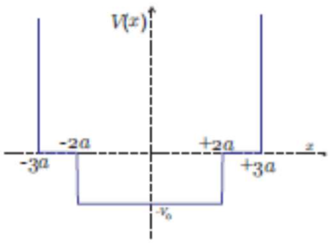
Μεθοδικά, απλά & κατανοητά…

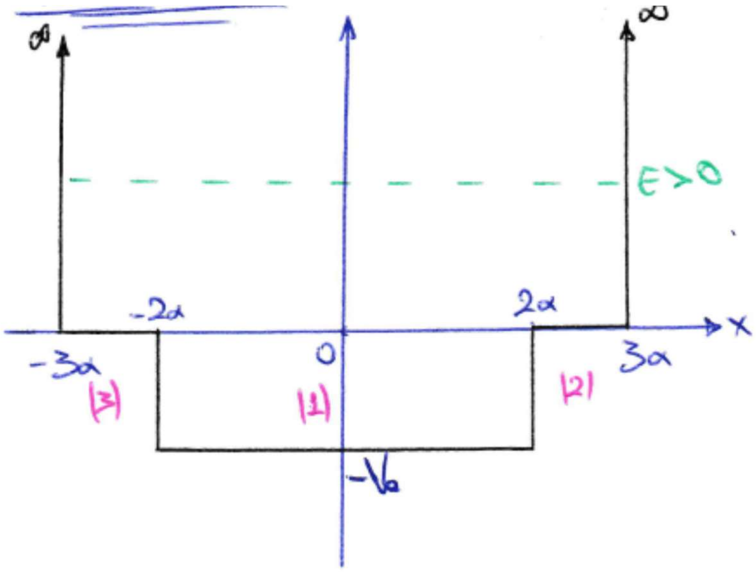
Θέμα



Σωματίδιο μάζας m βρίσκεται στο δυναμικό του διπλανού σχήματος

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & , |x| < 2a \\ 0 & , 2a < |x| < 3a \\ +\infty & , |x| > 3a \end{cases}$$

με V_0, a θετικές σταθερές με κατάλληλες μονάδες. Θεωρείστε $E > 0$.
(α) Για τις καταστάσεις με αρνητική ομοτιμία, βρείτε τη μορφή της κυματοσυνάρτησης και τις εξισώσεις που προσδιορίζουν τις σταθερές που υπεισέρχονται.
(β) Για τις καταστάσεις του ερωτήματος (α) βρείτε την εξίσωση που προσδιορίζει τις δυνατές τιμές της ενέργειας E του σωματιδίου και απλοποιήστε την κατά το δυνατόν.



$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & , |x| < 2\alpha \\ 0 & , 2\alpha < |x| < 3\alpha \\ +\infty & , |x| > 3\alpha \end{cases}$$

α) • Περιοχή 1: Για $|x| < 2\alpha$ είναι $V(x) = -V_0$ οπότε η εξίσωση Schrödinger δίνει:

$$\psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\psi_1 = 0 \rightarrow \psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + V_0\right)\psi_1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \psi_1'' + k_1^2\psi_1 = 0 \quad \text{όπου} \quad k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + V_0\right) > 0$$

Γενική Λύση: $\psi_1(x) = A\sin k_1 x + B\cos k_1 x$ (1)

www.pmoiras.weebly.com panmoiras@gmail.com 6932 946778

Λόγω αρνητικής ομοτιμίας ισχύει:

$$\psi_1(-x) = -\psi_1(x) \xrightarrow{(1)} A\sin(-k_1x) + B\cos(-k_1x) = -A\sin k_1x - B\cos k_1x \rightarrow$$

$$\rightarrow \cancel{-A\sin k_1x} + B\cos k_1x = \cancel{-A\sin k_1x} - B\cos k_1x \rightarrow$$

$$\rightarrow 2B\cos k_1x = 0 \xrightarrow{\forall x} B = 0$$

Συνεπώς: $\boxed{\psi_1(x) = A\sin k_1x}$ (2)

Περιοχή 2: Για $2\alpha < x < 3\alpha$ είναι $V(x) = 0$ οπότε η εξίσωση Schrödinger δίνει:

$$\psi_2'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - \cancelto{0}{V(x)})\psi_2 = 0 \rightarrow \psi_2'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \psi_2'' + k_2^2\psi_2 = 0 \quad \text{όπου} \quad k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E > 0$$

Γενική λύση: $\boxed{\psi_2(x) = C\sin k_2x + D\cos k_2x}$ (3)

Λόγω αρνητικής ομοτιμίας η περιοχή αυτή συνδέεται με την περιοχή 3 $(-3\alpha < x < -2\alpha)$ στην οποία η κυματοσυνάρτηση είναι:

$$\psi_3(x) = -\psi_2(-x) \xrightarrow{(3)} \psi_3(x) = -C\sin(-k_2x) - D\cos(-k_2x) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\psi_3(x) = C\sin k_2x - D\cos k_2x} \quad (4)$$

Επομένως για τις καταστάσεις με αρνητική ομοτιμία η κυματοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$$\psi(x)=\begin{cases} 0, & \text{για } x<-3\alpha \\ C\sin k_2x - D\cos k_2x, & \text{για } -3\alpha<x<-2\alpha \\ A\sin k_1x, & \text{για } -2\alpha<x<2\alpha \\ C\sin k_2x + D\cos k_2x, & \text{για } 2\alpha<x<3\alpha \\ 0, & \text{για } x>3\alpha. \end{cases}$$

Οι οριακές συνθήκες δίνουν:

- $x=3\alpha$: $\psi_2(x=3\alpha)=0 \xrightarrow{(3)} C\sin 3k_2\alpha + D\cos 3k_2\alpha = 0 \quad (5)$

- $x=2\alpha$: $\psi_1(x=2\alpha)=\psi_2(x=2\alpha) \xrightarrow{(2,3)} A\sin 2k_1\alpha = C\sin 2k_2\alpha + D\cos 2k_2\alpha \rightarrow$

$$\rightarrow A\sin 2k_1\alpha - C\sin 2k_2\alpha - D\cos 2k_2\alpha = 0 \quad (6)$$

και $\psi_1'(x=2\alpha)=\psi_2'(x=2\alpha) \xrightarrow{(2,3)} k_1A\cos 2k_1\alpha = k_2C\cos 2k_2\alpha - k_2D\sin 2k_2\alpha \rightarrow$

$$\rightarrow k_1A\cos 2k_1\alpha - k_2C\cos 2k_2\alpha + k_2D\sin 2k_2\alpha = 0 \quad (7)$$

Οι σχέσεις (5), (6), (7) και η συνθήκη κανονικοποίησης

$$\int_{-3\alpha}^{-2\alpha}|\psi_3|^2dx + \int_{-2\alpha}^{2\alpha}|\psi_1|^2dx + \int_{2\alpha}^{3\alpha}|\psi_2|^2dx = 1$$

προσδιορίζουν τις σταθερές που υπεισέρχονται.

β/ Το ομογενές σύστημα των (5), (6), (7) για να έχει μη μηδενική λύση πρέπει:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sin 3k_2\alpha & \cos 3k_2\alpha \\ \sin 2k_1\alpha & -\sin 2k_2\alpha & -\cos 2k_2\alpha \\ k_1\cos 2k_1\alpha & -k_2\cos 2k_2\alpha & k_2\sin 2k_2\alpha \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\sin 3k_2\alpha\left[k_2\sin 2k_2\alpha\,\sin 2k_1\alpha + k_1\cos 2k_1\alpha\,\cos 2k_2\alpha\right] +$$

$$+\cos 3k_2\alpha\left[-k_2\cos 2k_2\alpha\,\sin 2k_1\alpha + k_1\cos 2k_1\alpha\,\sin 2k_2\alpha\right] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -k_2\sin 2k_1\alpha\Big(\underbrace{\sin 3k_2\alpha\,\sin 2k_2\alpha + \cos 3k_2\alpha\,\cos 2k_2\alpha}_{\cos(3k_2\alpha - 2k_2\alpha) = \cos k_2\alpha}\Big) +$$

$$+k_1\cos 2k_1\alpha\Big(\underbrace{-\sin 3k_2\alpha\,\cos 2k_2\alpha + \cos 3k_2\alpha\,\sin 2k_2\alpha}_{\sin(2k_2\alpha - 3k_2\alpha) = \sin(-k_2\alpha) = -\sin k_2\alpha}\Big) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -k_2\sin 2k_1\alpha\cos k_2\alpha - k_1\cos 2k_1\alpha\sin k_2\alpha = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -k_2\sin 2k_1\alpha\cos k_2\alpha = k_1\cos 2k_1\alpha\sin k_2\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow -k_2 \frac{\sin 2k_1\alpha}{\cos 2k_1\alpha} = k_1 \frac{\sin k_2\alpha}{\cos k_2\alpha} \rightarrow -k_2 \tan 2k_1\alpha = k_1 \tan k_2\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\tan k_2\alpha = -\frac{k_2}{k_1} \tan 2k_1\alpha}.$$

όπου $k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)}$, $k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$.