ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Τελεστής $(\hat{A})$ ονομάζεται κάθε μαθηματική ποσότητα που δρα πάνω σε μια συνάρτηση μετασχηματίζοντάς την κατά έναν καθορισμένο τρόπο. Δηλαδή:

$$\hat{A}\psi = \varphi$$

Κάθε τελεστής από μόνος του δεν έχει κανένα φυσικό νόημα,αλλά αποκτάει όταν δράσει πάνω σε μια συνάρτηση.

Παραδείγματα τελεστών:

- **Τελεστής θέσης** $\hat{\boldsymbol{x}}$: $\hat{x}\psi = x\psi$
- **Τελεστής παραγώγισης** $\frac{\hat{\boldsymbol{d}}}{\boldsymbol{dx}}$: $\frac{\hat{d}}{dx}\psi(x) = \frac{d\psi(x)}{dx}$
- **Ταυτοτικός τελεστής** $\hat{\boldsymbol{I}}$: $\hat{I}\psi = \psi$
- **Σταθερός τελεστής** $\hat{\boldsymbol{c}}$ (c μιγαδική σταθερά): $\hat{c}\psi = c\psi$, $(c \in \mathbb{C})$
- **Τελεστής ορμής** $\hat{\boldsymbol{p}}$: $\hat{p}\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}$
- **Τελεστής ομοτιμίας (parity)** $\hat{\boldsymbol{\Pi}}$: $\hat{\Pi}\psi(x) = \psi(-x)$ (ο τελεστής αυτός αλλάζει το πρόσημο της μεταβλητής)
- **Τελεστής μετάθεσης** $\hat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{\alpha}}$: $\hat{T}_{\alpha}\psi(x) = \psi(x+a)$
- **Μηδενικός τελεστής** $\hat{\mathbf{0}}$: $\hat{0}\psi = 0$

Στην Κβαντομηχανική ασχολούμαστε μόνο με γραμμικούς τελεστές οι οποίοι ικανοποιούν την ιδιότητα:

$$\hat{A}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\hat{A}\psi_1 + c_2\hat{A}\psi_2, \;\; c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Άλγεβρα γραμμικών τελεστών:

1) Άθροιση τελεστών: $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B} \Rightarrow \hat{C}\psi = (\hat{A} + \hat{B})\psi = \hat{A}\psi + \hat{B}\psi$

Παράδειγμα αποτελεί ο τελεστής Laplace:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Rightarrow \nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

2) Γινόμενο τελεστών: $\hat{D} = \hat{A}\hat{B} \Rightarrow \hat{D}\psi = (\hat{A}\hat{B})\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi)$

δηλαδή η δράση του γινομένου δύο τελεστών σε μία συνάρτηση είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής πρώτα του τελεστή $\hat{B}$ στη συνάρτηση και στη συνέχεια του τελεστή $\hat{A}$.

Μία από τις βασικότερες διαφορές της άλγεβρας τελεστών από την άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών είναι το ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στο γινόμενο οποιονδήποτε τελεστών $\hat{A}$ και $\hat{B}$. Δηλαδή γενικά ισχύει:

$$\hat{A}\hat{B}\psi \neq \hat{B}\hat{A}\psi$$

Γι' αυτό το λόγο είναι χρήσιμο να εισάγουμε τον **αντιμεταθέτη** δύο τελεστών που είναι βασικής σημασίας στην Κβαντομηχανική.

Ορίζουμε τον αντιμεταθέτη δύο τελεστών: $[\hat{\boldsymbol{A}}, \hat{\boldsymbol{B}}] = \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{B}} - \hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{A}}$

Όταν $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ τότε οι τελεστές $\hat{A}$ και $\hat{B}$ αντιμετατίθενται ή αλλιώς οι τελεστές $\hat{A}\hat{B}$ και $\hat{B}\hat{A}$ είναι ίσοι δηλαδή: $\hat{A}\hat{B}\psi = \hat{B}\hat{A}\psi$

Ιδιότητες αντιμεταθέτη:

1) $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$

2) $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$

3) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$

4) $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$

5) $\left[\hat{A}, \lambda\hat{B}\right] = \hat{\lambda}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \left[\lambda\hat{A}, \hat{B}\right]$

6) $\left[\hat{A}, f(\hat{A})\right] = 0, \quad \left[\hat{A}, \widehat{A^n}\right] = 0, \quad \left[\hat{A}, \lambda\right] = 0$

Δηλαδή κάθε τελεστής αντιμετατίθεται με οποιαδήποτε συνάρτηση του.

7) $\left[\hat{A}, f(\hat{B})\right] = [\hat{A}, \hat{B}]f'(\hat{B})$

Βασικοί μεταθέτες:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar, \quad \left[\hat{H}, \hat{x}\right] = -\frac{i\hbar}{m}\hat{p}_x, \quad \left[\hat{H}, \hat{p}_x\right] = i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\left[\hat{x}_i, \hat{x}_j\right] = 0 \quad , \left[\hat{p}_i, \hat{p}_j\right] = 0, \quad \left[\hat{x}_i, \hat{p}_j\right] = i\hbar\delta_{ij} \quad \mu\varepsilon\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ i = j \\ 0, \alpha\nu\ i \neq j \end{cases}$$

Ιδιότιμες και ιδιοσυναρτήσεις τελεστή

Ένας μιγαδικός αριθμός α λέγεται **ιδιοτιμή** του τελεστή $\hat{A}$ αν ισχύει:

$$\boldsymbol{\hat{A}\psi = \alpha\psi}$$

Η συνάρτηση (διάνυσμα) ψ λέγεται **ιδιοσυνάρτηση** (ιδιοδιάνυσμα) του τελεστή $\hat{A}$ που ανήκει στην ιδιοτιμή α.

Δηλαδή οι ιδιοσυναρτήσεις ενός τελεστή είναι εκείνες οι συναρτήσεις για τις οποίες η δράση του τελεστή έχει ως αποτέλεσμα να τις αφήνει αναλλοίωτες, εκτός απ' τον πολλαπλασιασμό με μία σταθερά.

Ένας τελεστής μπορεί να έχει μία ή περισσότερες ιδιοτιμές.

Το σύνολο των ιδιοτιμών (φάσμα ιδιοτιμών) ενός τελεστή μπορεί να είναι διακριτό ή συνεχές ή μικτό.

Αν στην ίδια ιδιοτιμή ανήκουν περισσότερες από μία ιδιοσυναρτήσεις (γραμμικά ανεξάρτητες μεταξύ τους) λέμε ότι η ιδιοτιμή του τελεστή είναι **εκφυλισμένη**. Δηλαδή αν $\hat{A}\psi_i = \alpha\psi_i, \quad i = 1,2,..,m$ η ιδιοτιμή α παρουσιάσει εκφυλισμό τάξης m.

Εσωτερικό γινόμενο - Ορθογωνιότητα – Κανονικοποίηση

Το εσωτερικό γινόμενο στο χώρο των μιγαδικών συναρτήσεων ορίζεται ως:

$$(\boldsymbol{\psi_1}, \boldsymbol{\psi_2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\psi_1^*(x)\psi_2(x)dx}$$

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου:

1) $(\psi, \psi) \geq 0$
2) $(\psi_1, \alpha\psi_2) = \alpha(\psi_1, \psi_2) \quad (\alpha \in \mathbb{C})$
3) $(\psi_1, \psi_2 + \psi_3) = (\psi_1, \psi_2) + (\psi_1, \psi_3)$
4) $(\psi_1, \psi_2) = (\psi_2, \psi_1)^*$
5) Αν $(\psi_1, \psi_2) = 0$ τότε οι δύο συναρτήσεις ψ_1, ψ_2 είναι **ορθογώνιες** μεταξύ τους.
6) Μία συνάρτηση ψ λέγεται **κανονικοποιημένη** αν ισχύει: $(\psi, \psi) = 1$
7) Γενικότερα οι ψ_i, ψ_j λέγονται **ορθοκανονικοποιημένες** αν:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i^* \psi_j dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Συμβολισμός Dirac

Ο Dirac συμβόλισε τις συναρτήσεις (διανύσματα) των μιγαδικών χώρων με το σύμβολο |ψ> που ονόμασε **ket**.
Σε κάθε κατάσταση ket |ψ> αντιστοιχεί ένα συζυγές διάνυσμα που ονόμασε **bra** και συμβολίζεται ως <ψ|.
Το εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται **bracket** και είναι:

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* \psi_2 dx = (|\psi_1>, |\psi_2>) =< \psi_1||\psi_2> =< \psi_1|\psi_2>$$

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ☎6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να δείξετε ότι η $u(x) = e^{ax^2/2}$ είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - a^2x^2\right)$$

και να βρείτε την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να δείξετε ότι η $u(x) - e^{-x^2/4}$ είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4}x^2\right)$$

και να βρείτε την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να δείξετε ότι η $u(x) = e^{-x^2/2}$ είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)$$

και να βρείτε την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω $\hat{T}_a$ ο τελεστής μετατοπίσεως

$$\hat{T}_a\psi(x) = \psi(x+a)$$

Να δείξετε ότι ισχύει $\hat{T}_a = \exp(iap_x/\hbar)$ όπου $p_x = -i\hbar\dfrac{d}{dx}$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

(α) Υποθέσετε ότι $f(x)$ και $g(x)$ είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $\hat{Q}$ με την ίδια ιδιοτιμή q. Αποδείξτε ότι οιαδήποτε γραμμική υπέρθεση των $f(x)$ και $g(x)$, είναι επίσης ιδιοσυνάρτηση με την ίδια ιδιοτιμή.

(β) Επαληθεύστε ότι οι $\exp(x)$ και $\exp(-x)$ είναι ιδιοσυναρτήσεις του $\dfrac{d^2}{dx^2}$ και βρείτε σε ποια ιδιοτιμή αντιστοιχούν.

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας