# ΤΟ ΑΤΟΜΟ ΤΟΥ ΥΔΡΟΓΟΝΟΥ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΗΡΕΙΑ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΧΡΟΝΟ-ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Το σημείο εκκίνησης για την περιγραφή ενός κβαντομηχανικού συστήματος είναι να καθορίσουμε τη Hamiltonian του.
Στην περίπτωση αυτή στη Hamiltonian υπάρχουν επιπλέον όροι που οφείλονται στη σύζευξη του μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = B\hat{z}$ με τη στροφορμή και το spin του ηλεκτρονίου του ατόμου του υδρογόνου.
Συνεπώς η Hamiltonian (γνωστή και ως Hamiltonian Pauli) θα έχει τη μορφή:

$$H = H_0 + \frac{e}{2m_e c}(\vec{B}\cdot\vec{L} + 2\vec{B}\cdot\vec{S}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = H_0 + \frac{e}{2m_e c}\left[B\hat{z}\cdot(L_x\hat{x} + L_y\hat{y} + L_z\hat{z}) + 2B\hat{z}\cdot(S_x\hat{x} + S_y\hat{y} + S_z\hat{z})\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = H_0 + \frac{e}{2m_e c}(BL_z + 2BS_z) \Rightarrow H = H_0 + \frac{eB}{2m_e c}(L_z + 2S_z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = H_0 - \frac{|e|B}{2m_e c}(L_z + 2S_z)$$

$$\Theta \acute{\varepsilon} \tau \omega \quad \omega = \frac{|e|B}{2m_e c} \quad o\pi \acute{o} \tau \varepsilon: \quad \boldsymbol{H = H_0 - \omega(L_z + 2S_z)}$$

Ο όρος $H_0$ της Hamiltonian του Pauli, αντιπροσωπεύει τη Hamiltonian του ατόμου του υδρογόνου χωρίς τις συζεύξεις και έχει ιδιοτιμή:

$$E_n^{(0)} = -\frac{13,6eV}{n^2}, \quad n = 1,2,3\ldots$$

**Άσκηση:**

Το ηλεκτρόνιο του ατόμου του υδρογόνου είναι τη χρονική στιγμή t=0 στην κατάσταση:

$$\psi_{(\vec{r},t=0)} = R_{21}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\, Y_1^0 X_+ + \sqrt{\frac{2}{3}}\, Y_1^1 X_-\right)$$

Υποθέτουμε ότι για t>0 το άτομο βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = B\hat{z}$.

Βρείτε τη χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης.

**Λύση:**

Η Hamiltonian του Pauli λόγω μαγνητικού πεδίου είναι:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \omega\left(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z\right)$$

Οπότε:

$$\psi_{(\vec{r},t)} = \hat{U}_{(t)}\psi_{(\vec{r},t=0)} = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\psi_{210}X_+ + \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_{211}X_-\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\left[E_2^{(0)} - \omega\left(0\hbar + 2\frac{\hbar}{2}\right)\right]t}\, \psi_{210}X_+ + \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\left[E_2^{(0)} - \omega\left(1\hbar + 2\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\right)\right]t}\, \psi_{211}X_- =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\left(E_2^{(0)} - \omega\hbar\right)t}\, \psi_{210}X_+ + \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2^{(0)}t}\, \psi_{211}X_- \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_{(\vec{r},t)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2^{(0)}t}\, e^{i\omega t}\, \psi_{210}X_+ + \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_2^{(0)}t}\, \psi_{211}X_- \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{\psi_{(\vec{r},t)}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\, \boldsymbol{e^{-i\frac{E_2^{(0)}t}{\hbar}}\left(e^{i\omega t}\psi_{210}X_+ + \sqrt{2}\,\psi_{211}X_-\right)}}$$

***Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας***