☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

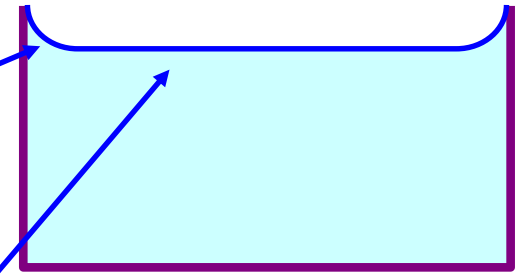
ΤΡΙΧΟΕΙΔΗ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ
ΘΕΩΡΙΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Περιεχόμενα

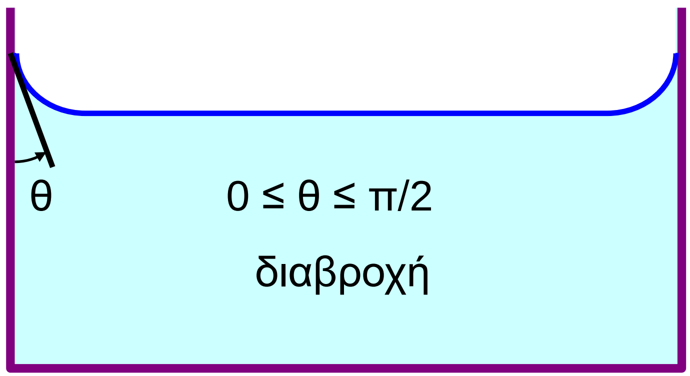
1. Τριχοειδή φαινόμενα

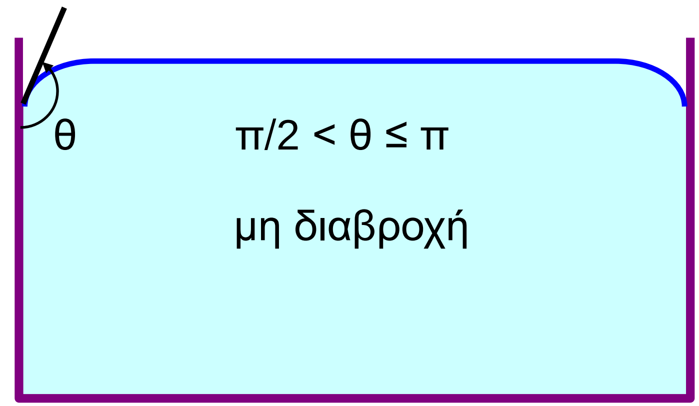
Κοντά στα τοιχώματα του δοχείου η επιφάνεια του υγρού είναι καμπύλη, διότι εκεί σημαντικό ρόλο παίζουν οι δυνάμεις συνάφειας, δηλαδή οι δυνάμεις μεταξύ των μορίων του υγρού και των μορίων του στερεού.

Η υπόλοιπη επιφάνεια είναι επίπεδη γιατί κυριαρχεί η δύναμη της βαρύτητας.



Περίπτωση διαβροχής

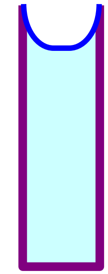




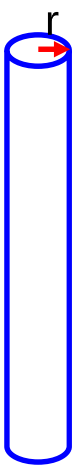
Η γωνία θ ονομάζεται **γωνία συνεπαφής**.

• Όταν η επιφάνεια του υγρού κοντά στα τοιχώματα του δοχείου καμπυλώνεται προς τα πάνω (**κοίλη**), όπως στην περίπτωση νερού – γυαλιού, η γωνία θ είναι μικρότερη των 90^o και θα λέμε ότι το υγρό διαβρέχει την επιφάνεια του στερεού, δηλαδή έχουμε **διαβροχή**.

• Όταν η επιφάνεια του υγρού κοντά στα τοιχώματα του δοχείου καμπυλώνεται προς τα κάτω (**κυρτή**), όπως στην υδραργύρου – γυαλιού, η γωνία θ είναι μεγαλύτερη των 90^o και θα λέμε ότι το υγρό δεν διαβρέχει την επιφάνεια του στερεού, δηλαδή έχουμε **μη διαβροχή**.



Στην περίπτωση, όμως, ενός λεπτού σωλήνα (ακτίνα σωλήνα r συγκρίσιμη με ακτίνα καμπυλότητας υγρού r_o), τα τοιχώματα θα επιδρούν σε όλη την έκταση του υγρού και συνεπώς όλη η επιφάνεια του θα είναι καμπύλη.



Οι σωλήνες στους οποίους τα τοιχώματα επιδρούν σε όλη την έκταση του υγρού ονομάζονται **τριχοειδείς**.

Η επιφανειακή τάση προκαλεί **ανύψωση** (στην περίπτωση της διαβροχής) ή **ταπείνωση** (στην περίπτωση της μη διαβροχής) του υγρού σε ένα στενό σωλήνα (τριχοειδή) και τα φαινόμενα αυτά ονομάζονται **τριχοειδή**.

Βασική Αρχή της Υδροστατικής

Όλα τα σημεία ενός υγρού που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο έχουν την ίδια πίεση (υγρό που ισορροπεί).

Εξίσωση Laplace εφαρμογή σε τριχοειδή φαινόμενα

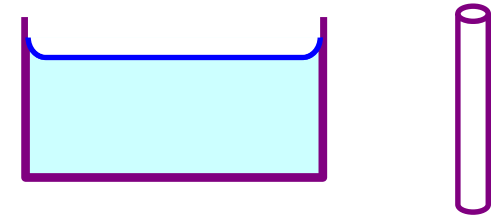
$$\Delta P_L = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Όταν το κέντρο της ακτίνας καμπυλότητας βρίσκεται εσωτερικά του υγρού θα θεωρούμε την ακτίνα καμπυλότητας αρνητική, αντίθετα όταν βρίσκεται εξωτερικά θετική, για τα τριχοειδή φαινόμενα.

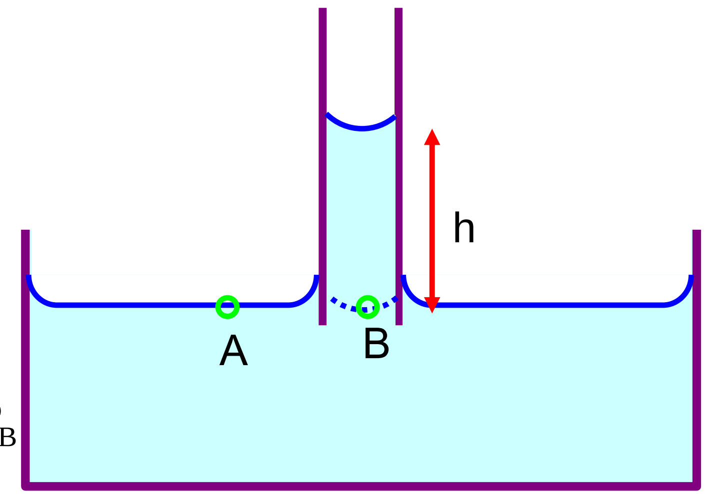
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Περίπτωση 1 διαβροχής

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα δοχείο με (διαβρέχον) υγρό και έναν τριχοειδή σωλήνα ακτίνας r.



Βυθίζουμε ένα μικρό μέρος του τριχοειδή σωλήνα στο υγρό.
Επειδή ο σωλήνας είναι τριχοειδής η επίπεδη επιφάνεια του υγρού καμπυλώνει (ακτίνα καμπυλότητας r_o).
Αυτό, όμως θα έχει ως αποτέλεσμα να υπάρχει μία πρόσθετη πίεση Laplace $\Delta P_L = 2\sigma/r_o$.
Και τελικά παρατηρούμε ανύψωση της στάθμης του υγρού.



Με βάση την υδροστατική αρχή θα πρέπει να ισχύει: $P_A = P_B$ όμως:

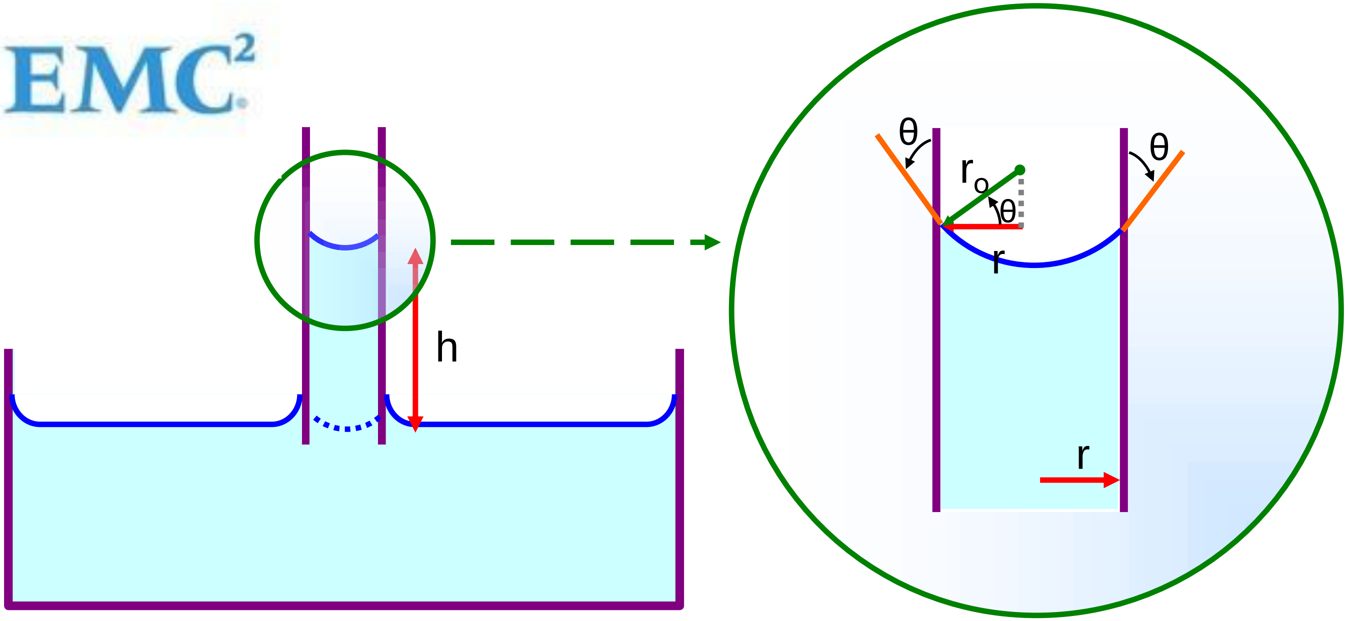
$$\left\{\begin{aligned} P_A &= P_{\alpha\tau\mu} \\ P_B &= P_{\alpha\tau\mu} + P_{\upsilon\delta\rho o} - \Delta P_L \end{aligned}\right. \Rightarrow \Delta P_L = P_{\upsilon\delta\rho o\sigma.}$$

Άρα, το υγρό θα ανέρθει μέχρις ενός ύψους ισορροπίας h έτσι ώστε η υδροστατική πίεση ρgh της στήλης του υγρού να εξισωθεί με την πίεση Laplace.

$$\Delta P_L = P_{\upsilon\delta\rho o\sigma.} \Rightarrow \frac{2\sigma}{r_o} = \rho g h \Rightarrow \boxed{h = \frac{2\sigma}{\rho g r_o}}$$

Παρατήρηση: η καμπυλωμένη επιφάνεια του υγρού ονομάζεται **μηνίσκος**.

Επιλέξαμε αυτό το πρόσημο διότι το κέντρο της ακτίνας καμπυλότητας του μηνίσκου είναι εξωτερικά του υγρού, όταν έχουμε διαβροχή σε τριχοειδή φαινόμενο θα λαμβάνουμε αυτό το πρόσημο.



$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r_o}$$

$$\cos\theta = \frac{r}{r_o}$$

Ακτίνα τριχοειδή σωλήνα

Ακτίνα καμπυλότητας υγρού

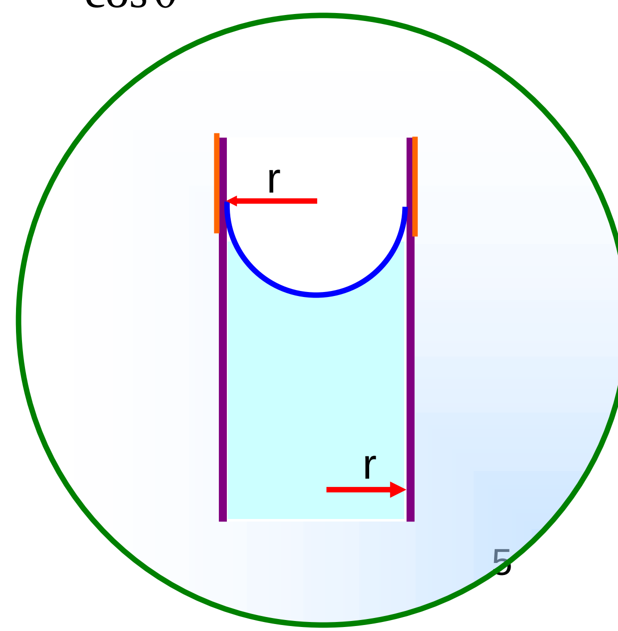
$$\Rightarrow \; r_o = \frac{r}{\cos\theta}$$

Το ύψος που θα ανέλθει το υγρό θα είναι:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r_o} = \frac{2\sigma}{\rho g r}\cos\theta$$

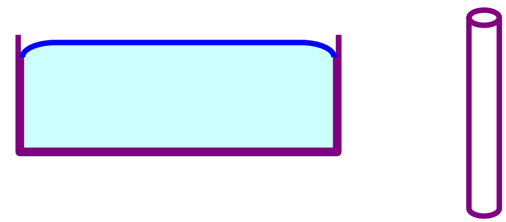
Στην περίπτωση της πλήρους διαβροχής θ = 0 η καμπύλη του υγρού θα είναι ένα ημισφαίριο, ενώ:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$$



☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Περίπτωση 2 μη διαβροχής



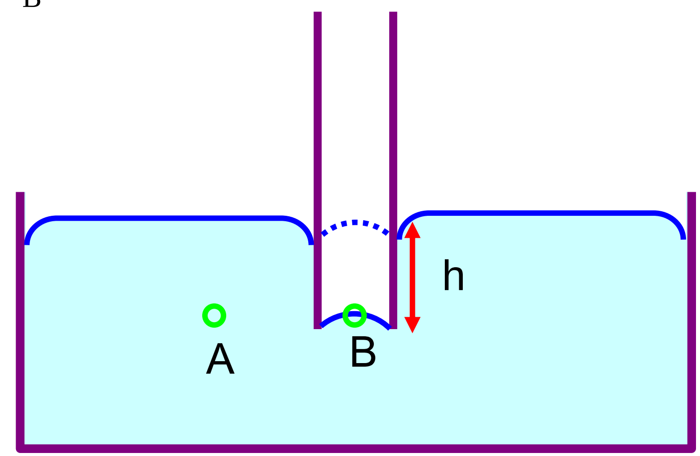
Στην περίπτωση της μη διαβροχής, τα αποτέλεσμα μας είναι τα ίδια.

Σε αυτή την περίπτωση όμως έχουμε ταπείνωση της στάθμης του υγρού

Με βάση την υδροστατική αρχή θα πρέπει να ισχύει: $P_A = P_B$
όμως:

$$\begin{cases} P_A = P_{\alpha\tau\mu} + P_{\upsilon\delta\rho o} \\ P_B = P_{\alpha\tau\mu} + \Delta P_L \end{cases} \Rightarrow \qquad \Delta P_L = P_{\upsilon\delta\rho o\sigma.}$$

Επιλέξαμε αυτό το πρόσημο διότι το κέντρο της ακτίνας καμπυλότητας του μηνίσκου είναι εσωτερικά του υγρού, όταν έχουμε μη διαβροχή σε τριχοειδή φαινόμενο θα λαμβάνουμε αυτό το πρόσημο.



Το βάθος που θα κατέλθει το υγρό θα είναι:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r_o} = \frac{2\sigma}{\rho g r}\cos\theta$$

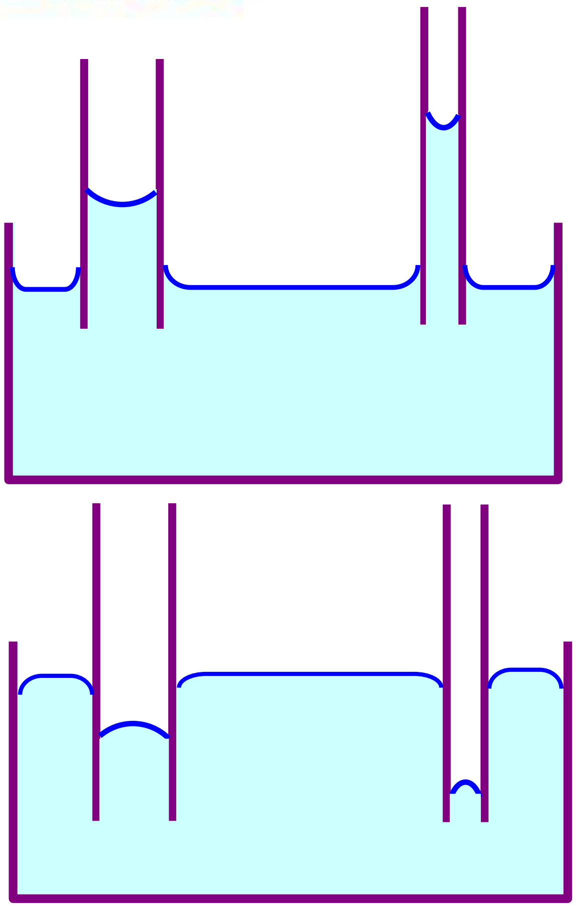
Στην περίπτωση της πλήρους μη διαβροχής θ = π η καμπύλη του υγρού θα είναι ένα ημισφαίριο, ενώ:

$$h = -\frac{2\sigma}{\rho g r}$$

Εδώ πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι $\sigma < 0$

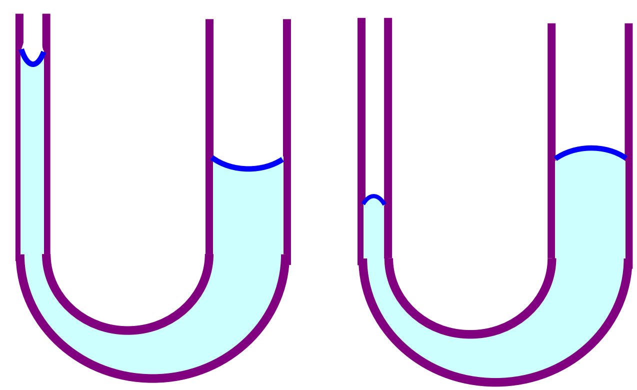
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

2. Συμπεριφορά υγρού μέσα σε τριχοειδή σωλήνα



Τα τριχοειδή φαινόμενα παρατηρήθηκαν από λεπτούς σωλήνες, η οποίοι προκαλούν μεταβολή του ύψους της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού. Σε πρώτη ματιά φάνηκε να αντιτίθεται στους νόμους της Υδροστατικής. Εξηγήθηκε και ήρθε σε συμφωνία, όμως με αυτήν. Η ανύψωση η ταπείνωση του υγρού συμβαίνει, διότι δυνάμεις συνοχής των μορίων του υγρού είναι μικρότερες (ή μεγαλύτερες) από τις δυνάμεις συνάφειας μεταξύ των μορίων του υγρού και τα μόρια του σωλήνα. Όταν το υγρό διαβρέχει το σωλήνα, σχηματίζει κοίλο μηνίσκο και ανέρχεται, ενώ όταν δεν δια[illegible]ι κυρτό μηνίσκο και κατέρχεται.

Επίσης, σε σύστημα συγκοινωνούντων τριχοειδών σωλήνων, αν ρίξουμε υγρό μέσα σε αυτό, η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού δεν βρίσκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο στους δύο σωλήνες.

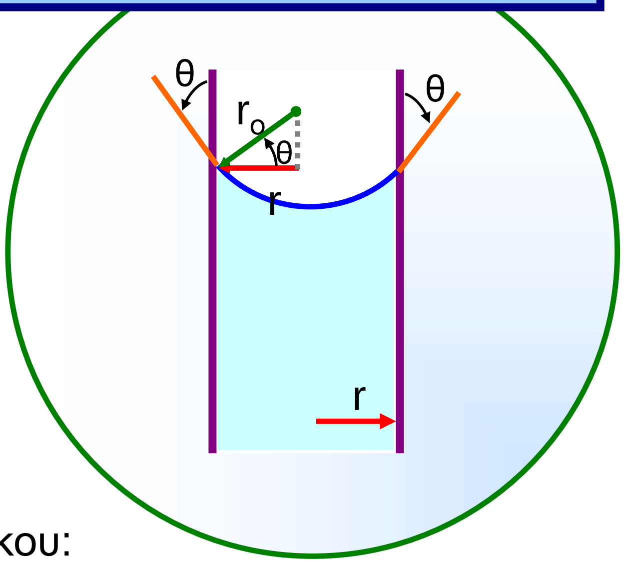


☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

3. Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1

Σε δοχείο με νερό βυθίζουμε τριχοειδή σωλήνα, η εσωτερική διάμετρος του οποίου είναι d = 1mm. Το υγρό ανέρχεται μέσα στο τριχοειδή σωλήνα σε ύψος h = 2.8 cm. Υπολογίστε την ακτίνα καμπυλότητας του μηνίσκου. Πόσο θα ήταν το ύψος αν είχαμε πλήρη διαβροχή. Δίνονται ρ = 10^3kg/m^3, σ = 0.073 N/m.



Το υγρό θα ανέρθει μέχρις ενός ύψους ισορροπίας h έτσι ώστε η υδροστατική πίεση ρgh της στήλης του υγρού να εξισωθεί με την πίεση Laplace.

$$\Delta P_L = P_{\upsilon\delta\rho o\sigma.} \Rightarrow \frac{2\sigma}{r_o} = \rho g h \Rightarrow \boxed{r_o = \frac{2\sigma}{\rho g h}}$$

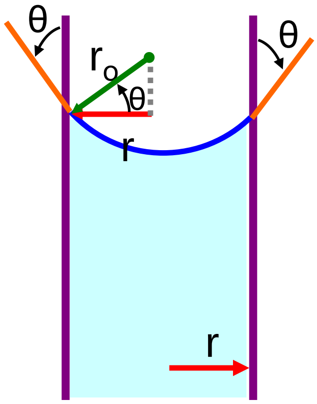
Αντικαθιστώντας βρίσκουμε την ακτίνα καμπυλότητας του μηνίσκου:

$$r_o = \frac{2 \cdot 0.073 \frac{N}{m}}{10^3 kg \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 2.8 \cdot 10^{-2} m} = 5.1 \cdot 10^{-4} m = 0.5mm$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Η σχέση που συνδέει την ακτίνα καμπυλότητας με την ακτίνα του τριχοειδή σωλήνα είναι:

$$\cos\theta = \frac{r}{r_o} \qquad \frac{\text{Ακτίνα τριχοειδή σωλήνα}}{\text{Ακτίνα καμπυλότητας υγρού}} \qquad \Rightarrow \ r_o = \frac{r}{\cos\theta} = \frac{d}{2\cos\theta}$$



Το ύψος που θα ανέλθει το υγρό θα είναι: $h = \frac{2\sigma}{\rho g r_o} = \frac{4\sigma}{\rho g d}\cos\theta$

Στην περίπτωση της πλήρους διαβροχής θ = 0 η καμπύλη του υγρού θα είναι ένα ημισφαίριο, ενώ:

$$\boxed{h = \frac{4\sigma}{\rho g d}}$$

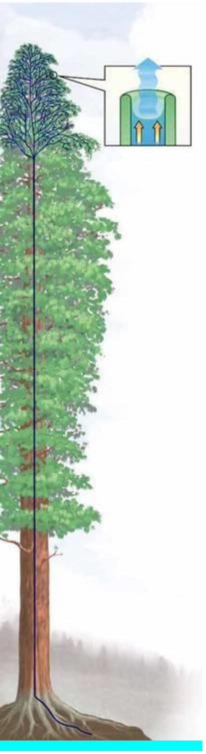
Αντικαθιστώντας βρίσκουμε το ύψος στην πλήρη διαβροχή:

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g d} = \frac{4\cdot 0.073\frac{N}{m}}{10^3 kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 10^{-3} m} = 2.92cm$$

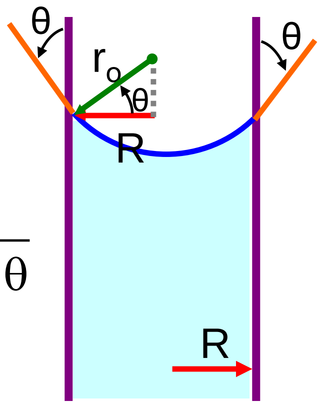
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένας τύπος δένδρου της οικογενείας Σεκόγια φτάνει σε ύψος 120 m. ΑΝ και ο μηχανισμός της ανόδου των χυμών από τη ρίζα του, που είναι 30 m κάτω από το έδαφος, είναι διαφορετικός (δυναμικός) υποθέστε ότι αυτή οφείλεται αποκλειστικά σε τριχοειδή φαινόμενα. Υπολογίστε την ακτίνα R του τριχοειδούς σωλήνα σε nm ώστε να φτάνουν οι χυμοί από το άκρο της ρίζας στο ανώτατο ύψος. Δίδονται για το χυμό που ανέρχεται η επιφανειακή του τάση σ = 0.09N/m, η πυκνότητα $\rho = 1{,}2\cdot10^3 Kg/m^3$, το $g = 10m/s^2$ και η γωνία συνεπαφής $\theta = 60^o$.



Το υγρό θα ανέρθει μέχρις ενός ύψους ισορροπίας h έτσι ώστε η υδροστατική πίεση ρgh της στήλης του υγρού να εξισωθεί με την πίεση Laplace.



$$\Delta P_L = P_{υδροσ.} \Rightarrow \quad \frac{2\sigma}{r_o} = \rho g h \Rightarrow r_o = \frac{2\sigma}{\rho g h} \Rightarrow$$

$$r_o = \frac{R}{\cos\theta}$$

$$\boxed{R = \frac{2\sigma}{\rho g h}\cos\theta}$$

Όπου h είναι το συνολικό μήκος του δέντρου

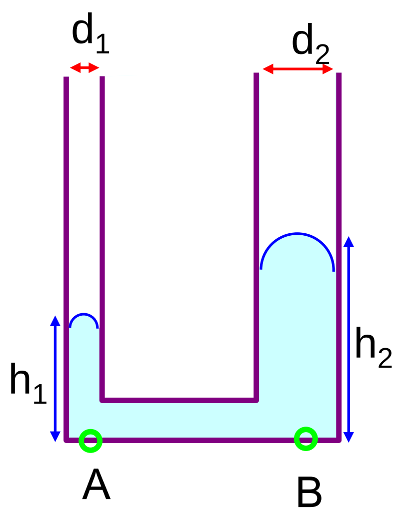
Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$R = \frac{2\cdot 0.09\dfrac{N}{m}}{1.2\cdot10^3\dfrac{Kg}{m^3}\cdot 10\dfrac{m}{s^2}\cdot 150m}\cos 60 = 5\cdot10^{-8}m = 50nm$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 3

Υπολογίστε τη διαφορά υψών σε δύο συγκοινωνούντες τριχοειδής σωλήνες, οι εσωτερικές διάμετροι των οποίων είναι d_1 = 1 mm και d_2 = 2 mm, για υδράργυρο με σ = 0.5 N/m. Θεωρήστε ότι έχουμε πλήρη μη διαβροχή. $\rho = 13.6 \cdot 10^3$ kg/m^3



Αφού έχουμε πλήρης μη διαβροχή η ακτίνα καμπυλότητας του μηνίσκου σε κάθε σωλήνα θα είναι ίσο με την ακτίνα του σωλήνα.

$$r_{o,1} = \frac{d_1}{2} \quad \text{και} \quad r_{o,2} = \frac{d_2}{2}$$

Λόγω της υδροστατικής αρχής στα σημεία Α και Β η πίεση πρέπει να είναι η ίδια, δηλαδή, $P_A = P_B$.

$$\begin{cases} P_A = P_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_1 + \Delta P_{L1} \\ P_B = P_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_2 + \Delta P_{L2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Delta P_{L1} = \frac{2\sigma}{r_{o,1}} = \frac{4\sigma}{d_1}$$

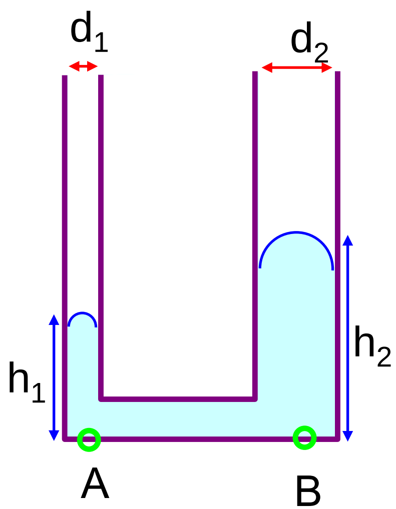
$$\Delta P_{L2} = \frac{2\sigma}{r_{o,2}} = \frac{4\sigma}{d_2}$$

$$\rho g h_1 + \Delta P_{L1} = \rho g h_2 + \Delta P_{L2} \Rightarrow \quad \rho g h_1 + \frac{4\sigma}{d_1} = \rho g h_2 + \frac{4\sigma}{d_1} \Rightarrow$$

$$h_2 - h_1 = \frac{4\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) > 0$$

Αυτό σημαίνει ότι όντως στο 2ο τριχοειδή σωλήνα το υγρό θα ανυψωθεί περισσότερο.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com



$$h_2 - h_1 = \frac{4\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) > 0$$

$d_1 = 1$ mm

$d_2 = 2$ mm

$\sigma = 0.5$ N/m

$\rho = 13.6 \cdot 10^3$ kg/m^3

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

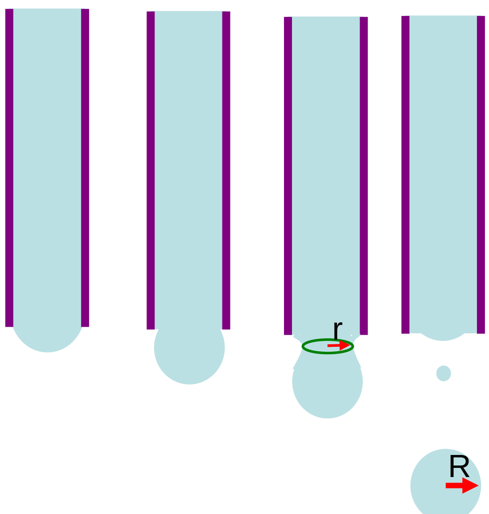
$$h_2 - h_1 = \frac{4 \cdot 0.5 \frac{N}{m} \sigma}{13.6 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{s^2}}\left(\frac{1}{10^{-3} m} - \frac{1}{2 \cdot 10^{-3} m}\right) \approx 7.4 mm$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 4

Υγρό πυκνότητας ρ και συντελεστή επιφανειακής τάσης σ, πέφτει με τη μορφή σταγόνων από σωλήνα διαμέτρου r. Αν θεωρήσετε τις σταγόνες σφαιρικές, υπολογίστε την ακτίνα τους συναρτήσει της ακτίνας του σωλήνα.

Στο σχήμα φαίνεται η διαδικασία δημιουργίας της σταγόνας.



Σταδιακά η δύναμη της βαρύτητας έλκει το υγρό προς τα κάτω μέχρι το υγρό έξω από τον σωλήνα να αποκτήσει ένα συγκεκριμένο μέγεθος, από την άλλη την διαδικασία αυτή όμως την εμποδίζουν οι δυνάμεις επιφανειακής τάσης.
Όταν οι δυνάμεις επιφανειακής τάσης εξισωθούν με τη δύναμη της βαρύτητας τότε η σταγόνα που δημιουργείται αποσπάται.
Λίγο πριν την αποκοπή δημιουργείται ένας λαιμός, όπου αν κι έχει μικρότερη ακτίνα από την ακτίνα του σωλήνα r θα θεωρήσουμε ότι είναι περίπου το ίδιες.
Την στιγμή της αποκοπής, η δύναμη της επιφανειακής τάσης που ασκείται στο λαιμό καμπύλης μήκους 2πr θα είναι ίση με τη δύναμη του βάρους της σταγόνας, δηλαδή θα ισχύει:

$$F_S = B \Rightarrow 2\pi r\sigma = mg \Rightarrow 2\pi r\sigma = \rho V g \Rightarrow 2\pi r\sigma = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \Rightarrow R^3 = \frac{3r\sigma}{2\rho g} \Rightarrow \boxed{R = \left(\frac{3r\sigma}{2\rho g}\right)^{1/3}}$$

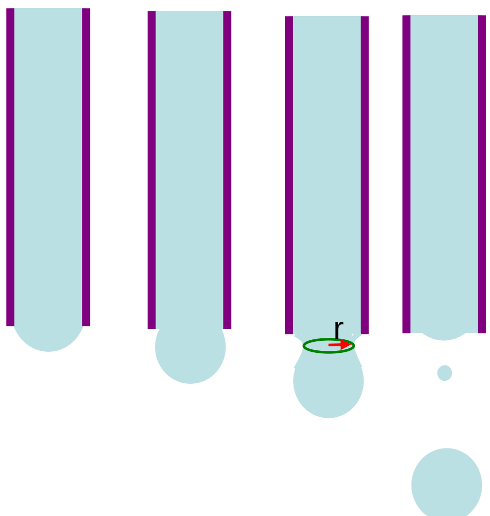
Παρατήρηση η σχέση είναι προσεγγιστική και η μέγαλη σταγόνα συνοδεύεται πάντα από μία μικρότερη

☎ 6932 946778

www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 5

Πετρέλαιο φεύγει από δοχείο μέσω κατακόρυφου σωλήνα με εσωτερική διάμετρο d = 1 mm. Οι σταγόνες αποσπώνται σε χρόνο Δτ = 1 s μία μετά την άλλη. Σε πόσο χρόνο τα θα διαφύγει μάζα m = 10 gr πετρελαίου; Δίνεται σ = 26 mN/m



Την στιγμή της αποκοπής, η δύναμη της επιφανειακής τάσης που ασκείται στο λαιμό καμπύλης μήκους 2πr θα είναι ίση με τη δύναμη του βάρους της σταγόνας, δηλαδή θα ισχύει:

$$F_S = B \Rightarrow 2\pi r\sigma = mg \Rightarrow m_{\sigma\tau\alpha\gamma\acute{o}\nu\alpha\varsigma} = \frac{2\pi r\sigma}{g} \Rightarrow m_{\sigma\tau\alpha\gamma\acute{o}\nu\alpha\varsigma} = \frac{d\pi\sigma}{g}$$

$$t = \frac{mg}{d\pi\sigma}$$

Σε 1 sec φεύγει μία σταγόνας μάζας $m_{\sigma\tau\alpha\gamma\acute{o}\nu\alpha\varsigma}$

Σε t sec φεύγει μάζα m

$$m_{\sigma\tau\alpha\gamma\acute{o}\nu\alpha\varsigma} t = m \quad \Rightarrow \quad t = \frac{m}{m_{\sigma\tau\alpha\gamma\acute{o}\nu\alpha\varsigma}}$$

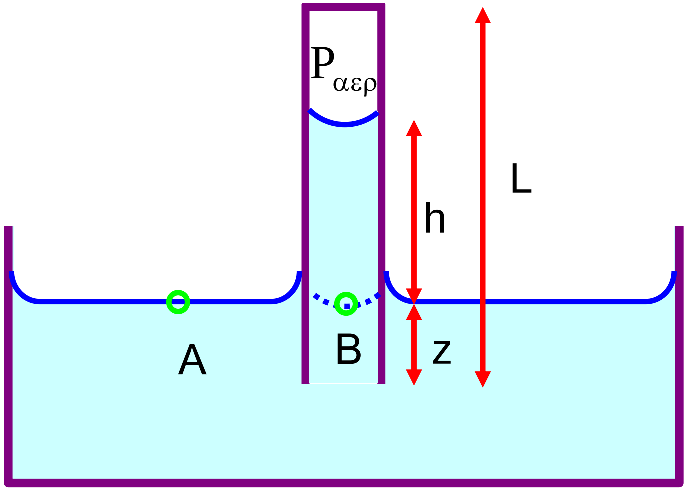
Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$t = \frac{10^{-2}\,\mathrm{Kgr}\cdot 10\,\frac{m}{s^2}}{10^{-3}\,m\pi 26 10^{-3}\,\frac{N}{m}} = 1224\,\mathrm{sec} \approx 20\,\mathrm{min}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 6

Τριχοειδής σωλήνας μήκους L και εσωτερικής ακτίνας r βυθίζεται κατακόρυφα στο νερό. Το επάνω άκρο του σωλήνα είναι κλειστό. Τι μήκος z πρέπει να βυθιστεί στο νερό, ώστε το επίπεδο του υγρού στον τριχοειδή να συμπίπτει με το επίπεδο του έξω από αυτόν;



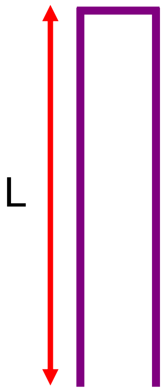
Έστω, ότι το υγρό ανέρχεται σε ύψος h. Εξισώνοντας τις πιέσεις στα σημεία A και B έχουμε:

$$\begin{cases} P_A = P_{\alpha\tau\mu} \\ P_B = P_{\alpha\varepsilon\rho} + \rho g h - \Delta P_L \end{cases}$$

Θεωρούμε, ότι έχουμε πλήρης διαβροχή, άρα η ακτίνα καμπυλότητας του υγρού θα είναι ίση με την ακτίνα του σωλήνα, δηλαδή $r_o = r$. Η πίεση Laplace θα είναι:

$$\Delta P_L = \frac{2\sigma}{r_o} = \frac{2\sigma}{\rho}$$

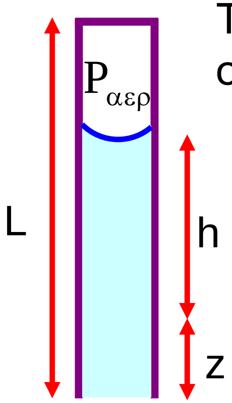
Από τα προηγούμενα θα έχουμε: $P_A = P_B \Rightarrow P_{\alpha\tau\mu} = P_{\alpha\varepsilon\rho} + \rho g h - \dfrac{2\sigma}{r}$ (1)



Αρχικά (πριν την βύθιση) στον τριχοειδή σωλήνα υπάρχει ατμοσφαιρικός αέρας έτσι θα ισχύει:

πίεση $P_{\alpha\varepsilon\rho}^{\text{ΑΡΧ}} = P_{\alpha\tau\mu}$

όγκος $V_{\alpha\varepsilon\rho}^{\text{ΑΡΧ}} = \pi r^2 L$



Τελικά (μετά την βύθιση) στον τριχοειδή σωλήνα ο ατμοσφαιρικός αέρας που υπάρχει συμπιέζεται έτσι θα ισχύει:

πίεση $P_{\alpha\varepsilon\rho}^{\text{ΤΕΛ}} = P_{\alpha\varepsilon\rho}$

όγκος $V_{\alpha\varepsilon\rho}^{\text{ΤΕΛ}} = \pi r^2 (L - h - z)$

Θεωρούμε ότι ο ατμοσφαιρικός αέρας είναι ιδανικό αέριο και ότι η μεταβολή αυτή έγινε υπό σταθερή θερμοκρασία, κατά συνέπεια :

$$P_{\alpha\varepsilon\rho}^{\text{ΑΡΧ}} V_{\alpha\varepsilon\rho}^{\text{ΑΡΧ}} = P_{\alpha\varepsilon\rho}^{\text{ΤΕΛ}} V_{\alpha\varepsilon\rho}^{\text{ΤΕΛ}} \Rightarrow P_{\alpha\tau\mu} \pi r^2 L = P_{\alpha\varepsilon\rho} \pi r^2 (L - h - z) \Rightarrow \boxed{P_{\alpha\varepsilon\rho} = P_{\alpha\tau\mu} \frac{L}{L - h - z}} \quad (2)$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Συγκεντρώνουμε τις δύο σχέσεις που βρήκαμε:

$$\left.\begin{aligned} P_{\alpha\tau\mu} &= P_{\alpha\varepsilon\rho} + \rho g h - \frac{2\sigma}{r} \\ P_{\alpha\varepsilon\rho} &= P_{\alpha\tau\mu}\frac{L}{L-h-z} \end{aligned}\right\} \quad P_{\alpha\tau\mu} = P_{\alpha\tau\mu}\frac{L}{L-h-z} + \rho g h - \frac{2\sigma}{r}$$

Εφόσον θέλουμε το επίπεδο της στάθμης στον τριχοειδή σωλήνα να συμπίπτει με την εξωτερική στάθμη (δηλαδή h = 0) προκύπτει:

$$P_{\alpha\tau\mu} = P_{\alpha\tau\mu}\frac{L}{L-z} - \frac{2\sigma}{r}$$

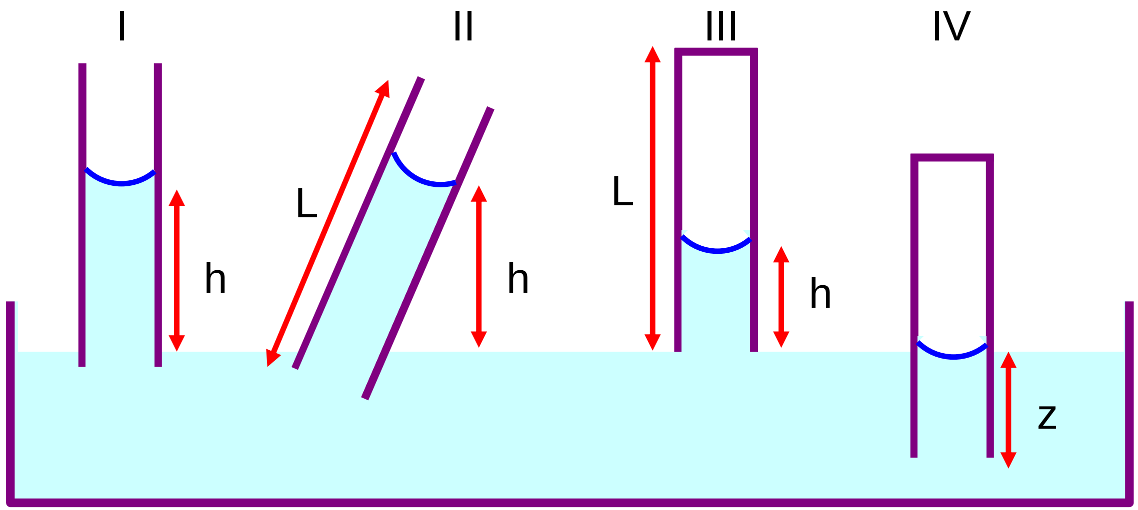
Το ζητούμενο είναι το βάθος βύθισης του τριχοειδούς σωλήνα z.

$$\Rightarrow \frac{L}{L-z} = 1 + \frac{4\sigma}{dP_{\alpha\tau\mu}} \Rightarrow L - z = \frac{L}{1+\frac{2\sigma}{rP_{\alpha\tau\mu}}} \Rightarrow z = L - \frac{L}{1+\frac{2\sigma}{rP_{\alpha\tau\mu}}} \Rightarrow z = \frac{L\frac{2\sigma}{rP_{\alpha\tau\mu}}}{1+\frac{2\sigma}{rP_{\alpha\tau\mu}}} \Rightarrow$$

$$\boxed{z = \frac{L}{1+\frac{rP_{\alpha\tau\mu}}{2\sigma}}}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Παρατηρήσεις



Περίπτωση I

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{r_o}$$

Περίπτωση II

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{r_o}$$

Αν εκτρέψουμε το σωλήνα από την κατακόρυφο, το κατακόρυφο ύψος h δεν θα μεταβληθεί

Περίπτωση III

$$P_{\alpha\tau\mu} = P_{\alpha\varepsilon\rho} + \rho gh - \frac{2\sigma}{r_o}$$

$$P_{\alpha\varepsilon\rho} V_{\alpha\varepsilon\rho}^{TE\Lambda} = P_{\alpha\tau\mu} V_{\alpha\varepsilon\rho}^{APX}$$

$$V_{\alpha\varepsilon\rho}^{APX} = \pi r^2 L$$

$$V_{\alpha\varepsilon\rho}^{TE\Lambda} = \pi r^2 (L - h)$$

Περίπτωση IV

$$P_{\alpha\tau\mu} = P_{\alpha\varepsilon\rho} - \frac{2\sigma}{r_o}$$

$$P_{\alpha\varepsilon\rho} V_{\alpha\varepsilon\rho}^{TE\Lambda} = P_{\alpha\tau\mu} V_{\alpha\varepsilon\rho}^{APX}$$

$$V_{\alpha\varepsilon\rho}^{APX} = \pi r^2 L$$

$$V_{\alpha\varepsilon\rho}^{TE\Lambda} = \pi r^2 (L - z)$$

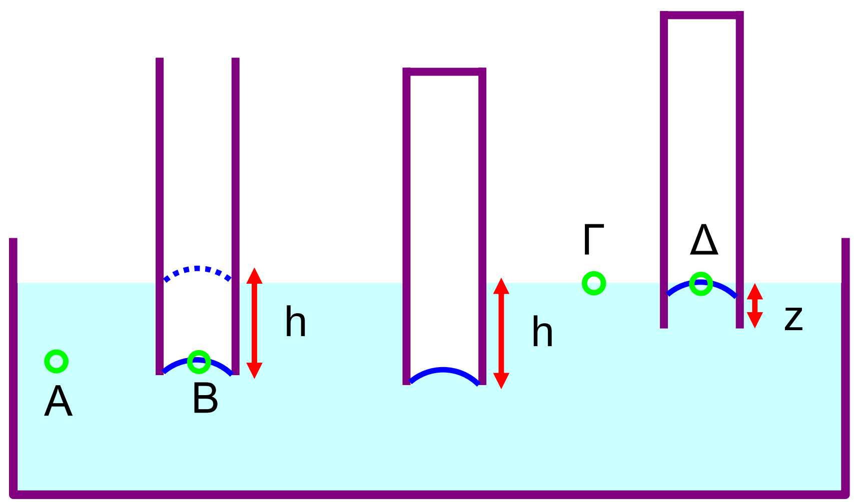
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται τριχοειδής σωλήνας ακτίνας r ανοικτός και στα δύο άκρα του, ο οποίος φέρεται κατακόρυφα στην επιφάνεια υγρού που **δεν διαβρέχει** το σωλήνα και έχει γωνία συνεπαφής θ με τα τοιχώματά του και βρίσκεται σε δοχείο μεγάλων διαστάσεων.

i) Υπολογίστε τη μεταβολή του ύψους στο εσωτερικό του σωλήνα ως προς το επίπεδο της στάθμης του δοχείου.

ii) Στη συνέχεια φράζουμε το άνω άκρο του σωλήνα και τον ανασύρουμε μέχρις ότου το επίπεδο στο εσωτερικό του σωλήνα εξισωθεί με το επίπεδο της στάθμης στο δοχείο. Εξηγείστε γιατί κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί με ανάσυρση και υπολογίστε **πόσο πρέπει να ανυψωθεί ο σωλήνας** για να εξισωθούν οι δύο στάθμες. Θεωρείστε τον αέρα ιδανικό αέριο και τη μεταβολή ισόθερμη. Δίνεται η επιφανειακή τάση του υγρού σ και η πυκνότητά του ρ

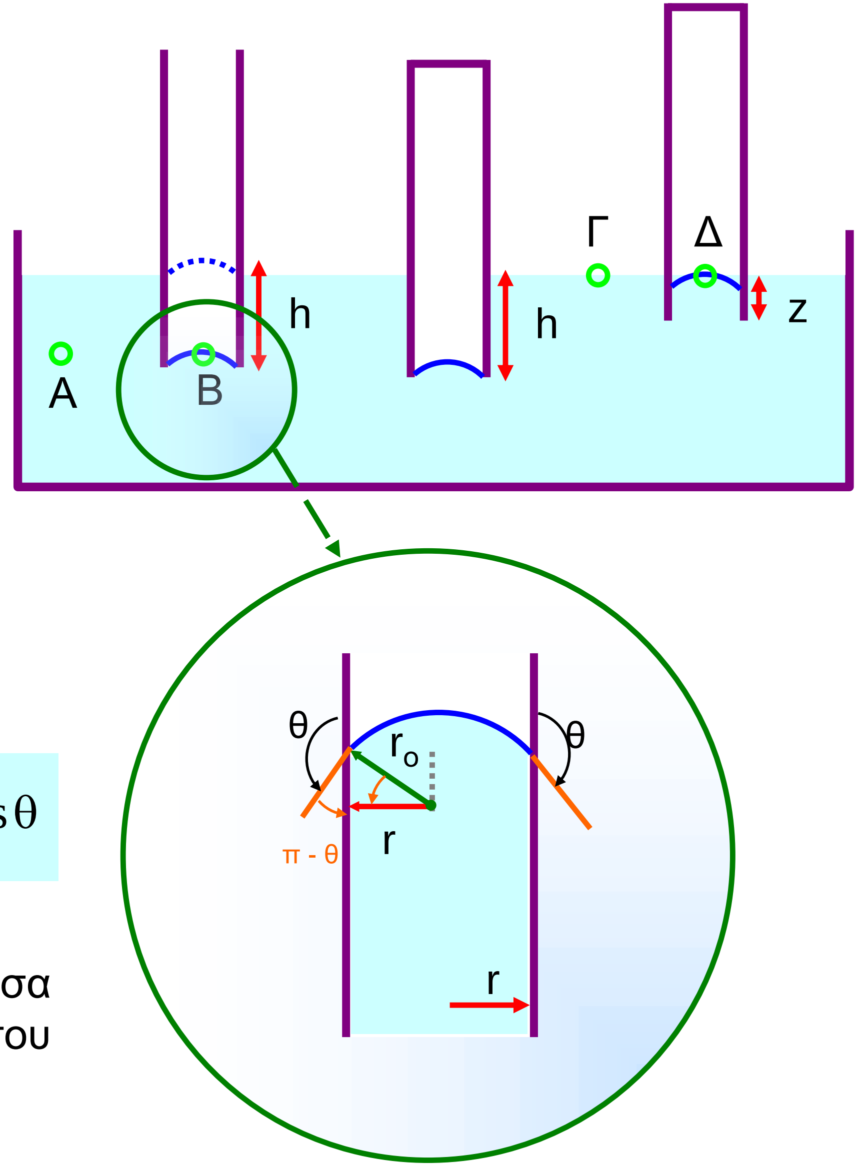


i)

$$\cos(\pi-\theta)=\frac{r}{r_o}\overset{\theta>\frac{\pi}{2}}{\Rightarrow}\cos\theta=\frac{r}{r_o}\Rightarrow r_o=\frac{r}{\cos\theta} \quad (1)$$

r_o ακτίνα καμπυλότητας μηνίσκου

r ακτίνα τριχοειδούς

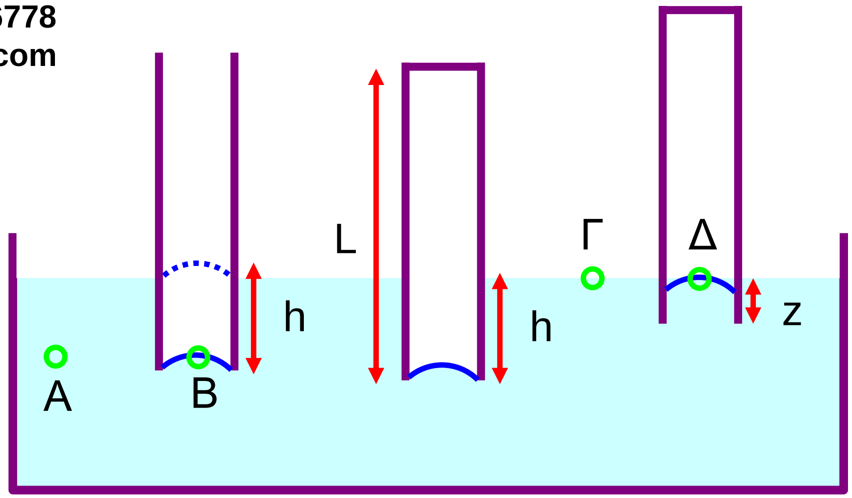


Το μη διαβρέχον υγρό καμπυλώνεται και κατέρχεται μέσα στον τριχοειδή σωλήνα.

$$\begin{cases} P_A = P_{\alpha\tau\mu} + \rho g h \\ P_B = P_{\alpha\tau\mu} + \Delta P_L \end{cases} \underset{\Delta P_L = \frac{2\sigma}{r_o}}{\overset{P_A = P_B}{\Rightarrow}} \rho g h = \frac{2\sigma}{r_o} \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{h = \frac{2\sigma}{\rho g r}\cos\theta}$$

Τόσο θα είναι η στάθμη που θα κατέβει το υγρό μέσα στον τριχοειδή σωλήνα σε σχέση με την επιφάνεια του υγρού.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com



ii)

Όταν φράξουμε τον τριχοειδή από πάνω τότε εγκλωβίζουμε μέσα σε αυτόν ατμοσφαιρικό αέρα και θα ισχύει:

πίεση $P_{\alpha\varepsilon\rho}^{APX} = P_{\alpha\tau\mu}$

όγκος $V_{\alpha\varepsilon\rho}^{APX} \approx \pi r^2 L$

Τραβώντας προς τα πάνω τον τριχοειδή σωλήνα αν το αέριο είναι ιδανικό και η διαδικασία ισόθερμη, αυξάνει ο όγκος του αερίου και ελαττώνεται η πίεση με αποτέλεσμα τελικά να ανέρχεται το υγρό λόγω της πίεση Laplace για να εξισορροπήσει την μεταβολή.

Αν δεν φράζαμε το πάνω μέρος του σωλήνα δεν θα μπορούσε να ανέλθει το υγρό προς τα πάνω γιατί είναι μη διαβρέχον.

Τραβάμε τον σωλήνα μέχρις ότου η στάθμη του υγρού εξισωθεί με το επίπεδο της επιφάνειας του υγρού εξωτερικά. Τελικά θα ισχύει:

πίεση $P_{\alpha\varepsilon\rho}^{TE\Lambda} = P_{\alpha\varepsilon\rho}$

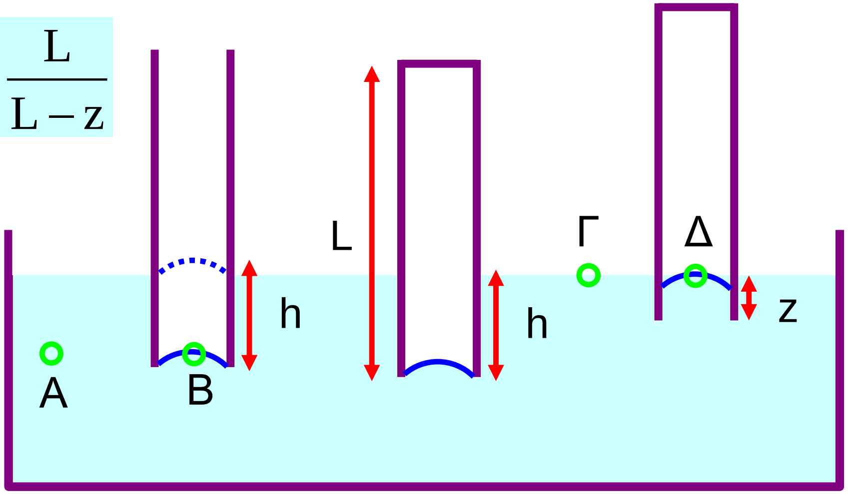
όγκος $V_{\alpha\varepsilon\rho}^{TE\Lambda} \approx \pi r^2 (L - z)$

Εφόσον, η διαδικασία είναι ισόθερμη ισχύει:

$$P_{\alpha\varepsilon\rho}^{APX} V_{\alpha\varepsilon\rho}^{APX} = P_{\alpha\varepsilon\rho}^{TE\Lambda} V_{\alpha\varepsilon\rho}^{TE\Lambda} \Rightarrow P_{\alpha\tau\mu} \pi r^2 L = P_{\alpha\varepsilon\rho} \pi r^2 (L - z) \Rightarrow \boxed{P_{\alpha\varepsilon\rho} = P_{\alpha\tau\mu} \frac{L}{L - z}}$$

EMC^2

$$\boxed{h = \frac{2\sigma}{\rho g r_o}} \qquad \boxed{P_{\alpha\varepsilon\rho} = P_{\alpha\tau\mu}\frac{L}{L-z}}$$



$$\left\{\begin{aligned} P_\Gamma &= P_{\alpha\tau\mu} \\ P_\Delta &= P_{\alpha\varepsilon\rho} + \Delta P_L \end{aligned}\right. \;\xRightarrow[\Delta P_L = \frac{2\sigma}{r_o}]{P_\Gamma = P_\Delta}$$

$$P_{\alpha\tau\mu} = P_{\alpha\varepsilon\rho} + \frac{2\sigma}{r_o} \Rightarrow \quad P_{\alpha\tau\mu} = P_{\alpha\tau\mu}\frac{L}{L-z} + \frac{2\sigma}{r_o} \Rightarrow$$

$$\frac{L}{L-z} = 1 - \frac{2\sigma}{r_o P_{\alpha\tau\mu}} \Rightarrow \quad \frac{L-z}{L} = \frac{1}{1 - \frac{2\sigma}{r_o P_{\alpha\tau\mu}}} \Rightarrow \quad z = L - \frac{L}{1 - \frac{2\sigma}{r_o P_{\alpha\tau\mu}}} \Rightarrow \quad z = \frac{L\left(1 - \frac{2\sigma}{r_o P_{\alpha\tau\mu}}\right) - L}{1 - \frac{2\sigma}{r_o P_{\alpha\tau\mu}}} \Rightarrow$$

$$z = \frac{-\frac{2\sigma}{r_o P_{\alpha\tau\mu}}}{1 - \frac{2\sigma}{r_o P_{\alpha\tau\mu}}} \Rightarrow \quad \boxed{z = \frac{1}{1 - \frac{r_o P_{\alpha\tau\mu}}{2\sigma}}}$$

Πρέπει να τραβήξουμε τον σωλήνα h – z, ώστε να εξισωθεί η στάθμη του μηνίσκου με την εξωτερική επιφάνεια, το h και z, τα έχουμε υπολογίσει.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com