μέση ελεύθερη διαδρομή θα είναι: $\langle \ell \rangle = \dfrac{\langle \upsilon \rangle t}{\nu' t} = \dfrac{\langle \upsilon \rangle}{\nu'} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$

$$n=\frac{P}{kT} \qquad \nu'=\sqrt{2}\sigma\langle\upsilon\rangle n \qquad \langle\ell\rangle=\frac{\langle\upsilon\rangle t}{\nu' t}=\frac{\langle\upsilon\rangle}{\nu'}=\frac{1}{\sqrt{2}\sigma n}$$

α) Ισόχωρη διαδικασία

$$V=\text{const} \;\Rightarrow\; \frac{P}{T}=\text{const} \;\Rightarrow\; n=\frac{P}{kT}=\text{const}$$

Αφού η μέση ελεύθερη διαδρομή είναι: $\langle\ell\rangle \propto \frac{1}{n}=\text{const}$

Για την συχνότητα κρούσεων όμως: $\nu' \propto \langle\upsilon\rangle n \overset{\substack{\langle\upsilon\rangle \propto \sqrt{T} \\ n=\text{const}}}{\propto} \sqrt{T}$

Άρα σε μία ισόχωρη διαδικασία η μέση ελεύθερη διαδρομή δεν αλλάζει αλλά μεταβάλλεται η συχνότητα κρούσεων η οποία είναι ανάλογη της τετραγωνική ρίζας της θερμοκρασίας (ή ανάλογη της μέσης ταχύτητας).

β) Ισόβαρής διαδικασία

$$P=\text{const} \;\Rightarrow\; n=\frac{P}{kT} \propto \frac{1}{T}$$

Αφού η μέση ελεύθερη διαδρομή είναι: $\langle\ell\rangle \propto \frac{1}{n} \propto T$

Για την συχνότητα κρούσεων όμως: $\nu' \propto \langle\upsilon\rangle n \overset{\substack{\langle\upsilon\rangle \propto \sqrt{T} \\ n \propto \frac{1}{T}}}{\propto} \frac{\sqrt{T}}{T}=\frac{1}{\sqrt{T}}$

Άρα σε μία ισοβαρής διαδικασία η μέση ελεύθερη διαδρομή είναι ανάλογη της θερμοκρασίας ενώ η συχνότητα κρούσεων είναι αντιστρόφως ανάλογη της τετραγωνική ρίζας της θερμοκρασίας.