ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

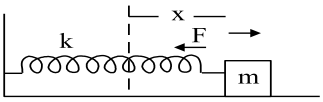
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 1

Σύστημα «μάζα-ελατήριο» ταλαντώνεται με απλή αρμονική κίνηση πάνω σε οριζόντια επιφάνεια με πλάτος 12cm.
α) Ποια η ολική ενέργεια του συστήματος αν η σταθερά του ελατηρίου είναι 50N/m;
β) Ποια η κινητική και η δυναμική ενέργεια του συστήματος, όταν η μάζα απέχει 9cm από τη θέση ισορροπίας;
γ) Ποια η μέγιστη ταχύτητα υ_{max} και η μέγιστη επιτάχυνση α_{max} αν η μάζα m είναι 0,5kgr;

(Τμήμα Αγρονόμων – Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Newton για την κίνηση της μάζας προκύπτει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow -kx = m\ddot{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Δηλαδή το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{k/m}$.
Η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης παρέχει τη θέση της μάζας συναρτήσει του χρόνου και δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(1)}$$

Οπότε η ταχύτητα της μάζας είναι:

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα η κινητική της ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2[1-\cos^2(\omega t + \varphi] =$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2[A^2 - A^2\cos^2(\omega t + \varphi)] \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) \quad \text{κι επειδή } \omega^2 = k/m \text{ είναι :}$$

$$K = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) \qquad \textbf{(3)}$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος οφείλεται στη δύναμη που ασκεί το ελατήριο στη μάζα (F = -kx) και προκύπτει ως εξής:

$$F = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow dV = -Fdx \Rightarrow \int_0^V dV = -\int_0^x (-kx)dx \Rightarrow V = k\int_0^x xdx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα η ολική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$E = K + V \overset{(3)(4)}{=} \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}50\frac{N}{m}0{,}12^2 m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = 0{,}36 \text{ Joule}$$

β) Όταν η μάζα απέχει x = 0,09m από τη θέση ισορροπίας, η κινητική και η δυναμική ενέργεια του συστήματος, σύμφωνα με τις **(3)** και **(4)** είναι:

$$K = \frac{1}{2}50\frac{N}{m}(0{,}12^2 - 0{,}09^2)m^2 = 25(0{,}0144 - 0{,}0081)J \Rightarrow K = 0{,}16 \text{ Joule}$$

$$V = \frac{1}{2}50\frac{N}{m}0{,}09^2 m^2 \Rightarrow V = 0{,}2 \text{ Joule}$$

γ) Από την **(2)** φαίνεται ότι η μέγιστη ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_{max} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}12\sqrt{\frac{50}{0{,}5}} = 0{,}12\sqrt{100} \Rightarrow \upsilon_{max} = 1{,}2 \text{ m/sec}$$

Η επιτάχυνση της μάζας είναι:

$$\alpha(t) = \frac{d\upsilon}{dt} \overset{(2)}{=} -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

Άρα η μέγιστη επιτάχυνση είναι:

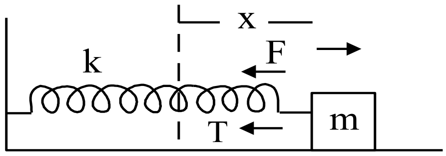
$$\alpha_{max} = A\omega^2 = 0{,}12 \cdot 100 \Rightarrow \alpha_{max} = 12 \text{ m/sec}^2$$

Θέμα 2

Μια μάζα m είναι συνδεδεμένη σε ένα σταθερό σημείο με ένα αβαρές ελατήριο σταθεράς k. Να γραφούν και να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για:
α) την περίπτωση μηδενικής τριβής μεταξύ μάζας και οριζοντίου επιπέδου
β) την περίπτωση που η δύναμη τριβής είναι ανάλογη της ταχύτητας, δηλαδή T = -bυ (όπου b σταθερά).

(Τμήμα Αγρονόμων – Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Όταν δεν υπάρχει τριβή ο 2ος νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της παραπάνω ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι:

$\lambda^2 + \dfrac{k}{m} = 0$ με μιγαδικές ρίζες $\lambda_1 = +i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Οπότε η γενική λύση της **(1)** είναι:

$$x(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Η παραπάνω λύση μπορεί να γραφεί και υπό τη μορφή:

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) \Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(3)}$$

όπου $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ η κυκλική συχνότητα, φ η αρχική φάση και Α το πλάτος της ταλάντωσης.

β) Αν στο σύστημα υπάρχει και απόσβεση, δηλαδή αν ασκείται και η δύναμη τριβής $T = -b\upsilon$, ο 2ος νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Θέτοντας $\gamma = b/2m$ και $\omega_o = \sqrt{k/m}$ (φυσική συχνότητα) η προηγούμενη γράφεται:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_o^2 = 0$$

Αν $\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_o^2 < 0$ δηλαδή για $\gamma < \omega_o$ (που αντιστοιχεί στην περίπτωση μικρής απόσβεσης) η παραπάνω έχει μιγαδικές ρίζες :

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\gamma \pm i\sqrt{4\omega_o^2 - 4\gamma^2}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$$

Οπότε η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης **(4)** είναι:

$$x(t) = c_1 e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}\ t\right) + c_2 e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}\ t\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}[c_1\cos(\omega_1 t) + c_2\sin(\omega_1 t)]$$

όπου $\omega_1 = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$ η κυκλική συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης.

Η προηγούμενη σχέση όπως και στο ερώτημα **(α)** μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi)$$

όπου A και φ σταθερές, οι οποίες προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Θέμα 3

Η εξίσωση κίνησης ενός συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική κίνηση είναι: $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$. Να δειχτεί ότι η εξίσωση κίνησης μπορεί να πάρει τη μορφή: $x(t)=B\cos\omega t+C\sin\omega t$ και να υπολογιστούν οι σταθερές B,C συναρτήσει των A, φ και αντίστροφα.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

Χρησιμοποιώντας το γνωστό τριγωνομετρικό τύπο
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ προκύπτει:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\omega t\cos\varphi - A\sin\omega t\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t$$

όπου $B=A\cos\varphi$ και $C=-A\sin\varphi$

Προσθέτοντας τα τετράγωνα και διαιρώντας κατά μέλη τις **(1)** αντίστοιχα υπολογίζοντας τα A, φ συναρτήσει των B, C. Δηλαδή :

$$A^2=B^2+C^2 \Rightarrow A=\sqrt{B^2+C^2}$$

και $$\tan\varphi=-\frac{C}{B} \Rightarrow \varphi=\tan^{-1}\left(-\frac{C}{B}\right)$$

Θέμα 4

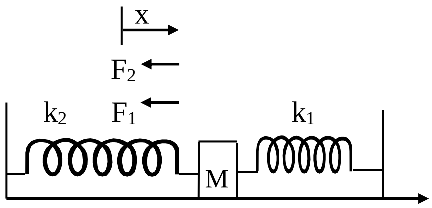
Μια μάζα M έχει συνδεθεί από τις δυο πλευρές της με δυο ελατήρια σταθερών k_1, k_2 αντίστοιχα και κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Στη θέση ισορροπίας τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος.

α) Να υπολογιστεί η κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης που δύναται να εκτελέσει η μάζα M.

β) Αν το πλάτος της αρμονικής ταλάντωσης της μάζας M είναι A και τη στιγμή που αυτή περνάει από τη θέση ισορροπίας πέσει κατακόρυφα μάζα m πάνω της και συσσωματωθεί σε αυτή, να υπολογιστεί η νέα συχνότητα ω΄ και το νέο πλάτος A΄ της αρμονικής ταλάντωσης.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Έστω ότι η μάζα M απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας προς τα δεξιά κατά x. Τότε το ελατήριο σταθεράς k_1 συσπειρώνεται κατά x και το ελατήριο σταθεράς k_2 επιμηκύνεται κατά x. Άρα η μάζα M δέχεται τις δυνάμεις ίδιας φοράς :

$F_1 = -k_1 x$ και $F_2 = -k_2 x$.

Επομένως ο $2^{ος}$ νόμος του Newton δίνει :

$$\Sigma\vec{F} = M\vec{\alpha} \Rightarrow -k_1 x - k_2 x = M\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{(k_1 + k_2)}{M}x = 0$$

Άρα η μάζα M εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}} \qquad \textbf{(1)}$$

β) Ακολουθώντας τη διαδικασία του ερωτήματος **(α)** όταν η μάζα του συστήματος γίνεται (M+m) προκύπτει ότι η νέα κυκλική συχνότητα ω΄ της ταλάντωσης του συστήματος είναι :

$$\omega' = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M + m}} \qquad \textbf{(2)}$$

Όταν η μάζα M περνά από τη θέση ισορροπίας έχει μέγιστη ταχύτητα ίση με ωA, όπου A το πλάτος της ταλάντωσης.

Επειδή τη στιγμή της συσσώρευσης στο σύστημα δεν ασκούνται δυνάμεις ($\Sigma\vec{F}=0$), ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής. Δηλαδή:

$$\vec{p}_{x_{\alpha\rho\chi.}}=\vec{p}_{x_{\tau\varepsilon\lambda.}}\Rightarrow M\omega A+m0=(M+m)\omega' A'\Rightarrow A'=\frac{M\omega A}{(M+m)\omega'}\overset{(1),(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow A'=\frac{MA}{M+m}\sqrt{\frac{M+m}{M}}\Rightarrow A'=A\sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

το νέο πλάτος της ταλάντωσης.

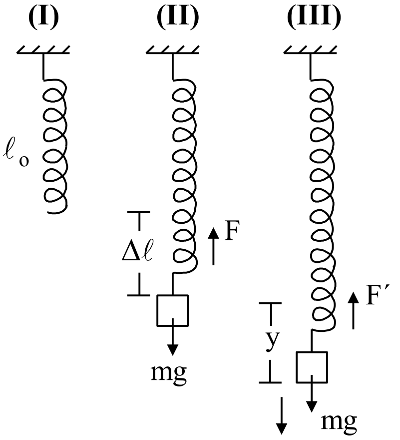
Θέμα 5

Ένα βάρος κρέμεται από ελατήριο και το επιμηκύνει κατά $\Delta\ell$ = 10cm. Αν τραβήξουμε το σώμα προς τα κάτω και στη συνέχεια το αφήσουμε ελεύθερο, ποια θα είναι η περίοδος της ταλάντωσης; Δίνεται: g = 10m/sec^2.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση

Το **Σχήμα I** δείχνει το ελατήριο στο φυσικό του μήκος ℓ_o. Στο **Σχήμα II** έχει κρεμαστεί η μάζα και το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$, καθώς η μάζα ισορροπεί.



Έτσι, στη θέση αυτή ισορροπίας οι δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα είναι το βάρος της mg και η δύναμη του ελατηρίου F = k $\Delta\ell$, όπου k η σταθερά του ελατηρίου. Επειδή το σύστημα ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow mg - k\Delta\ell = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg = k\Delta\ell \qquad \textbf{(1)}$$

Στο **Σχήμα III** η μάζα κινείται απομακρυνόμενη κατά y από τη θέση ισορροπίας και οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτή είναι το βάρος της mg και η δύναμη του ελατηρίου, που τώρα είναι F΄ = k($\Delta\ell$+y). Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Newton για την κίνηση του συστήματος προκύπτει:

$$\Sigma\vec{F}_y = m\vec{\alpha} \Rightarrow mg - k(\Delta\ell + y) = m\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow mg - k\Delta\ell - ky = m\frac{d^2y}{dt^2} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -ky = m\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

Άρα το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{k/m}$. Η περίοδος της ταλάντωσης του συστήματος είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \textbf{(2)}$$

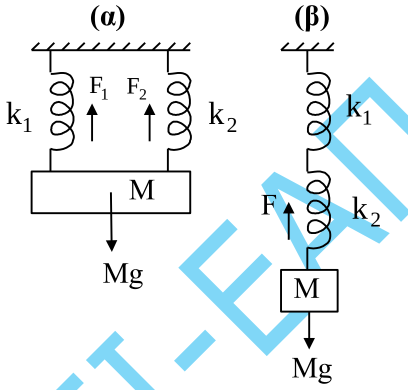
Αλλά από την **(1)** προκύπτει ότι: $\frac{m}{k} = \frac{\Delta\ell}{g}$ οπότε η **(2)** γίνεται:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,1}{10}} = 2\pi\sqrt{0,01} \Rightarrow T = 0,628\,\text{sec}$$

Θέμα 6

Να υπολογιστεί η περίοδος Τ των απλών αρμονικών ταλαντώσεων της μάζας Μ στις περιπτώσεις **(α)** και **(β)**. Θεωρήστε ότι τα ελατήρια έχουν σταθερές k_1 και k_2 αντίστοιχα.

(Τμήμα Αγρονόμων – Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)



Λύση

α) Έστω $\Delta\ell$ η επιμήκυνση των ελατηρίων όταν το σύστημα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας. Λόγω ισορροπίας ισχύει: $Mg = (k_1 + k_2)\Delta\ell$ **(1)**

Κατά τη διέγερση του συστήματος κατά y από τη θέση ισορροπίας οι δυνάμεις των ελατηρίων είναι: $F_1 = k_1(\Delta\ell + y)$ και $F_2 = k_2(\Delta\ell + y)$

Άρα ο 2ος νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F}_y = M\vec{\alpha} \Rightarrow Mg - k_1(\Delta\ell + y) - k_2(\Delta\ell + y) = M\frac{d^2y}{dt^2} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -(k_1 + k_2)y = M\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k_1 + k_2}{M}y = 0$$

Δηλαδή το σύστημα αυτό είναι ισοδύναμο με ένα ελατήριο σταθεράς $k_1 + k_2$ και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}} \quad \text{και περίοδο:} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_1 + k_2}}$$

β) Στην περίπτωση αυτή η ίδια δύναμη F ασκείται σε καθένα από τα ελατήρια που είναι συνδεδεμένα σε σειρά και τα επιμηκύνει διαφορετικά, κατά y_1 και y_2 αντίστοιχα. Επομένως ισχύει:

$$F = k_1y_1 = k_2y_2 \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά είναι: $$y = y_1 + y_2 \overset{(2)}{\Rightarrow} y = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \qquad \textbf{(3)}$$

Για το ισοδύναμο σύστημα ενός ελατηρίου σταθεράς k ισχύει:

$$F = ky \Rightarrow y = \frac{F}{k} \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα η **(3)** λόγω της **(4)** δίνει:

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} \Rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Δηλαδή η περίπτωση **(β)** αντιστοιχεί στην περίπτωση που υπάρχει ένα μόνο ελατήριο σταθεράς $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

Αποδεικνύεται ότι το σύστημα αυτό εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{M(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

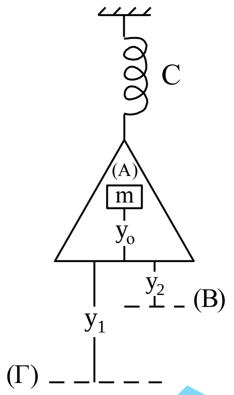
Θέμα 7

Ένα σώμα μάζας m πέφτει από ύψος y_o σ' ένα δίσκο που συγκρατείται από ένα ελατήριο σταθεράς C, όπως φαίνεται στο σχήμα και προσκολλάται στο δίσκο. Υποθέτοντας ότι οι μάζες του ελατηρίου και του δίσκου είναι πολύ μικρές και επομένως μπορούν να αγνοηθούν:

α) Να υπολογίσετε το μέγιστο μήκος y_1, κατά το οποίο θα κατεβεί ο δίσκος.
β) Να δείξετε ότι ο δίσκος θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε τη θέση y_2 γύρω από την οποία θα γίνει η ταλάντωση.
γ) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Στο μέγιστο μήκος y_1 κατά το οποίο θα κατέβει ο δίσκος, το ελατήριο θα έχει επιμηκυνθεί κατά y_1 και το σύστημα θα ακινητοποιηθεί στιγμιαία. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ της αρχικής θέσης (Α) και της τελικής (Γ) προκύπτει:

$$K_A + V_A = K_\Gamma + V_\Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + mg(y_o + y_1) = 0 + \frac{1}{2}Cy_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Cy_1^2 - mgy_1 - mgy_o = 0$$

Οι λύσεις της παραπάνω είναι:

$$y_1 = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 - 4\frac{1}{2}C(-mgy_o)}}{2\frac{1}{2}C} \Rightarrow y_1 = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2Cmgy_o}}{C}$$

Η αρνητική λύση απορρίπτεται οπότε τελικά είναι:

$$y_1 = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2Cmgy_o}}{C}$$

β) Στη θέση y_2 στην οποία το σύστημα ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow mg - Cy_2 = 0 \Rightarrow mg = Cy_2 \Rightarrow y_2 = \frac{mg}{C} \qquad \textbf{(1)}$$

Τη στιγμή που το σώμα κινείται απομακρυνόμενο κατά y από τη θέση ισορροπίας y_2, ο 2ος νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F}_y = m\vec{a} \Rightarrow mg - C(y_2 + y) = m\frac{d^2y}{dt^2} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -Cy = m\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{C}{m}y = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Δηλαδή το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{C/m}$.

γ) Η θέση του συστήματος συναρτήσει του χρόνου είναι η γενική λύση της **(2)**:

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(3)}$$

όπου Α το πλάτος της ταλάντωσης.

Η ταχύτητα του συστήματος είναι:

$$\upsilon(t) = \frac{dy}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(4)}$$

Η **(3)** δίνει: $\cos^2(\omega t + \varphi) = \dfrac{y^2}{A^2}$

και η **(4)** δίνει: $\sin^2(\omega t + \varphi) = \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2}$

Προσθέτοντας τις παραπάνω κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{A^2\omega^2} = 1 \Rightarrow A^2 = y^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2} \Rightarrow A = \sqrt{y^2 + \frac{\upsilon^2}{\omega^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{y^2 + \frac{m\upsilon^2}{C}} \qquad \textbf{(5)}$$

Επομένως για τον υπολογισμό του πλάτους A αρκεί για κάποια θέση y να βρεθεί η ταχύτητα υ. Επειδή είναι γνωστή η θέση ισορροπίας y_2, σχέση **(1)**, αρκεί να υπολογιστεί η ταχύτητα $υ_2$ στη θέση αυτή.
Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ της αρχικής θέσης (Α) και της θέσης ισορροπίας (Β) προκύπτει:

$$K_A + V_A = K_B + V_B \Rightarrow 0 + mg(y_o + y_2) = \frac{1}{2}mυ_2^2 + \frac{1}{2}Cy_2^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow mg\left(y_o + \frac{mg}{C}\right) = \frac{1}{2}mυ_2^2 + \frac{1}{2}C\frac{m^2g^2}{C^2} \Rightarrow \frac{1}{2}mυ_2^2 = mgy_o + \frac{m^2g^2}{2C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow υ_2^2 = 2gy_o + \frac{mg^2}{C} \Rightarrow υ_2 = \sqrt{2gy_o + \frac{mg^2}{C}} \qquad \textbf{(6)}$$

Άρα από την **(5)** προκύπτει:

$$A = \sqrt{y_2^2 + \frac{mυ_2^2}{C}} \overset{(1),(6)}{\Rightarrow} A = \sqrt{\frac{m^2g^2}{C^2} + \frac{2mgy_o}{C} + \frac{m^2g^2}{C^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{2m^2g^2 + 2Cmgy_o}}{C}$$

Θέμα 8

Ένας ομογενής συμπαγής δίσκος μάζας M και ακτίνας R ταλαντώνεται ως φυσικό εκκρεμές περί οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο του δίσκου σε απόσταση r από το κέντρο του.

α) Να αποδείξετε με την ενεργειακή μέθοδο ότι για μικρές γωνίες εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

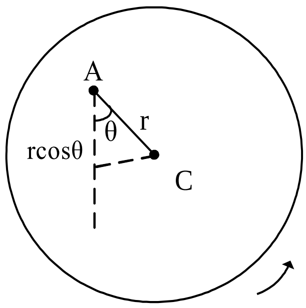
β) Να υπολογίσετε την περίοδο ταλάντωσης και το μήκος του ισοδύναμου απλού εκκρεμούς.

γ) Να βρείτε την τιμή του λόγου r/R που ελαχιστοποιεί την περίοδο.

Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο του και κάθετο στο επίπεδό του είναι $I_c = MR^2/2$.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Στη θέση ισορροπίας το κέντρο μάζας C βρίσκεται κατακόρυφα κάτω από το A. Σε μια τυχαία θέση ο δίσκος έχει περιστραφεί κατά γωνία θ.

Θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το A, η δυναμική ενέργεια του δίσκου λόγω του βάρους είναι:

$$V = -Mgr\cos\theta$$

ενώ η περιστροφική του κινητική ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2} I_A \omega^2 = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2$$

Άρα η ολική ενέργεια του δίσκου είναι:

$$E = K + V = \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2 - Mgr\cos\theta \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή δεν υπάρχουν απώλειες πρέπει η ολική ενέργεια να παραμένει χρονικά σταθερή, οπότε:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{2} I_A \frac{d}{dt}(\dot{\theta}^2) - Mgr\frac{d}{dt}(\cos\theta) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} I_A 2\dot{\theta}\ddot{\theta} - Mgr(-\sin\theta)\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgr}{I_A}\sin\theta = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Steiner υπολογίζεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνά από το A:

$$I_A = I_c M r^2 = \frac{1}{2}MR^2 + Mr^2 \Rightarrow I_A = \frac{M}{2}(R^2 + 2r^2) \qquad \textbf{(3)}$$

Επομένως η **(2)** λόγω της **(3)** και λαμβάνοντας την προσέγγιση ότι για μικρές γωνίες ισχύει $\sin\theta \cong \theta$, γίνεται:

$$\ddot{\theta} + \frac{2gr}{R^2 + 2r^2}\theta = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση συμπίπτει με τη διαφορική εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης **(9-1)**, οπότε ο δίσκος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{2gr}{R^2 + 2r^2}} \qquad \textbf{(4)}$$

β) Η περίοδος ταλάντωσης του δίσκου είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \overset{(4)}{\Rightarrow} T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + 2r^2}{2gr}} \qquad \textbf{(5)}$$

Για τον υπολογισμό του μήκους του ισοδύναμου εκκρεμούς εξισώνουμε την περίοδο του φυσικού εκκρεμούς του δίσκου με αυτή του απλού εκκρεμούς. Δηλαδή:

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + 2r^2}{2gr}} \Rightarrow \ell = \frac{R^2 + 2r^2}{2r} \qquad \textbf{(6)}$$

Άρα, όσον αφορά την περίοδο ταλάντωσης, η μάζα του φυσικού εκκρεμούς του δίσκου μπορεί να θεωρηθεί συγκεντρωμένη σε ένα σημείο του οποίου η απόσταση από τον άξονα Α δίνεται από τη σχέση **(6)**. Το σημείο αυτό λέγεται κέντρο ταλαντώσεως του φυσικού εκκρεμούς.

γ) Το ελάχιστο της περιόδου υπολογίζεται με μηδενισμό της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης T(r). Δηλαδή:

$$\frac{dT}{dr} = 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} 2\pi \frac{\dfrac{4r2gr - 2g(R^2 + 2r^2)}{(2gr)^2}}{2\sqrt{\dfrac{R^2 + 2r^2}{2gr}}} = 0 \Rightarrow 2r^2 - R^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Θέμα 9

Λεπτή ράβδος μήκους ℓ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα κάθετο στη ράβδο, ο οποίος περνάει από το ένα της άκρο Ο. Η ράβδος έχει γραμμική πυκνότητα που δίνεται από τη σχέση:

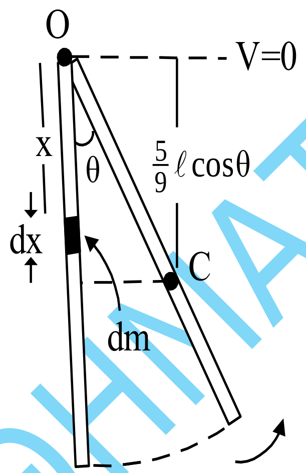
όπου x είναι η απόσταση από το άκρο Ο. $\lambda(x) = \dfrac{2m}{3\ell}\left(1+\dfrac{x}{\ell}\right)$

α) Δείξτε ότι η συνολική μάζα της ράβδου είναι ίση με m, το κέντρο μάζας της βρίσκεται στο σημείο $x_c = \dfrac{5}{9}\ell$ και η ροπή αδρανείας της ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίση με $I_o = \dfrac{7}{18}m\ell^2$.

β) Η ράβδος εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από τον οριζόντιο άξονα. Διατυπώστε την εξίσωση κίνησης της ράβδου συναρτήσει της γωνίας απόκλισης θ της ράβδου από την κατακόρυφη ευθεία που περνά από το άκρο Ο. Δείξτε ότι για μικρές τιμές της γωνίας θ, η ταλάντωση είναι απλή αρμονική και βρείτε τη γωνιακή συχνότητα ω της ταλάντωσης.

(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Από τον ορισμό της γραμμικής πυκνότητας μάζας με ολοκλήρωση θα προκύψει η συνολική μάζα της ράβδου. Δηλαδή:

$$\lambda(x) = \frac{dm}{dx} \Rightarrow dm = \lambda(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^M dm = \frac{2m}{3\ell}\int_0^\ell \left(1+\frac{x}{\ell}\right)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \frac{2m}{3\ell}\left[x+\frac{x^2}{2\ell}\right]_0^\ell = \frac{2m}{3\ell}\left(\ell+\frac{\ell^2}{2\ell}\right) =$$

$$= \frac{2m}{3\ell}\frac{3\ell}{2} \Rightarrow M = m$$

Η συντεταγμένη του κέντρου μάζας της ράβδου δίνεται από τη σχέση:

$$x_c = \frac{1}{m}\int x dm = \frac{1}{m}\int_0^{\ell} x\lambda(x)dx = \frac{2m}{3\ell m}\int_0^{\ell} x\left(1+\frac{x}{\ell}\right)dx = \frac{2}{3\ell}\int_0^{\ell}\left(x+\frac{x^2}{\ell}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3\ell}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3\ell}\right]_0^{\ell} = \frac{2}{3\ell}\left(\frac{\ell^2}{2}+\frac{\ell^3}{3\ell}\right) = \frac{2}{3\ell}\frac{5}{6}\ell^2 \Rightarrow x_c = \frac{5}{9}\ell$$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της δίνεται από τη σχέση:

$$I_o = \int x^2 dm = \int_0^{\ell} x^2\lambda(x)dx = \frac{2m}{3\ell}\int_0^{\ell} x^2\left(1+\frac{x}{\ell}\right)dx = \frac{2m}{3\ell}\int_0^{\ell}\left(x^2+\frac{x^3}{\ell}\right)dx =$$

$$= \frac{2m}{3\ell}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4\ell}\right]_0^{\ell} = \frac{2m}{3\ell}\left(\frac{\ell^3}{3}+\frac{\ell^4}{4\ell}\right) = \frac{2m}{3\ell}\frac{7}{12}\ell^3 \Rightarrow I_o = \frac{7}{18}m\ell^2 \qquad \textbf{(1)}$$

β) Σε μια τυχαία θέση, όπου η ράβδος αποκλίνει κατά γωνία θ, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το Ο, η δυναμική ενέργεια της ράβδου είναι:

$$V = -mg\frac{5}{9}\ell\cos\theta$$

και η κινητική ενέργεια της ράβδου είναι:

$$K = \frac{1}{2}I_o\omega^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\frac{7}{18}m\ell^2\omega^2 \Rightarrow K = \frac{7}{36}m\ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Άρα η ολική της ενέργεια είναι:

$$E = K + V = \frac{7}{36}m\ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mg\frac{5}{9}\ell\cos\theta$$

Επειδή στο σύστημα δεν υπάρχουν απώλειες, η ολική ενέργεια είναι σταθερή κι επομένως ισχύει:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{7}{36}m\ell^2 2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} - mg\frac{5}{9}\ell(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ell\frac{d\theta}{dt}\left(\frac{7}{18}\ell\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{5}{9}g\sin\theta\right)=0\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{10}{7}\frac{g}{\ell}\sin\theta=0$$

2ος τρόπος: Η μόνη δύναμη που ασκείται στη ράβδο είναι το βάρος της mg στο κέντρο μάζας της C, δηλαδή σε απόσταση $x_c=\frac{5}{9}\ell$ από τον άξονα περιστροφής O.

Άρα ο θεμελιώδης νόμος της περιστροφικής κίνησης για την κίνηση της ράβδου δίνει:

$$\Sigma\vec{\tau}_o=I_o\vec{\dot{\omega}}\overset{(1)}{\Rightarrow}-mg\frac{5}{9}\ell\sin\theta=\frac{7}{18}m\ell^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\Rightarrow\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{10}{7}\frac{g}{\ell}\sin\theta=0$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί την εξίσωση κίνησης της ράβδου συναρτήσει της γωνίας απόκλισης θ της ράβδου.

Για μικρές τιμές της γωνίας απόκλισης θ, σύμφωνα με το ανάπτυγμα Mac Laurin είναι $\sin\theta\cong\theta$, οπότε η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{10}{7}\frac{g}{\ell}\theta=0$$

Άρα η ράβδος, υπό την προϋπόθεση αυτή, εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα $\omega=\sqrt{10g/7\ell}$.

Θέμα 10

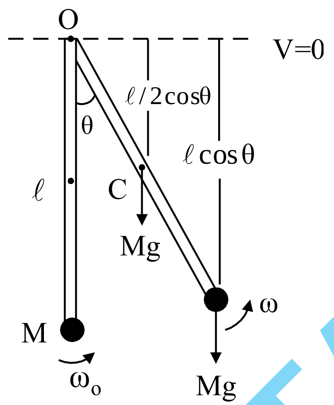
Ευθύγραμμη λεπτή ομοιογενής ράβδος, μάζας Μ και μήκους ℓ, φέρει στο ένα της άκρο σημειακή μάζα Μ. Το σύστημα ράβδος – σημειακή μάζα εκτελεί ταλαντώσεις στο κατακόρυφο επίπεδο, περιστρεφόμενο χωρίς τριβές, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άλλο άκρο της ράβδου και είναι κάθετος σε αυτήν. Τη στιγμή t = 0 το σώμα περνά από την κατακόρυφο και έχει γωνιακή ταχύτητα ω_o.

α) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα του σώματος ω συναρτήσει της γωνιακής απόκλισής του θ από την κατακόρυφο.

β) Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος $\dot{\omega}$ συναρτήσει της γωνίας θ και η συχνότητα για ταλαντώσεις μικρού πλάτους.

(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ της αρχικής (κατακόρυφης) θέσης και της τυχαίας θέσης απόκλισης, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που διέρχεται από τον άξονα περιστροφής Ο προκύπτει:

$$K_{\alpha\rho\chi} + V_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + V_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} I_o \omega_o^2 + \frac{1}{2} M\upsilon_o^2 - Mg\ell - Mg\frac{\ell}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} I_o \omega^2 + \frac{1}{2} M\upsilon^2 - Mg\ell\cos\theta - Mg\frac{\ell}{2}\cos\theta$$

όπου $I_o = \frac{1}{3}M\ell^2$ και $\upsilon_o = \omega_o\ell$, $\upsilon = \omega\ell$ η γραμμική ταχύτητα της σημειακής μάζας.

Άρα: $$\frac{1}{2}\frac{1}{3}M\ell^2\omega_o^2 + \frac{1}{2}M\omega_o^2\ell^2 - \frac{3}{2}Mg\ell =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{3}M\ell^2\omega^2 + \frac{1}{2}M\omega^2\ell^2 - \frac{3}{2}Mg\ell\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\omega_o^2\ell - \frac{3}{2}g(1-\cos\theta) = \frac{2}{3}\omega^2\ell \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_o^2 - \frac{9}{4}\frac{g}{\ell}(1-\cos\theta)} \qquad \textbf{(1)}$$

β) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι το βάρος της ράβδου που εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας της και το βάρος της σημειακής μάζας. Επομένως από τη θεμελιώδη εξίσωση της περιστροφικής κίνησης προκύπτει:

$$\Sigma\vec{\tau}_o = I_{συστ}\dot{\vec{\omega}} \Rightarrow -Mg\frac{\ell}{2}\sin\theta - Mg\ell\sin\theta = \left(\frac{1}{3}M\ell^2 + M\ell^2\right)\dot{\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}Mg\ell\sin\theta = \frac{4}{3}M\ell^2\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{9}{8}\frac{g}{\ell}\sin\theta \qquad \textbf{(2)}$$

2ος τρόπος: Από τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης και τη σχέση **(1)** προκύπτει:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\omega \overset{(1)}{=} \frac{-\frac{9}{4}\frac{g}{\ell}\sin\theta}{2\sqrt{\omega_o^2 - \frac{9}{4}\frac{g}{\ell}(1-\cos\theta)}}\sqrt{\omega_o^2 - \frac{9}{4}\frac{g}{\ell}(1-\cos\theta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{9}{8}\frac{g}{\ell}\sin\theta \qquad \textbf{(2)}$$

Επειδή $\dot{\omega} = d^2\theta/dt^2$ η σχέση **(2)** δίνει την εξίσωση κίνησης του συστήματος:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{9}{8}\frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

Για ταλαντώσεις μικρού πλάτους, δηλαδή για μικρές γωνίες απόκλισης θ ισχύει $\sin\theta \cong \theta$ οπότε η παραπάνω δίνει:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{9}{8}\frac{g}{\ell}\theta = 0$$

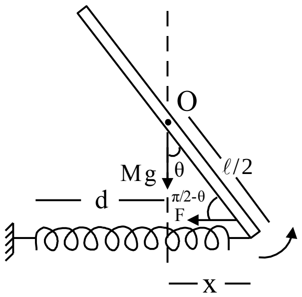
Δηλαδή τότε το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $\omega = \sqrt{9g/8\ell}$.

Θέμα 11

Μια λεπτή και ομοιόμορφη μεταλλική ράβδος μάζας M και μήκους ℓ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο της O και είναι κάθετος σε αυτήν. Ένα ελατήριο σε οριζόντια διεύθυνση, με σταθερά ελατηρίου k και φυσικού μήκους d, έχει συνδεδεμένο το ένα άκρο του με το κάτω άκρο της ράβδου, ενώ το άλλο άκρο του είναι συνδεδεμένο με σταθερό στήριγμα. Αν η ράβδος μετατοπιστεί κατά μια μικρή γωνία θ από την κατακόρυφο και αφεθεί ελεύθερη να δείξετε ότι:
α) η ράβδος εκτελεί απλή αρμονική κίνηση
β) Ποια είναι η περίοδος αυτής της αρμονικής κίνησης;

(Τμήμα Μηχανικών Μεταλλείων – Μεταλλουργών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι το βάρος της Mg που εφαρμόζεται στο κέντρο της O και η δύναμη του ελατηρίου F = kx που εφαρμόζεται στο άκρο της.
Εφαρμόζοντας τη θεμελιώδη εξίσωση της περιστροφικής κίνησης προκύπτει:

$$\Sigma\vec{\tau}_o = I_o\vec{\dot{\omega}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -F\frac{\ell}{2}\sin(\pi/2-\theta) = I_o\dot{\omega} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά: $\sin(\pi/2-\theta)=\cos\theta$, $F = kx$ και $I_o = \frac{1}{12}M\ell^2$ οπότε η **(1)** δίνει:

$$-kx\frac{\ell}{2}\cos\theta = \frac{1}{12}M\ell^2\dot{\omega} \Rightarrow -kx\cos\theta = \frac{1}{6}M\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά: $\sin\theta = \frac{x}{\ell/2} \Rightarrow x = \frac{\ell}{2}\sin\theta$ οπότε η **(2)** γίνεται:

$$-k\frac{\ell}{2}\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{6}M\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow -k\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{3}M\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3k}{M}\sin\theta\cos\theta = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Για μικρές γωνίες απόκλισης θ ισχύουν: $\sin\theta \cong \theta$ και $\cos\theta \cong 1$ οπότε η **(3)** γίνεται: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3k}{M}\theta = 0$

Άρα το σύστημα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $\omega = \sqrt{3k/M}$.

β) Η περίοδος αυτής της αρμονικής κίνησης είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{3k}}$

Θέμα 12

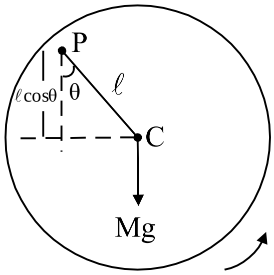
Ένα φυσικό εκκρεμές έχει το σχήμα συμπαγούς δίσκου ακτίνας R. Το εκκρεμές ταλαντώνεται γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο του δίσκου και σε απόσταση ℓ από το κέντρο του δίσκου.

α) Δείξτε ότι η συχνότητα των ταλαντώσεων του εκκρεμούς είναι $\omega = \sqrt{\dfrac{g\ell}{R^2/2+\ell^2}}$

β) Για ποια τιμή του ℓ το εκκρεμές αποκτά μέγιστη συχνότητα ταλάντωσης;

(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Ο θεμελιώδης νόμος της περιστροφικής κίνησης δίνει:

$$\Sigma\vec{\tau}_P = I_P\dot{\vec{\omega}} \Rightarrow -Mg\ell\sin\theta = I_P\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mg\ell}{I_P}\sin\theta = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

2^ος^ τρόπος: Για τον υπολογισμό της εξίσωσης κίνησης του δίσκου μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ολική του ενέργεια.
Θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο, που διέρχεται από τον άξονα περιστροφής P η δυναμική ενέργεια του δίσκου λόγω του βάρους είναι:

$$V = -Mg\ell\cos\theta$$

Ενώ η περιστροφική του κινητική ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}I_P\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Άρα η ολική ενέργεια του δίσκου είναι:

$$E = K + V = \frac{1}{2}I_P\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - Mg\ell\cos\theta$$

Επειδή δεν υπάρχουν απώλειες πρέπει η ολική ενέργεια να παραμένει χρονικά σταθερή, οπότε:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}I_P 2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} - Mg\ell(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_P \frac{d^2\theta}{dt^2} + Mg\ell \sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mg\ell}{I_P}\sin\theta = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Steiner κι επειδή $I_c = \frac{1}{2}MR^2$ η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής P είναι:

$$I_P = I_c + M\ell^2 = \frac{1}{2}MR^2 + M\ell^2$$

Επομένως η εξίσωση κίνησης **(1)** γίνεται:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mg\ell}{\frac{1}{2}MR^2 + M\ell^2}\sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\ell}{\frac{R^2}{2} + \ell^2}\sin\theta = 0$$

Για μικρές γωνίες απόκλισης ισχύει sinθ ≅ θ οπότε η παραπάνω γίνεται:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g\ell}{\frac{R^2}{2} + \ell^2}\theta = 0$$

Άρα ο δίσκος για μικρές γωνίες απόκλισης εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{g\ell}{R^2/2 + \ell^2}}$.

β) Για τον προσδιορισμό της τιμής του ℓ για την οποία η συχνότητα ω γίνεται μέγιστη, αρκεί να προσδιοριστεί το μέγιστο της παραπάνω συνάρτησης $\omega(\ell)$ ή ισοδύναμα της $\omega^2(\ell)$ για απλούστευση πράξεων. Δηλαδή:

$$\frac{d\omega^2}{d\ell} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\ell}\left(\frac{g\ell}{\frac{R^2}{2} + \ell^2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{g\left(\frac{R^2}{2} + \ell^2\right) - g\ell 2\ell}{\left(\frac{R^2}{2} + \ell^2\right)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\frac{R^2}{2} + g\ell^2 - 2g\ell^2 = 0 \Rightarrow \frac{R^2}{2} - \ell^2 = 0 \Rightarrow \ell^2 = \frac{R^2}{2} \Rightarrow \ell = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

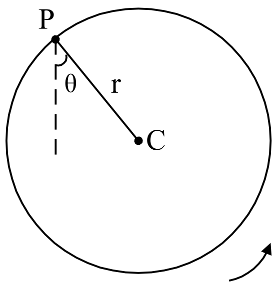
Κι επειδή αν γίνουν οι πράξεις προκύπτει ότι $\left.\dfrac{d^2\omega^2}{d\ell^2}\right|_{\ell = R/\sqrt{2}} < 0$ η τιμή $\ell = R/\sqrt{2}$ αντιστοιχεί στο μέγιστο της συνάρτησης $\omega^2(\ell)$ άρα και της $\omega(\ell)$.

Θέμα 13

Ομογενής κυκλικός δίσκος ακτίνας r ισορροπεί σε κάποιο σημείο της περιφέρειάς του. Αν μετακινήσουμε το δίσκο από τη θέση ισορροπίας κατά μικρή γωνία, αποδείξτε ότι το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση, της οποίας να υπολογίσετε την περίοδο. Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του: $I_c = mr^2/2$.

(Κατατακτήριες εξετάσεις για Χημείας Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



Στην περίπτωση αυτή ο άξονας περιστροφής του δίσκου βρίσκεται σε ένα σημείο πάνω στην περιφέρειά του, δηλαδή σε απόσταση r από το κέντρο μάζας του. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το προηγούμενο θέμα (υπάρχουν πάλι δύο τρόποι) προκύπτει η εξίσωση κίνησης του δίσκου ως:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgr}{I_P}\sin\theta = 0$$

Από το θεώρημα του Steiner είναι:

$$I_P = I_c + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 \Rightarrow I_P = \frac{3}{2}mr^2$$

Άρα: $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2g}{3r}\sin\theta = 0$$

Και επειδή για μικρές γωνίες απόκλισης ισχύει $\sin\theta \cong \theta$ τελικά προκύπτει:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2g}{3r}\theta = 0$$

Δηλαδή ο δίσκος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $\omega = \sqrt{2g/3r}$. Η περίοδος της ταλάντωσης του δίσκου είναι:

$$T = 2\pi/\omega \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{3r/2g}$$

Θέμα 14

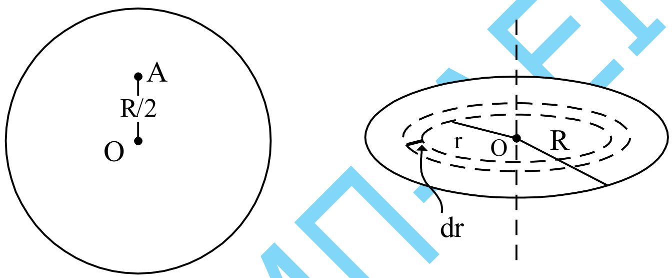
Δίσκος με μάζα M και ακτίνα R, μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από οριζόντιο άξονα A, που απέχει απόσταση R/2 από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του.

α) Να αποδειχθεί ότι η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα A είναι $I_A = (3/4)MR^2$.

β) Να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης του δίσκου για ελεύθερη περιστροφή περί τον άξονα A και να βρεθεί η γωνιακή συχνότητα ω για μικρές περιστροφικές ταλαντώσεις του δίσκου.

(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Σχήμα 1 **Σχήμα 2**

α) Αρχικά θα υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του, που διέρχεται από το κέντρο του. Θεωρώντας ένα στοιχειώδη κυκλικό δακτύλιο του δίσκου μάζας dm, ακτίνας r και πλάτους dr είναι:
$dm = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$ (όπου η στοιχειώδης επιφάνεια dS υπολογίζεται εύκολα με διαφόριση της επιφάνειας κύκλου ακτίνας r, δηλαδή $S = \pi r^2 \Rightarrow dS = 2\pi r dr$).

Αλλά: $\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R^2}$ οπότε: $dm = \frac{2M}{R^2} r dr$ **(1)**

Άρα η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα O είναι:

$$I_o = \int r^2 dm \overset{(1)}{=} \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr \Rightarrow I_o = \frac{1}{2}MR^2$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Steiner, η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον παράλληλο του O άξονα A είναι:

$$I_A = I_o + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{4}MR^2 \Rightarrow I_A = \frac{3}{4}MR^2$$

β) Ακολουθώντας έναν από τους δύο τρόπους, όπως έγινε προηγούμενα, προκύπτει η εξίσωση κίνησης του δίσκου για ελεύθερη περιστροφή περί τον άξονα Α ως:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{Mg\ell}{I_A}\sin\theta=0$$

Αλλά στην περίπτωση αυτή είναι $\ell=R/2$ και $I_A=(3/4)MR^2$ οπότε η εξίσωση κίνησης γίνεται:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2}{3}\frac{g}{R}\sin\theta=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Για μικρές περιστροφικές ταλαντώσεις του δίσκου ισχύει $\sin\theta\cong\theta$, οπότε η **(2)** γίνεται:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2g}{3R}\theta=0$$

Δηλαδή ο δίσκος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα $\omega=\sqrt{2g/3R}$.

Θέμα 15

Κύλινδρος μάζας M ακτίνας R, στηρίζεται σε τραχεία οριζόντια επιφάνεια συγκρατούμενος από ελατήριο σταθεράς k. Αν ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει να υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί το κέντρο μάζας του. Δίνεται:

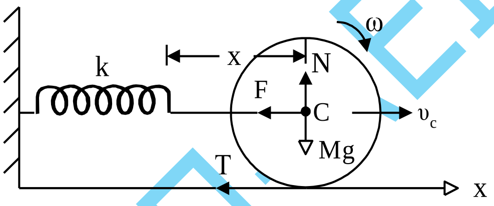
$$I_c = MR^2/2.$$

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση

1ος τρόπος

Θεωρούμε τυχαία θέση όπου το κέντρο μάζας C του κυλίνδρου έχει μετατοπιστεί κατά x από τη θέση ισορροπίας του.



Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση.

Για την μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = M\vec{\alpha} \Rightarrow -F - T = M\ddot{x} \Rightarrow -kx - T = M\ddot{x} \quad \textbf{(1)}$$

Για την περιστροφική κίνηση ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_c = I_c\dot{\vec{\omega}} \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} \quad \textbf{(2)}$$

Αλλά λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση είναι :

$$\upsilon_c = \omega R \Rightarrow \frac{d\upsilon_c}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{\ddot{x}}{R} \quad \textbf{(3)}$$

Οπότε η **(2)** γίνεται λόγω της **(3)**:

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\frac{\ddot{x}}{R} \Rightarrow T = \frac{M\ddot{x}}{2} \quad \textbf{(4)}$$

Τελικά αντικαθιστώντας την **(4)** στην **(1)** προκύπτει:

$$M\ddot{x} = -kx - \frac{M\ddot{x}}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}M\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2}{3}\frac{k}{M}x = 0$$

Δηλαδή το κέντρο μάζας C του κυλίνδρου εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα: $\omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$

Οπότε η περίοδος της ταλάντωσης είναι: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$

2ος τρόπος (ενεργειακή μέθοδος)

Επειδή ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση, η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2}M\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 \qquad \textbf{(5)}$$

Αλλά λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση είναι $\upsilon_c = \omega R = \dot{\theta}R = \dot{x} \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{x}/R$
και η **(5)** γίνεται :

$$K = \frac{3}{4}M\dot{x}^2$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος ισούται με τη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου:

$$V = -\int_0^x F dx = k\int_0^x x dx \Rightarrow V = \frac{1}{2}kx^2$$

Οπότε η ολική ενέργεια είναι : $E = K + V = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ **(6)**

Επειδή η ολική ενέργεια παραμένει χρονικά σταθερή ισχύει:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \overset{(6)}{\Rightarrow} \left(\frac{3}{2}M\ddot{x} + kx\right)\dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{3M}x = 0$$

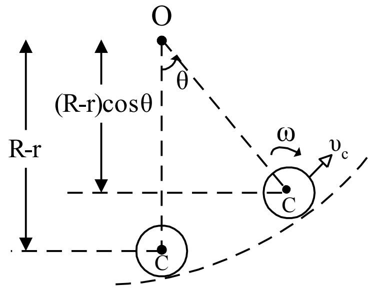
Άρα : $\omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$ και $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}}$

Θέμα 16

Σφαίρα μάζας M και ακτίνας r κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε κυκλική επιφάνεια ακτίνας R. Να υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης που εκτελεί η σφαίρα όταν απομακρυνθεί ελαφρά από τη θέση ισορροπίας της. Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς το κέντρο μάζας της $I_c = 2Mr^2/5$.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



Το κέντρο μάζας C της σφαίρας εκτελεί κυκλική κίνηση με κέντρο το O και ακτίνα (R-r). Επομένως η γραμμική ταχύτητα του C είναι:

$$\upsilon_c = \dot{\theta}(R - r) \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης λόγω της κύλισης χωρίς ολίσθηση της σφαίρας, η σχέση που συνδέει τη γραμμική ταχύτητα του C με τη γωνιακή ταχύτητα της περιστροφικής κίνησης της σφαίρας είναι:

$$\upsilon_c = \omega r \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις **(1)**, **(2)** προκύπτει ότι: $$\omega = \frac{R-r}{r}\dot{\theta} \qquad \textbf{(3)}$$

Η κινητική ενέργεια της σύνθετης κίνησης της σφαίρας είναι:

$$K = \frac{1}{2}M\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 \overset{(1),(3)}{\Rightarrow} K = \frac{1}{2}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}Mr^2\right)\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{7}{10}M(R-r)^2\dot{\theta}^2 \qquad \textbf{(4)}$$

Θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο από το O, η δυναμική ενέργεια της σφαίρας στην τυχαία θέση είναι:

$$V = -Mg(R-r)\cos\theta \qquad \textbf{(5)}$$

Επειδή η ολική ενέργεια παραμένει χρονικά σταθερή ισχύει:

$$\frac{dE}{dt}=0\overset{(4),(5)}{\Rightarrow}\frac{d}{dt}\left[\frac{7}{10}M(R-r)^2\dot{\theta}^2-Mg(R-r)\cos\theta\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\frac{7}{5}M(R-r)^2\ddot{\theta}+Mg(R-r)\sin\theta\right]\dot{\theta}=0$$

Κι επειδή $\dot{\theta}\neq 0$ και για μικρές γωνίες $\sin\theta\cong\theta$ η παραπάνω γράφεται:

$$\ddot{\theta}+\frac{5g}{7(R-r)}\theta=0$$

η οποία είναι διαφορική εξίσωση απλής αρμονικής ταλάντωσης με κυκλική

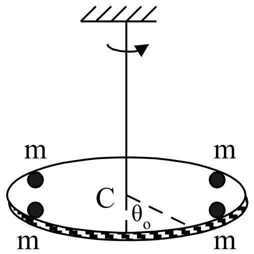
συχνότητα $\omega=\sqrt{\dfrac{5g}{7(R-r)}}$ και περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{7(R-r)}{5g}}$

Θέμα 17

Ένα στροφικό εκκρεμές αποτελείται από σύρμα με συντελεστή στρέψης D, δίσκο μάζας M και ακτίνας R και 4 σημειακές μάζες m που είναι τοποθετημένες συμμετρικά στην περιφέρεια του δίσκου. Αν ο δίσκος εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του στρεφόμενος κατά γωνία θ_o, σε πόσο χρόνο θα επανέλθει στην αρχική του θέση; Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου $I_c = MR^2/2$.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



Το στροφικό αυτό εκκρεμές θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση, η διαφορική εξίσωση της οποίας είναι:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{I_c}\theta = 0$$

όπου για το σύστημα δίσκου – μαζών είναι:

$$I_c = \frac{1}{2}MR^2 + 4mR^2 = (M/2 + 4m)R^2$$

Άρα η περίοδος ταλάντωσης του συστήματος είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(M/2+4m)R^2}{D}}$$

Επομένως αφού η περίοδος είναι ο χρόνος στον οποίο το σύστημα θα κάνει μια πλήρη ταλάντωση από την αρχική εκτροπή θ_o, ο δίσκος θα επανέλθει στην αρχική του θέση (θέση ισορροπίας) σε χρόνο:

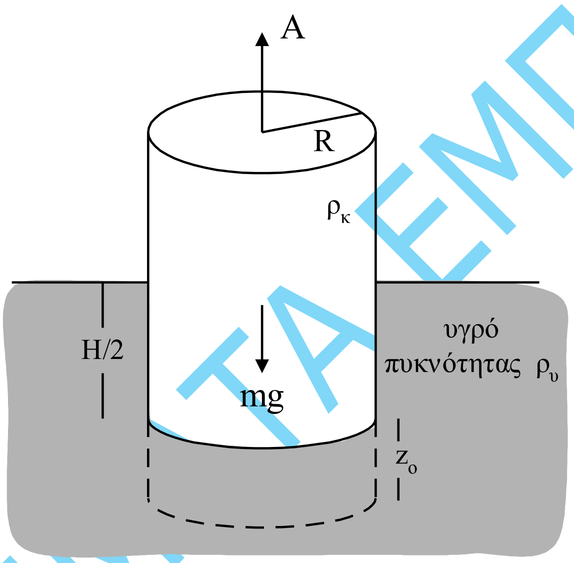
$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{(M/2+4m)R^2}{D}}$$

Θέμα 18

Ένας ομογενής κύλινδρος ακτίνας R και ύψους H ισορροπεί εντός υγρού όταν είναι βυθισμένος κατά το ήμισυ του ύψους του. Η πυκνότητα του κυλίνδρου είναι ρ_κ και αυτή του υγρού ρ_υ.
α) Βρείτε τη σχέση μεταξύ ρ_κ και ρ_υ.
β) Βυθίζουμε τον κύλινδρο κατά μια μικρή επιπλέον απόσταση z_o και εν συνεχεία τον αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί. Γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης του κυλίνδρου (κατά την κατακόρυφη διεύθυνση), υποθέτοντας ότι οι μόνες δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι το βάρος του και η άνωση. Δείξτε ότι υπό την επίδραση των ανωτέρω δυνάμεων, το σώμα θα αρχίσει να εκτελεί ταλαντώσεις της μορφής $z = z_o\cos\omega t$ και βρείτε τη συχνότητα ταλάντωσης ω.
γ) Γνωρίζουμε ότι στην πράξη το σώμα δεν ταλαντώνεται επ' άπειρον αλλά αργά ή γρήγορα έρχεται σε κατάσταση ηρεμίας στη θέση ισορροπίας. Γιατί;

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι το βάρος του $B = mg$ και η άνωση A. Επειδή ο κύλινδρος είναι ομογενής η μάζα του είναι $m = \rho_\kappa V = \rho_\kappa \pi R^2$ οπότε:

$$B = \rho_\kappa \pi R^2 H g \qquad \textbf{(1)}$$

Σύμφωνα με την αρχή του Αρχιμήδη, η δύναμη της άνωσης είναι ίση με το βάρος του υγρού που το σώμα εκτοπίζει. Στη θέση ισορροπίας το μήκος του κυλίνδρου που είναι βυθισμένο μέσα στο υγρό είναι H/2 κι επομένως η μάζα του υγρού που εκτοπίζεται από το βυθισμένο κύλινδρο είναι: $m' = \rho_\upsilon V' = \rho_\upsilon \pi R^2 \frac{H}{2}$. Άρα η δύναμη της άνωσης που ασκείται στο σώμα στη θέση ισορροπίας είναι:

$$A = m' g \Rightarrow A = \rho_\upsilon \pi R^2 \frac{H}{2} g \qquad \textbf{(2)}$$

Έτσι λόγω ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow A = B \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \rho_\upsilon \pi R^2 \frac{H}{2} g = \rho_\kappa \pi R^2 H g \Rightarrow \frac{\rho_\upsilon}{2} = \rho_\kappa \qquad \textbf{(3)}$$

β) Όταν ο κύλινδρος βυθίζεται κατά μια επιπλέον απόσταση z_o η δύναμη της άνωσης μεταβάλλεται, γιατί εκτοπίζεται περαιτέρω υγρό.
Τη στιγμή που ο κύλινδρος κινείται απομακρυνόμενος κατά z από τη θέση ισορροπίας η δύναμη της άνωσης είναι:

$$A = \rho_\upsilon \pi R^2 \left(\frac{H}{2} + z\right) g \qquad \textbf{(4)}$$

Επομένως σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton η εξίσωση κίνησης του κυλίνδρου είναι:

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow B - A = m\alpha \overset{(1),(4)}{\Rightarrow} \rho_\kappa \pi R^2 H g - \rho_\upsilon \pi R^2 \left(\frac{H}{2} + z\right) g = \rho_\kappa \pi R^2 H \frac{d^2 z}{dt^2} \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \rho_\kappa \pi R^2 H g - 2\rho_\kappa \pi R^2 \left(\frac{H}{2} + z\right) g = \rho_\kappa \pi R^2 H \frac{d^2 z}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\rho_\kappa \pi R^2 z g = \rho_\kappa \pi R^2 H \frac{d^2 z}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2zg = H \frac{d^2 z}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2g}{H} z = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

Δηλαδή ο κύλινδρος θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{2g}{H}}$.
Κι επειδή για t = 0 η απόσταση από τη θέση ισορροπίας είναι z_o η γενική λύση της **(5)** έχει τη μορφή: $z(t) = z_o \cos\omega t$

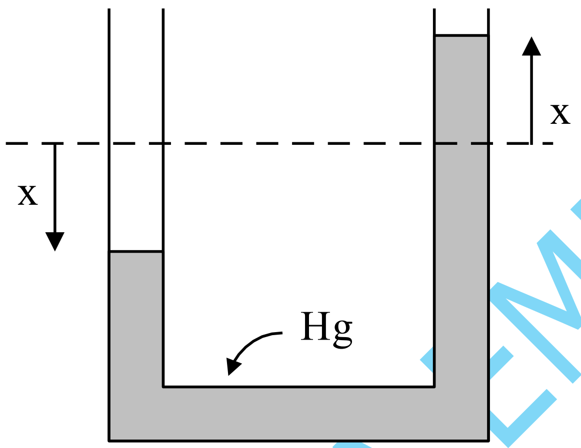
γ) Επειδή στην πραγματικότητα ασκούνται και δυνάμεις τριβής μεταξύ του υγρού και της επιφάνειας του κυλίνδρου (τις οποίες δεν λάβαμε υπόψη στα παραπάνω), αυτό έχει ως συνέπεια να φθίνει το πλάτος ταλάντωσης και μετά από ορισμένο χρόνο το σώμα να έρχεται σε κατάσταση ηρεμίας στη θέση ισορροπίας. Δηλαδή στην πράξη είναι φθίνουσα ταλάντωση, λόγω των τριβών.

Θέμα 19

Σωλήνας σχήματος U περιέχει ποσότητα υδραργύρου με συνολικό μήκος L. Ο υδράργυρος, που αρχικά ισορροπεί, μετατοπίζεται (με συμπίεση του ενός σκέλους) από τη θέση ισορροπίας.
α) Να δειχθεί ότι ο υδράργυρος θα κάνει απλή αρμονική κίνηση.
β) Να υπολογιστεί η περίοδος της κίνησης, αν L = 20cm.
Δίνεται: $g = 10m/sec^2$.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



α) Συμπιέζοντας την ελεύθερη επιφάνεια του υδραργύρου κατά x από τη θέση ισορροπίας, το βάρος του υδραργύρου ύψους 2x αποτελεί τη δύναμη επαναφοράς του συστήματος.
Η μάζα του υδραργύρου μήκους 2x είναι:

$$m' = \rho V' = \rho S 2x \qquad \textbf{(1)}$$

όπου ρ η πυκνότητα του υδραργύρου και S η διατομή του σωλήνα.

Ενώ η ολική μάζα του υδραργύρου είναι: $m = \rho V = \rho S L$ **(2)**

Επομένως υπό την επίδραση της δύναμης επαναφοράς $F = m' g \overset{(1)}{\Rightarrow} F = \rho S 2xg$ κινείται όλη η μάζα του υδραργύρου και όταν κινείται απομακρυνόμενο από τη θέση ισορροπίας ο 2ος νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow -F = m\frac{d^2x}{dt^2} \overset{(2)}{\Rightarrow} -\rho S 2xg = \rho S L\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{L}x = 0$$

Επειδή η παραπάνω σχέση αποτελεί τη διαφορική εξίσωση της απλής αρμονικής κίνησης, προκύπτει ότι ο υδράργυρος θα εκτελέσει απλή αρμονική κίνηση με κυκλική συχνότητα:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}} \qquad \textbf{(3)}$$

β) Η περίοδος της κίνησης είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \overset{(3)}{\Rightarrow} T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2m}{20m/sec^2}} = 2\pi \cdot 0{,}1 \Rightarrow T = 0{,}2\pi \text{ sec}$$