

ΤΑΥΤΟΣΗΜΑ ΣΩΜΑΤΙΔΙΑ - ΑΡΧΗ ΤΟΥ PAULI

Ταυτόσημα ονομάζονται τα σωματίδια τα οποία έχουν ακριβώς ίδιες φυσικές ιδιότητες, όπως μάζα, φορτίο, spin, βαρυονικό, λεπτονικό αριθμό κλπ. Για παράδειγμα όλα τα ηλεκτρόνια είναι ταυτόσημα σωματίδια. Στην Κλασική Μηχανική τα ταυτόσημα σωματίδια είναι διακρίσιμα γιατί κάθε σωματίδιο κινείται πάνω σε μια καθορισμένη τροχιά, οπότε μπορεί να διακριθεί απ' όλα τα υπόλοιπα του ίδιου είδους. Στην Κβαντομηχανική όμως δεν υπάρχει η έννοια της τροχιάς με συνέπεια να μην είναι δυνατή η διάκριση των ταυτόσημων σωματιδίων. Συνεπώς ισχύει η **αρχή της μη διακρισιμότητας των ταυτόσημων σωματιδίων**, σύμφωνα με την οποία η χωρική κυματοσυνάρτηση $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ του συστήματος δύο ταυτόσημων σωματιδίων 1 και 2 πρέπει να είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική στην εναλλαγή των δύο σωματιδίων ($1 \leftrightarrow 2$), δηλαδή:

$$\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \pm \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

Τα σωματίδια του μικροκόσμου κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες με βάση τον κβαντικό τους spin και ονομάζονται:

α) Φερμιόνια, αν το spin είναι ημιακέραιο ($s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$), όπως το ηλεκτρόνιο, το πρωτόνιο, το νετρόνιο κ.α. δηλ. όλα τα σωματίδια δομικοί λίθοι της ύλης.

β) Μποζόνια, αν το spin είναι ακέραιο ($s = 0, 1, \dots$), όπως το φωτόνιο, το δευτέριο, το π-μεσόνιο κ.α. δηλ. τα σωματίδια φορείς πεδίων δυνάμεων της φύσης.

Η κατάσταση ενός σωματιδίου με spin διάφορο του μηδενός περιγράφεται από μία κυματοσυνάρτηση $\psi(\vec{r}, s)$ που εξαρτάται όχι μόνο απ' τη μεταβλητή θέσης \vec{r} αλλά και από τη διακριτή μεταβλητή s , η οποία αντιστοιχεί στις δυνατές τιμές της προβολής του spin στον άξονα z.

Ομοίως η κυματοσυνάρτηση συστήματος δύο ταυτόσημων σωματιδίων με spin θα έχει τη μορφή: $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2; s_1, s_2)$



Γενικευμένη αρχή Pauli:

“Η κυματοσυνάρτηση ενός συστήματος δύο ταυτόσημων σωματιδίων πρέπει να είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική στην εναλλαγή των μεταβλητών τους. Συγκεκριμένα η κυματοσυνάρτηση δύο φερμιονίων είναι πάντα αντισυμμετρική, ενώ αυτή δύο μποζονίων είναι πάντα συμμετρική.”

Στην περίπτωση συστήματος δύο ηλεκτρονίων (φερμιονίων με spin 1/2) η κυματοσυνάρτηση γράφεται ως γινόμενο της χωρικής κυματοσυνάρτησης $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ και της spin κυματοσυνάρτησης του συστήματος. Δηλαδή:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2; s_1, s_2) = \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot X_{(s_1, s_2)}$$

και σύμφωνα με τη γενικευμένη αρχή Pauli η παραπάνω κυματοσυνάρτηση πρέπει να είναι αντισυμμετρική στην εναλλαγή των μεταβλητών θέσης και spin.

Επειδή τα ηλεκτρόνια έχουν spin 1/2, ο κβαντικός αριθμός S του ολικού spin θα είναι $|s_1 - s_2| \leq S \leq s_1 + s_2 \Rightarrow 0 \leq S \leq 1$.

Δηλαδή για S=0 τα spin των δύο ηλεκτρονίων είναι αντιπαράλληλα, ενώ για S=1 είναι παράλληλα.

$\uparrow\downarrow$ <i>αντιπαράλληλα spin</i> $S = 0$	$\uparrow\uparrow$ <i>παράλληλα spin</i> $S = 1$
--	--

- Η κατάσταση με ολικό spin S=0 δίνεται απ' το τύπο:

$$X_S = X_{0(s_1, s_2)}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (X_{+(s_1)} X_{-(s_2)} - X_{-(s_1)} X_{+(s_2)})$$

είναι αντισυμμετρική και λέγεται **singlet**.

- Οι καταστάσεις με ολικό spin S=1 είναι τρεις και διαφέρουν ως προς την τιμή της προβολής του ολικού spin στον άξονα z ($S_z = 1, 0, -1$). Δηλαδή:



$$X_T = \begin{cases} X_{1(s_1, s_2)}^1 = X_{+(s_1)} X_{+(s_2)} \\ X_{1(s_1, s_2)}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (X_{+(s_1)} X_{-(s_2)} + X_{-(s_1)} X_{+(s_2)}) \\ X_{1(s_1, s_2)}^{-1} = X_{-(s_1)} X_{-(s_2)} \end{cases}$$

Η συμμετρική αυτή κυματοσυνάρτηση X_T λέγεται **triplet**.

- Όσον αφορά τη χωρική κυματοσυνάρτηση $\psi_{(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}$ αν είναι συμμετρική θα έχει τη μορφή:

$$\Psi_{\text{συμμετρική}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_{n_1(\vec{r}_1)} \Psi_{n_2(\vec{r}_2)} + \Psi_{n_1(\vec{r}_2)} \Psi_{n_2(\vec{r}_1)}] , \text{για } n_1 \neq n_2 \\ \Psi_{n(\vec{r}_1)} \Psi_{n(\vec{r}_2)} , \text{για } n_1 = n_2 = n \end{cases}$$

Ενώ αν είναι αντισυμμετρική θα έχει τη μορφή:

$$\Psi_{\text{αντισυμμετρική}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_{n_1(\vec{r}_1)} \Psi_{n_2(\vec{r}_2)} - \Psi_{n_1(\vec{r}_2)} \Psi_{n_2(\vec{r}_1)}] , \text{για } n_1 \neq n_2$$

Απαγορευτική αρχή του Pauli

Η απαγορευτική αρχή του Pauli αποτελεί μία από τις βασικές αρχές της κβαντομηχανικής και αναφέρεται σε συστήματα ταυτόσημων φερμιονίων, όπως τα ατομικά ηλεκτρόνια. Η εφαρμογή της αρχής αυτής στην Ατομική Φυσική ερμηνεύει την ηλεκτρονική δομή των στοιχείων και την κατάταξή τους στον περιοδικό πίνακα.

Σύμφωνα με αυτή:

“Δύο ταυτόσημα φερμιόνια με παράλληλα spin δεν μπορούν να βρεθούν ταυτόχρονα στην ίδια ενεργειακή ιδιοκατάσταση. Επομένως δύο ηλεκτρόνια σε ένα άτομο είναι αδύνατον να έχουν την ίδια τετράδα κβαντικών αριθμών n, l, m, s_z (θα διαφέρουν τουλάχιστον σε ένα κβαντικό αριθμό), δηλαδή είναι αδύνατη η συνύπαρξή τους στην ίδια κβαντική κατάσταση ενός ατόμου.”



Σε κάθε ενεργειακή στάθμη μπορούν να συνυπάρξουν $(2s + 1)$ φερμιόνια, όπου s το spin τους.

Δηλαδή για ηλεκτρόνια - πρωτόνια όπου $s = 1/2$ μπορούν να συνυπάρξουν 2 σωματία, ενώ για σωματία με spin $s = 3/2$ μπορούν να συνυπάρξουν 4 σωματία σε κάθε ενεργειακή στάθμη.

Η φυσική σημασία της αρχής Pauli στη δομή της ύλης είναι τεράστια και μας δείχνει ότι δεν είναι δυνατή η απεριόριστη συσσώρευση των φερμιονίων (δομικών λίθων της ύλης) στην ίδια περιοχή χώρου, γεγονός το οποίο θα είχε σαν αποτέλεσμα την πλήρη κατάρρευση της ύλης σε μια "σταγόνα" άπειρης πυκνότητας.

Παρατηρήσεις:

1) Τα φερμιόνια υποδεικνύουν μια "ατομιστική" συμπεριφορά καθώς υπόκεινται στην απαγορευτική αρχή του Pauli, δηλαδή είναι αδύνατη η συνύπαρξή τους στην ίδια κβαντική κατάσταση. Για το λόγο αυτό περιγράφονται από αντισυμμετρικές κυματοσυναρτήσεις.

2) Τα μποζόνια υποδεικνύουν μια "κολλεκτιβιστική" συμπεριφορά καθώς δεν υπόκεινται στην απαγορευτική αρχή του Pauli, δηλαδή είναι δυνατή η απεριόριστη συνύπαρξή τους στην ίδια κβαντική κατάσταση και η δημιουργία με αυτό τον τρόπο ενός μακροσκοπικού πεδίου δυνάμεων (H/M πεδίο, πεδίο βαρύτητας, πυρηνικά πεδία κ.α.). Για το λόγο αυτό περιγράφονται από συμμετρικές κυματοσυναρτήσεις.

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

