Θέμα

Υδρογονοειδές ιόν ατομικού αριθμού $Z = 3$ βρίσκεται στην κατάσταση

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{3}} R_{32} \begin{pmatrix} \sqrt{2} Y_2^{-1} \\ Y_2^0 \end{pmatrix}$$

(α) Υπολογίστε τη μέση τιμή της z συνιστώσας του σπιν (S_z).
(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας.
(γ) Σε μετρήσεις των J^2, J_z ποια είναι τα πιθανά ενδεχόμενα;
(δ) Ποια η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο με σπιν κάτω και σε γωνίες $\theta > \frac{\pi}{3}$.

α) Η μέση τιμή της z συνιστώσας του σπίν S_z είναι:

$$\langle S_z \rangle = \sum |c_{n l m}|^2 m_s \hbar = \left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right|^2 \frac{1}{2}\hbar + \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 \left(-\frac{1}{2}\hbar\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{\hbar}{2} - \frac{1}{3}\frac{\hbar}{2} \rightarrow \boxed{\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{6}}$$

Προσοχή!! Η σωστή κυματοσυνάρτηση είναι:

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{3}} R_{32} \begin{pmatrix} \sqrt{2} Y_2^{-1} \\ Y_2^0 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{3}} R_{32} \left(\sqrt{2} Y_2^{-1} \chi_+ + Y_2^0 \chi_-\right)$$

β) Η μέση τιμή της δυναμικής ενέργειας $V(r) = -\frac{Ze^{2}}{r} = -\frac{3}{r}$ είναι:

$$\langle V \rangle = (\psi, V\psi) = \left(\psi, -\frac{3}{r}\psi\right) =$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{3}\sqrt{3}} \left(\sqrt{2} R_{32} Y_2^{-1} \chi_+ + R_{32} Y_2^0 \chi_-, \frac{\sqrt{2}}{r} R_{32} Y_2^{-1} \chi_+ + \frac{1}{r} R_{32} Y_2^0 \chi_-\right)$$

Μεθοδικά, απλά & κατανοητά...

Λόγω ορθοκανονικότητας των Y_l^m και X είναι $\int Y_l^{m*} Y_l^m \, d\Omega = 1$,

$\int Y_l^{m*} Y_{l'}^{m'} \, d\Omega = 0$ και $X_+^\dagger X_+ = 1$, $X_-^\dagger X_- = 1$, $X_+^\dagger X_- = 0$, $X_-^\dagger X_+ = 0$

η τελευταία γίνεται:

$$\langle V \rangle = -\left[\sqrt{2}\sqrt{2}\left(R_{32}, \frac{R_{32}}{r}\right) + \left(R_{32}, \frac{R_{32}}{r}\right)\right] = -3\left(R_{32}, \frac{R_{32}}{r}\right) =$$

$$= -3\int_0^\infty R_{32}^* \frac{R_{32}}{r} r^2 dr = -3\int_0^\infty |R_{32}|^2 r \, dr \quad (1)$$

-10-

όπου $R_{32} = \dfrac{4Z^{7/2}}{81\sqrt{30}} r^2 e^{-Zr/3} = \dfrac{4 \cdot 3^{7/2}}{81\sqrt{30}} r^2 e^{-\cancel{3}r/\cancel{3}}$

οπότε η (1) γίνεται:

$$\langle V \rangle = -\cancel{3} \cdot \frac{16 \cdot 3^7}{81^2 \cdot \cancel{30}_{10}} \int_0^\infty r^5 e^{-2r} dr = \cdots \quad \boxed{\int_0^\infty x^n e^{-\lambda x} dx = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}}$$

$$= -\frac{34992}{65610} \cdot \frac{5!}{2^6} = -0{,}533 \cdot \frac{120}{64} = -\frac{64}{64} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\langle V \rangle = -1 \text{ A.U.}}$$

γ) Ο κβαντικός αριθμός της ολικής στροφορμής είναι:

$$|l-s| \leq j \leq l+s$$

Οπότε για την ιδιοκατάσταση $l=2$, $s=\frac{1}{2}$ (Y_2^{-1} ή Y_2^{0}) είναι:

$$\left|2-\frac{1}{2}\right| \leq j \leq 2+\frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2} \leq j \leq \frac{5}{2} \quad \text{δηλαδή } j=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$$

Επειδή η εξίσωση ιδιοτιμών του μέτρου της ολικής στροφορμής είναι $J^2 = \hbar^2 j(j+1)$ τα πιθανά ενδεχόμενα σε μια μέτρηση του J^2 είναι:

- Για $j=\frac{3}{2}$: $J^2 = \hbar^2 \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) \rightarrow \boxed{J^2 = \frac{15}{4}\hbar^2}$

- Για $j=\frac{5}{2}$: $J^2 = \hbar^2 \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}+1\right) \rightarrow \boxed{J^2 = \frac{35}{4}\hbar^2}$ -11-

Η προβολή της ολικής στροφορμής στον άξονα z δίνεται από τη σχέση

$$J_z = L_z + S_z = \hbar m_l + \hbar m_s \rightarrow J_z = \hbar(m_l + m_s)$$

Άρα τα πιθανά ενδεχόμενα σε μια μέτρηση του J_z είναι:

- Για $m_l=-1$, $m_s=+\frac{1}{2}$: $J_z = \hbar\left(-1+\frac{1}{2}\right) \rightarrow \boxed{J_z = -\frac{\hbar}{2}}$

- Για $m_l=0$, $m_s=-\frac{1}{2}$: $J_z = \hbar\left(0-\frac{1}{2}\right) \rightarrow \boxed{J_z = -\frac{\hbar}{2}}$

www.pmoiras.weebly.com panmoiras@gmail.com 6932 946778

δ) Η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο με σπιν κάτω (δηλ. χ_-) και σε γωνίες $\theta > \frac{\pi}{3}$ είναι:

$$\Pi = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 \int_0^\infty r^2 |R_{32}|^2 dr \int_{\pi/3}^{\pi} Y_2^{0*} Y_2^0 \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (2)$$

όπου λόγω κανονικοποίησης του ακτινικού μέρους: $\int_0^\infty r^2 |R_{32}|^2 dr = 1$

και $Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right)$

Επομένως η (2) γίνεται:

$$\Pi = \frac{1}{3}\,\frac{5}{16\cancel{\pi}} \int_{\pi/3}^{\pi} \left(3\cos^2\theta - 1\right)^2 \sin\theta \, d\theta \cdot 2\cancel{\pi} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Pi = \frac{5}{24} \int_{\pi/3}^{\pi} \left(9\cos^4\theta + 1 - 6\cos^2\theta\right)\left[-d(\cos\theta)\right] =$$ -12-

$$= -\frac{5}{24}\left[\frac{9\cos^5\theta}{5} + \cos\theta - \frac{6\cos^3\theta}{3}\right]_{\pi/3}^{\pi} =$$

$$= -\frac{5}{24}\left[\frac{9}{5}\left(\cos^5\pi - \cos^5\frac{\pi}{3}\right) + \cos\pi - \cos\frac{\pi}{3} - 2\left(\cos^3\pi - \cos^3\frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= -\frac{5}{24}\left[\frac{9}{5}\left(-1 - 0{,}031\right) - 1 - 0{,}5 - 2\left(-1 - 0{,}125\right)\right] =$$

$$= -\frac{5}{24}\left[\frac{9}{5}(-1{,}031) - 1{,}5 - 2\cdot(-1{,}125)\right] =$$

$$= -\frac{5}{24}\left(-1{,}856 - 1{,}5 + 2{,}25\right) = -\frac{5}{24}\cdot(-1{,}106) = \frac{5{,}53}{24} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\Pi = 0{,}23 \text{ ή } 23\%}$$