Τυπολόγιο Κυματικής – Οπτικής (ΦΥΕ 34)

ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Αρχικά σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα και εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton για το κάθε σώμα ξεχωριστά, έτσι ώστε να προκύψουν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

Ιδιοσυχνότητες Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης

Θέτουμε $x_1 = Ae^{i\omega t}$ **με** $\ddot{x}_1 = -A\omega^2 e^{i\omega t}$

Θέτουμε $x_2 = Be^{i\omega t}$ **με** $\ddot{x}_2 = -B\omega^2 e^{i\omega t}$

Και αντικαθιστώ στις διαφορικές εξισώσεις κίνησης σχηματίζοντας το ομογενές σύστημα της μορφής $[\kappa\alpha\tau\iota \cdot A + \kappa\alpha\tau\iota \cdot B = 0]$

Οι μη μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος λαμβάνονται με μηδενισμό της ορίζουσας των συντελεστών Α και Β απ' όπου προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες ω_1 και ω_2

Λόγοι των Πλατών

Αντικαθιστούμε την κάθε ιδιοσυχνότητα που έχουμε βρει σε μία από τις εξισώσεις των πλατών $[\kappa\alpha\tau\iota \cdot A + \kappa\alpha\tau\iota \cdot B = 0]$

Απομακρύνσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$
$$x_2(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Από τις σχέσεις των λόγων των πλατών, αντικαθιστούμε τα B_1 & B_2 συναρτήσει των A_1 & A_2 στην $x_2(t)$

Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Εξωτερική Δύναμη της Μορφής $\boxed{F(t) = f_0 \genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(\omega t)}$

Όταν σε κάποιο σώμα του συστήματος ασκείται μια εξωτερική δύναμη, τότε κατά την διαδικασία σχεδιασμού των δυνάμεων, συνυπολογίζουμε και την εξωτερική δύναμη <u>μόνο</u> στο σώμα που ασκείται. Έπειτα εφαρμόζουμε τον 2ο νόμο του Newton για το κάθε σώμα ξεχωριστά, έτσι ώστε να προκύψουν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

Απομακρύνσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$

Η μερική λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (Εξαναγκασμένες Μετατοπίσεις x_1 & x_2) καθορίζονται απ' τη μορφή της εξωτερικής δύναμης, δηλαδή:

$$x_1(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$
$$x_2(t) = \Gamma\sin(\omega t) + \Delta\cos(\omega t)$$

Με $\ddot{x}_1(t) = -\omega^2[A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)] = -\omega^2 x_1(t)$

$\ddot{x}_2(t) = -\omega^2[\Gamma\sin(\omega t) + \Delta\cos(\omega t)] = -\omega^2 x_2(t)$

Αντικαθιστούμε τα $\ddot{x}_1$ & $\ddot{x}_2$ στις διαφορικές εξισώσεις κίνησης και προκύπτουν δύο εξισώσεις ως προς x_1 & x_2 από τις οποίες υπολογίζουμε τα x_1 & x_2

ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Κυματική Εξίσωση σε μια Διάσταση

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad v \text{ η ταχύτητα διάδοσης}$$

Οδεύοντα Αρμονικά Κύματα

$$y(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t + \varphi)\begin{cases} +(\text{Διάδοση στα αρνητικά } x) \\ -(\text{Διάδοση στα θετικά } x)\end{cases}$$

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Κυμάτων

Εγκάρσια Ταχύτητα: $u_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\boxed{\omega A}\cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

$\boxed{\omega A} = u_{max}$

Εγκάρσια Επιτάχυνση: $\alpha_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\boxed{\omega^2 A}\cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

$\boxed{\omega^2 A} = \alpha_{max}$

Ταχύτητα Κύματος Χορδής: $u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{\text{Ταση της Χορδης}}{\text{Γραμμικη Πικνοτητα Μαζας}}}$

Φασική Ταχύτητα: $u_p = \frac{\omega}{k}$ **με** $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ **και** $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

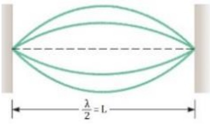
Ταχύτητα Ομάδας: $u_g = \frac{d\omega}{dk}$

Στάσιμα Κύματα

$$y(x,t) = A\sin(kx + \omega t) + A\sin(kx - \omega t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

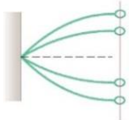
ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ ΧΟΡΔΗΣ

Πακτωμένη Χορδή



$\boxed{f_n = \frac{nv}{2L}}$ $n = 1,2,3,\ldots$ **και** $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

Χορδή με ένα Ελεύθερο Άκρο



$\boxed{f_n = (2n-1)\frac{v}{4L}}$ $n = 1,2,3,\ldots$ **και** $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

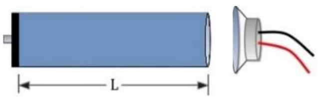
ΗΧΗΤΙΚΟΙ ΣΩΛΗΝΕΣ

Αυλός με Ανοιχτά Άκρα

$\boxed{f_n = \frac{nv}{2L}}$ $n = 1,2,\ldots$

Όπου v είναι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα

Αυλός με Κλειστό & Ανοιχτό Άκρο



$\boxed{f_n = (2n-1)\frac{v}{4L}}$ $n = 1,2,\ldots$

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Εξισώσεις Maxwell στο Κενό

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 && \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ &\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} && \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned}}$$

Όταν έχω το $\vec{E}$ και ζητάω το $\vec{B}$: $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

Όταν έχω το $\vec{B}$ και ζητάω το $\vec{E}$: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Χαρακτηριστικά Μεγέθη Η/Μ Κυμάτων

Διάνυσμα Poynting: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}\left(\frac{W}{m^2}\right)$ **με** $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

Ένταση Ακτινοβολίας: $I = \langle|\vec{S}|\rangle = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E^2$

Μέση χρονική τιμή: $\langle f(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$

$\langle\sin(kx \pm \omega t)\rangle = \langle\cos(kx \pm \omega t)\rangle = \langle\sin(\omega t)\rangle = \langle\cos(\omega t)\rangle = 0$

$\langle\sin^2(kx \pm \omega t)\rangle = \langle\cos^2(kx \pm \omega t)\rangle = \frac{1}{2}$ **και** $\langle C\rangle = C$

Δείκτης Διάθλασης: $n = c/v = ck/\omega$

Επίπεδα Οδεύοντα Αρμονικά

$$\vec{E} = E_o\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(kz \pm \omega t)\hat{\imath}$$
$$\vec{B} = B_o\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(kz \pm \omega t)\hat{\jmath}$$

Στάσιμα

$$\vec{E} = E_o\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(kz)\cdot\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(\omega t)\hat{\imath}$$
$$\vec{B} = B_o\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(kz)\cdot\genfrac{}{}{0pt}{}{\sin}{\cos}(\omega t)\hat{\jmath}$$

Πόλωση Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων

Εάν $\vec{E} = E_x\,\hat{\imath} + E_y\,\hat{\jmath}$ τότε έχουμε:

1ον Γραμμική Πόλωση όταν $\frac{E_y}{E_x} = \text{Σταθερό}$ **με** $\theta = tan^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right)$

2ον Κυκλική Πόλωση όταν $E_x^2 + E_y^2 = \text{Σταθερό}$

3ον Ελλειπτική Πόλωση όταν $\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1$

Για τον 2ο και 3ο τύπο πολώσεως, ελέγχουμε <u>πάντα</u> την κατεύθυνση του $\vec{E}$ για διαφορετικές τιμές του t με σκοπό να καθορίσουμε την φορά της πόλωσης (Δεξιόστροφη ή Αριστερόστροφη).

Παραδείγματος Χάριν $\boxed{\vec{E}(0,0),\quad \vec{E}(0,\pi/2\omega),\quad \vec{E}(0,\pi/\omega)\ldots.}$

Τύπος Euler για Μιγαδικό Πεδίο $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$