

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κάθε σωματίδιο περιγράφεται από την κυματοσυνάρτησή του $\psi(x,t)$ που είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη μιγαδική συνάρτηση της θέσης και του χρόνου και η οποία περιέχει όλες τις πληροφορίες για την κατάστασή του. Μια μιγαδική συνάρτηση $\psi(x,t)$ ονομάζεται τετραγωνικά ολοκληρώσιμη αν ικανοποιεί την παρακάτω ιδιότητα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \psi dx < +\infty (\neq 0, \infty) \quad (1)$$

Αναγκαία συνθήκη ώστε μια κυματοσυνάρτηση να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη είναι:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0 \quad (2)$$

Δηλαδή η κυματοσυνάρτηση στην περιοχή του $\pm \infty$ είναι φραγμένη και τείνει στο μηδέν.

Συνεπώς μια κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$ είναι φυσικά παραδεκτή αν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη.

Μεθοδολογία:

Για να ελέγξουμε αν μια δοθείσα κυματοσυνάρτηση είναι φυσικά παραδεκτή πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το όριό της (2) και αν είναι διάφορο του μηδενός συμπεραίνουμε άμεσα ότι δεν είναι φυσικά παραδεκτή.

Αν είναι μηδέν ικανοποιείται η αναγκαία συνθήκη και ακολούθως υπολογίζουμε και το ολοκλήρωμα (1) έτσι ώστε αν είναι πεπερασμένο (διάφορο του μηδέν και του απείρου) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η κυματοσυνάρτηση είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη άρα και φυσικά παραδεκτή.



ΑΣΚΗΣΗ 1

(α) Από τις ακόλουθες κυματο-συναρτήσεις κάποιες είναι φυσικά παραδεκτές και κάποιες όχι. Ξεχωρίστε τις:

$$(1) \psi(x) = Ne^{-\lambda x} \quad \lambda > 0 \qquad (3) \psi(x) = Nxe^{-\lambda x^2} \quad \lambda > 0$$

$$(2) \psi(x) = Ne^{\lambda x} \quad \lambda > 0 \qquad (4) \psi(x) = Ne^{-\lambda|x|} \quad \lambda > 0$$

(β) Να κανονικοποιήσετε τις φυσικά παραδεκτές κυματοσυναρτήσεις στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$

(γ) Να υπολογίσετε την μέση τιμή της θέσης και της ορμής για την κυματοσυνάρτηση υπ' αριθμόν (4)

ΑΣΚΗΣΗ 2

(α) Από τις ακόλουθες κυματοσυναρτήσεις κάποιες είναι φυσικά παραδεκτές και κάποιες όχι. Ξεχωρίστε τις:

$$(1) \psi(x) = Nxe^{-\lambda x} \quad \lambda > 0 \qquad (3) \psi(x) = Nxe^{-\lambda x^2} \quad \lambda > 0$$

$$(2) \psi(x) = Nx^2 e^{\lambda x} \quad \lambda > 0 \qquad (4) \psi(x) = Ne^{-\lambda|x|} \quad \lambda > 0$$

Σε όλες τις περιπτώσεις $x \in (-\infty, +\infty)$.

(β) Να κανονικοποιήσετε τις φυσικά παραδεκτές κυματοσυναρτήσεις στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$

(γ) Να υπολογίσετε την μέση τιμή της θέσης και της ορμής για τις φυσικά παραδεκτές κυματοσυναρτήσεις.

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

