ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΧΟΡΔΗΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

Βρείτε τους σχηματισμούς και τις συχνότητες των τριών πρώτων κανονικών τρόπων εγκάρσιας ταλάντωσης μιας συνεχούς ιδανικής χορδής μήκους L και γραμμικής πυκνότητας ρ, η οποία τείνεται με τάση T. Θεωρείστε ότι τα δύο άκρα της χορδής είναι ελεύθερα, δηλαδή είναι συνδεδεμένα με δύο δακτυλίδια αμελητέας μάζας, τα οποία ολισθαίνουν χωρίς τριβή πάνω σε δύο παράλληλες ράβδους αντίστοιχα. Να δείξετε ότι ο χαμηλότερος κανονικός τρόπος ταλάντωσης έχει "άπειρο μήκος κύματος". Ποια είναι η τιμή της μικρότερης συχνότητας και σε τι είδους κίνηση αντιστοιχεί;

Λύση

Η κίνηση της χορδής ικανοποιεί την κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad ,$$

(όπου $\upsilon = \sqrt{T/\rho}$ είναι η ταχύτητα διάδοσης της κίνησης στη χορδή) η γενική λύση της οποίας για τη μετατόπιση y(x,t) της χορδής σε ένα συγκεκριμένο τρόπο (στάσιμο κύμα) είναι της μορφής:

$$y(x,t) = (A\sin kx + B\cos kx)\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $k=2\pi/\lambda$ είναι ο κυματάριθμος και λ το μήκος κύματος.

Επειδή τα άκρα της χορδής είναι ελεύθερα ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες τύπου Newmann, δηλαδή η κλίση της χορδής στα ελεύθερα άκρα της είναι κάθε χρονική στιγμή ίση με μηδέν. Δηλαδή ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες:

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως επειδή η **(1)** πρέπει να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες **(2)** για κάθε χρονική στιγμή t, θα ισχύει:

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \left.(Ak\cos kx - Bk\sin kx)\cos(\omega t+\varphi)\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Ak\cos 0 - Bk\sin 0)\cos(\omega t+\varphi) = 0 \Rightarrow Ak\cos(\omega t+\varphi) = 0 \Rightarrow A = 0$$

Οπότε η **(1)** παίρνει τη μορφή: $y(x,t) = B\cos kx \cos(\omega t + \varphi)$ **(3)**

Έτσι από τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη προκύπτει:

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} -Bk\sin kx \cos(\omega t + \varphi)\big|_{x=L} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -Bk\sin kL \cos(\omega t + \varphi) = 0 \underset{\forall t}{\overset{B,k\neq 0}{\Rightarrow}} \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0,1,2,... \qquad \textbf{(4)}$$

Επίσης τα μήκη κύματος είναι:

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} \overset{(4)}{=} \frac{2\pi}{n\pi / L} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 0,1,2,... \qquad \textbf{(5)}$$

Συνεπώς από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτουν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ως:

$$\upsilon = \lambda f \Rightarrow f_n = \frac{\upsilon}{\lambda_n} \overset{(4)}{=} \frac{n}{2L}\upsilon \Rightarrow f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad n = 0,1,2,... \qquad \textbf{(6)}$$

Κι επειδή $\omega = 2\pi f$ είναι:

$$\omega_n = 2\pi f_n \overset{(6)}{\Rightarrow} \omega_n = \frac{\pi n}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad n = 0,1,2,... \qquad \textbf{(7)}$$

Άρα ο χαμηλότερος κανονικός τρόπος ταλάντωσης, για n=0 σύμφωνα με την **(7)** έχει συχνότητα $\omega_o = 0$ και σύμφωνα με την **(5)** έχει $\lambda_o = \infty$, δηλαδή έχει άπειρο μήκος κύματος.

Επίσης επειδή: $\upsilon_o = f_o \lambda_o \Rightarrow f_o = \upsilon_o / \lambda_o = 0 \Rightarrow \upsilon_o = 0$ ή $\upsilon_o = \text{σταθ.}$

Δηλαδή η χορδή είτε είναι ακίνητη είτε κινείται με σταθερή ταχύτητα.

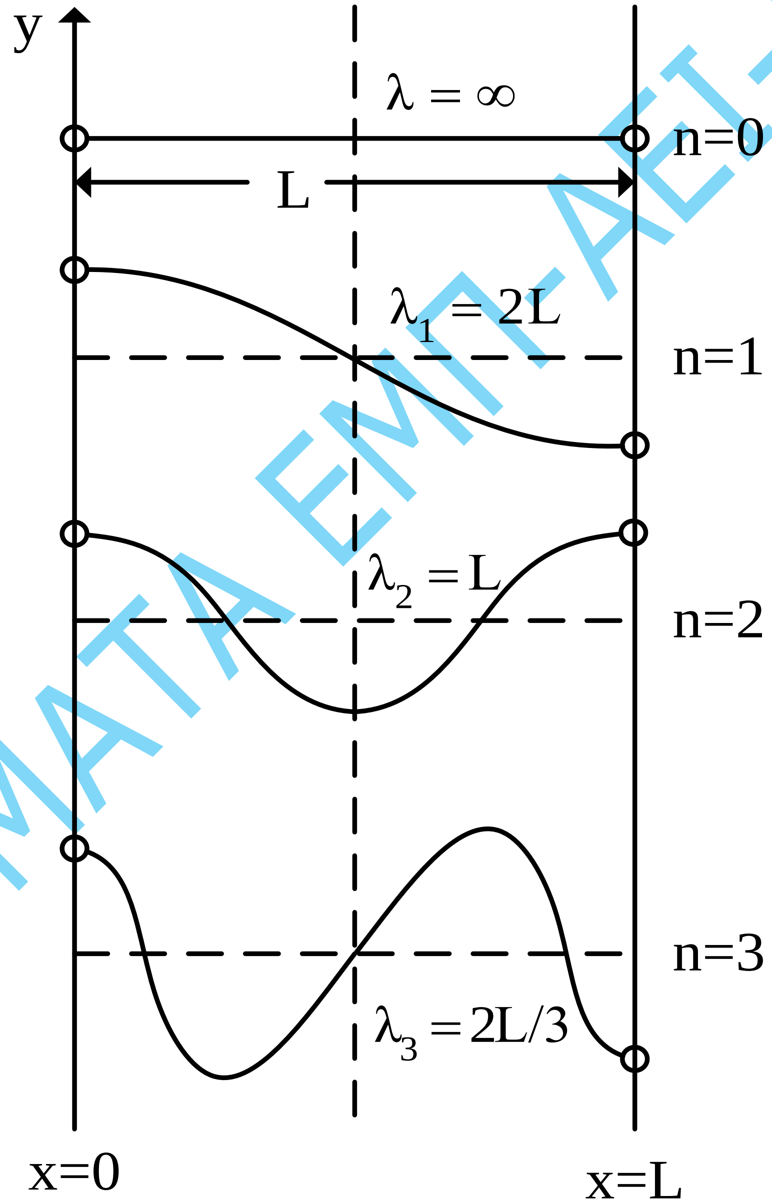
Για τους τρεις πρώτους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, σύμφωνα με τις **(4)**, **(5)** και **(7)** ισχύει:

Για **n=1**: $k_1 = \frac{\pi}{L}$, $\lambda_1 = 2L$, $\omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$

Για **n=2**: $k_2 = \frac{2\pi}{L}$, $\lambda_2 = L$, $\omega_2 = \frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} = 2\omega_1$

Για **n=3**: $k_3 = \frac{3\pi}{L}$, $\lambda_3 = \frac{2L}{3}$, $\omega_3 = \frac{3\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} = 3\omega_1$

Η σχηματική αναπαράσταση αυτών των τρόπων ταλάντωσης φαίνονται ακολούθως:



Μεθοδολογία

Είδη οριακών συνθηκών χορδής:

1) Αν μια χορδή είναι πακτωμένη, δηλαδή έχει σταθερά ακλόνητα άκρα, τότε ισχύουν οι **συνθήκες Dirichlet**:

$$y(x=0,t)=0 \quad \text{και} \quad y(x=L,t)=0$$

2) Αν μια χορδή είναι ελεύθερη, δηλαδή τα άκρα της μπορούν να κινούνται ελεύθερα μέσω αβαρών δακτυλίων, τότε ισχύουν οι **συνθήκες Neumann**:

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \quad \text{και} \quad \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0$$

3) Στη γενική περίπτωση, όπου μια χορδή έχει ένα σταθερό (στο x=0) και ένα ελεύθερο (στο x=L) άκρο τότε ισχύει συνδυασμός των παραπάνω. Δηλαδή:

$$y(x=0,t)=0 \quad \text{και} \quad \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0$$

ΘΕΜΑ 2

Μια ιδανική χορδή γραμμικής πυκνότητας ρ είναι τεντωμένη με δύναμη Τ και έχει σταθερό άκρο στο x=L, ενώ το άκρο στο x=0 είναι ελεύθερο να ολισθαίνει χωρίς τριβή κατά μήκος στυλίσκου μέσω αβαρούς δακτυλιδιού.

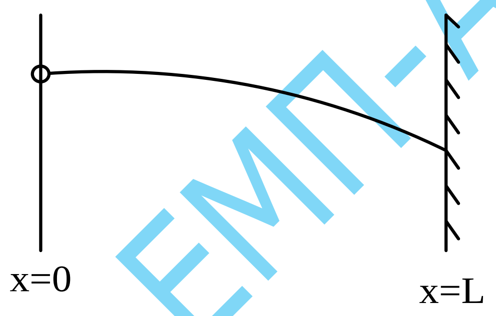
α) Βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

β) Όταν ταλαντώνεται μόνο με τη συχνότητα ω_n, πόση είναι η ολική ενέργεια E_n;

Λύση

α) Η γενική εξίσωση της μετατόπισης y(x,t) της χορδής από τη θέση ισορροπίας είναι:

$$y(x,t) = (A\sin kx + B\cos kx)\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(1)}$$



Λόγω όμως του ελεύθερου άκρου της χορδής στο x=0 ισχύει η συνοριακή συνθήκη:

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \left.(Ak\cos kx - Bk\sin kx)\cos(\omega t+\varphi)\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Ak\cos 0 - Bk\sin 0)\cos(\omega t+\varphi) = 0 \Rightarrow Ak\cos(\omega t+\varphi) = 0 \underset{\forall t}{\overset{k\neq 0}{\Rightarrow}} A = 0$$

Άρα η **(1)** γίνεται: $y(x,t) = B\cos kx\cos(\omega t+\varphi)$ **(2)**

Επίσης λόγω του ακλόνητου άκρου στο σημείο x=L ισχύει η συνοριακή συνθήκη:

$$y(x=L,t) = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} B\cos kL\cos(\omega t+\varphi) = 0 \underset{\forall t}{\overset{B\neq 0}{\Rightarrow}} \cos kL = 0 \Rightarrow kL = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_n = (2n+1)\frac{\pi}{2L}, \qquad n = 0,1,2,... \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, σύμφωνα με τη θεμελιώδη κυματική εξίσωση είναι:

$\upsilon = \lambda_n f_n$, όπου $\lambda_n = \dfrac{2\pi}{k_n}$ το μήκος κύματος, $f_n = \dfrac{\omega_n}{2\pi}$ η συχνότητα και $\upsilon = \sqrt{T/\rho}$ η ταχύτητα διάδοσης κίνησης στη χορδή.

Οπότε:

$$\upsilon = \frac{2\pi}{k_n}\frac{\omega_n}{2\pi} \Rightarrow \upsilon = \frac{\omega_n}{k_n} \Rightarrow \omega_n = k_n\upsilon \overset{(3)}{\Rightarrow} \omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \qquad n = 0,1,2,... \ \textbf{(4)}$$

β) Όταν η χορδή ταλαντώνεται με συχνότητα ω_n, δηλαδή με κάποιο κανονικό τρόπο ταλάντωσης τότε έχει κινητική ενέργεια :

$$K = \frac{1}{2}\int_0^L \rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx \qquad \textbf{(5)}$$

και δυναμική ενέργεια: $V = \dfrac{T}{2}\displaystyle\int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$ **(6)**

Αλλά από την **(2)** προκύπτει:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega_n B \cos k_n x \sin(\omega_n t + \varphi) \quad \text{και} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -Bk_n \sin k_n x \cos(\omega_n t + \varphi)$$

Συνεπώς η **(5)** δίνει:

$$K = \frac{1}{2}\rho\omega_n^2 B^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi)\int_0^L \cos k_n x dx = \frac{1}{2}\rho\omega_n^2 B^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi)\frac{L}{2} \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} K = \frac{B^2}{4} LTk_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi) \qquad \textbf{(7)}$$

Ενώ η **(6)** δίνει:

$$V = \frac{T}{2} B^2 k_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi) \int_0^L \sin^2 k_n x dx = \frac{T}{2} B^2 k_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi) \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{B^2}{4} LTk_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi) \qquad \textbf{(8)}$$

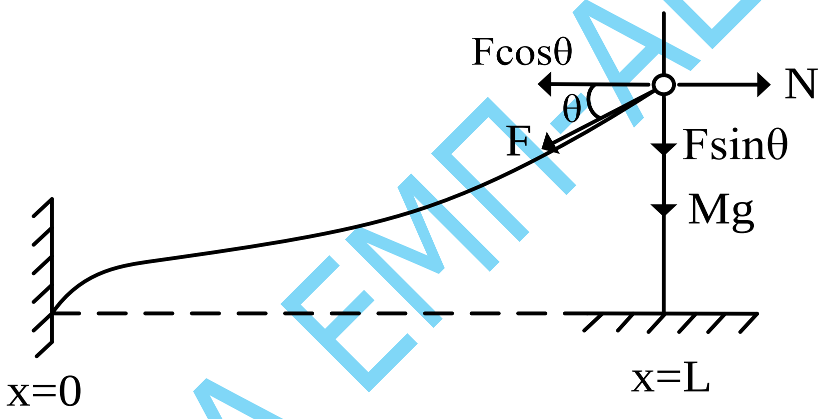
Άρα η ολική ενέργεια της χορδής είναι:

$$E = K + V \overset{(7),(8)}{\Rightarrow} E_n = \frac{1}{4} LTB^2 k_n^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} E_n = \frac{\pi^2}{16} \frac{TB^2}{L} (2n+1)^2, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

ΘΕΜΑ 3

Ομογενής χορδή με ολική μάζα m και μήκος L βρίσκεται υπό τάση T. Το ένα άκρο της στο x=0 είναι ακλόνητο, ενώ το άλλο άκρο της στο x=L φέρει δακτύλιο μάζας M, ο οποίος μπορεί να κινείται κάθετα στον άξονα x, κατά μήκος ενός οριζόντιου φορέα παράλληλου στον άξονα y χωρίς τριβές. Δείξτε ότι οι κανονικές συχνότητες της χορδής δίνονται από τις ρίζες της εξίσωσης $kL\tan(kL) = m/M$.

Λύση



Η γενική εξίσωση της μετατόπισης της χορδής y(x,t) σε ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης είναι:

$$y(x,t) = (A\sin kx + B\cos kx)\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή το άκρο στο x=0 είναι ακλόνητο ισχύει η οριακή συνθήκη:

$$y(x=0,t) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} (A\sin 0 + B\cos 0)\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\cos(\omega t + \varphi) = 0 \overset{\forall t}{\Rightarrow} B = 0$$

Δηλαδή η **(1)** παίρνει τη μορφή: $y(x,t) = A\sin kx\cos(\omega t+\varphi)$ **(2)**

Για τη συνθήκη στο άκρο x=L μελετάται η κίνηση του δακτυλίου, ο οποίος δέχεται μια κάθετη δύναμη N από την κάθετη ράβδο, το βάρος Mg και μια δύναμη F από τη χορδή, η οποία έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της χορδής στο άκρο αυτό. Η κάθετη δύναμη N ισούται με την τάση T που έχει τεντώσει τη χορδή.
Λόγω ισορροπίας του δακτυλίου στην οριζόντια διεύθυνση x προκύπτει:

$$N = F\cos\theta \Rightarrow T = F\cos\theta \Rightarrow F = \frac{T}{\cos\theta} \qquad \textbf{(3)}$$

Ενώ για την κίνηση του δακτυλίου κατά την κατακόρυφη διεύθυνση y ο 2ος νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = M\vec{\alpha} \Rightarrow -Mg - F\sin\theta = M\alpha \overset{(3)}{\Rightarrow} -Mg - T\tan\theta = M\alpha \qquad \textbf{(4)}$$

όπου $\alpha = \left.\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=L}$ είναι η επιτάχυνση του δακτυλίου που βρίσκεται στη θέση y(x=L,t).

Επίσης στη θέση x=L η κλίση της χορδής είναι: $\tan\theta = \left.\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στη σχέση **(4)** προκύπτει:

$$-Mg - T\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = M\left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=L} \qquad \textbf{(5)}$$

Έτσι αγνοώντας το βάρος του δακτυλίου Mg επειδή είναι πολύ μικρό και λαμβάνοντας υπόψη την **(2)**, η **(5)** δίνει:

$$-T\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = M\left.\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}\right|_{x=L} \overset{(2)}{\Rightarrow} -TAk\cos kx\cos(\omega t+\varphi)\Big|_{x=L} =$$

$$= -MA\omega^2\sin kx\cos(\omega t+\varphi)\Big|_{x=L} \overset{\forall t}{\Rightarrow} -Tk\cos kL = -M\omega^2\sin kL \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan kL = \frac{Tk}{M\omega^2} \qquad \textbf{(6)}$$

Αλλά: $$\omega = \upsilon k = \sqrt{\frac{T}{\rho}}k \Rightarrow \omega^2 = \frac{T}{\rho}k^2 = \frac{T}{m/L}k^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{TL}{m}k^2 \qquad \textbf{(7)}$$

όπου ρ=m/L η πυκνότητα της χορδής.

Συνεπώς η **(6)** λόγω της **(7)** δίνει την εξίσωση που παρέχει τις κανονικές συχνότητες της χορδής ως:

$$\tan kL = \frac{Tk}{M\frac{TL}{m}k^2} = \frac{m}{MkL} \Rightarrow \boxed{kL\tan kL = \frac{m}{M}}$$

Σημείωση:

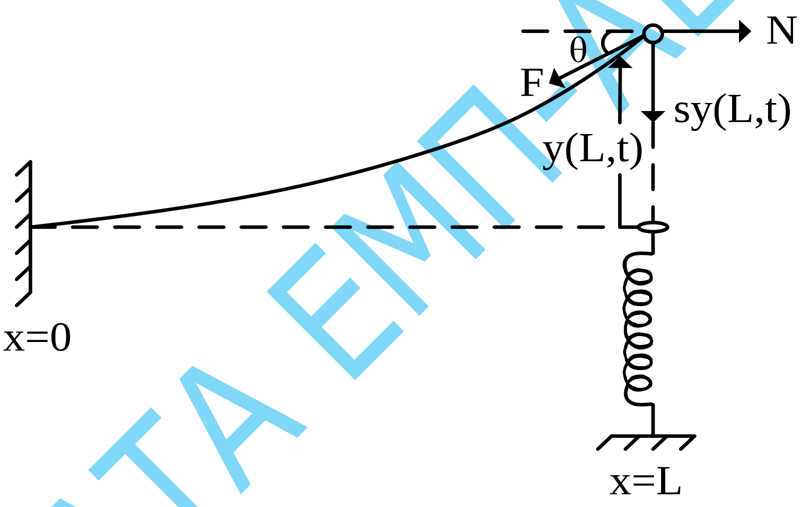
Στην περίπτωση που ο δακτύλιος είναι αβαρής η σχέση **(5)** δίνει τη γνωστή οριακή συνθήκη του ελεύθερου άκρου χορδής $\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$.

Δηλαδή η κλίση της χορδής στη θέση αβαρούς δακτυλίου είναι μηδέν.

ΘΕΜΑ 4

Βρείτε τη σχέση που ικανοποιεί ο κυματάριθμος k των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (στάσιμων κυμάτων) σε ιδανική χορδή μήκους L, πυκνότητας ρ, η οποία βρίσκεται υπό σταθερή τάση T και έχει το ένα άκρο της σταθερό, ενώ το άλλο είναι στερεωμένο πάνω σε ελατήριο σταθεράς s δυνάμενο να κινηθεί μόνο κάθετα στην κατεύθυνση της χορδής. Στη θέση ισορροπίας της η χορδή είναι οριζόντια. Αγνοήστε τη δύναμη βαρύτητας.

Λύση



Η εξίσωση της μετατόπισης y(x,t) της χορδής σε ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης είναι:

$$y(x,t) = (A\sin kx + B\cos kx)\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά επειδή το άκρο στο x=0 είναι σταθερό ισχύει η οριακή συνθήκη:

$$y(x=0,t) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} (A\sin 0 + B\cos 0)\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\cos(\omega t + \varphi) = 0 \overset{\forall t}{\Rightarrow} B = 0$$

Οπότε η **(1)** γίνεται: $y(x,t) = A\sin kx\cos(\omega t+\varphi)$ **(2)**

Επειδή το άκρο x=L μπορεί να κινείται μόνο κατακόρυφα μπορεί να θεωρηθεί ότι το άκρο αυτό κινείται προσδεμένο σε αβαρή δακτύλιο χωρίς τριβή πάνω σε κατακόρυφη ράβδο, στον οποίο είναι προσδεμένο και το ελατήριο. Συνεπώς σε μια τυχαία θέση όπου ο δακτύλιος έχει μετατοπιστεί κατά y(L,t) ασκείται σε αυτόν μια κάθετη δύναμη N από τη ράβδο, μια δύναμη F από τη χορδή στη διεύθυνση της εφαπτομένης της στο άκρο x=L και η δύναμη sy(L,t) από το ελατήριο. Έτσι λόγω ισορροπίας του δακτυλίου στην οριζόντια διεύθυνση x ισχύει:

$$N = F\cos\theta \Rightarrow T = F\cos\theta \Rightarrow F = \frac{T}{\cos\theta} \qquad \textbf{(3)}$$

όπου η κάθετη δύναμη N ισούται με την τάση T που έχει τεντώσει τη χορδή.

Επίσης κατά την κατακόρυφη διεύθυνση y η συνισταμένη δύναμη ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση του δακτυλίου. Αλλά η μάζα του δακτυλίου είναι αμελητέα οπότε ισχύει:

$$-F\sin\theta - sy(L,t) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} T\tan\theta + sy(L,t) = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Αλλά στη θέση x=L η κλίση της χορδής είναι: $\tan\theta = \left.\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}$

Οπότε η **(4)** δίνει:

$$T\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L} + sy(L,t) = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} TAk\cos kx\cos(\omega t+\varphi)\Big|_{x=L} + sA\sin kL\cos(\omega t+\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Tk\cos kL + s\sin kL)A\cos(\omega t+\varphi) = 0 \underset{\forall t}{\overset{A\neq 0}{\Rightarrow}} Tk\cos kL + s\sin kL = 0 \Rightarrow$$

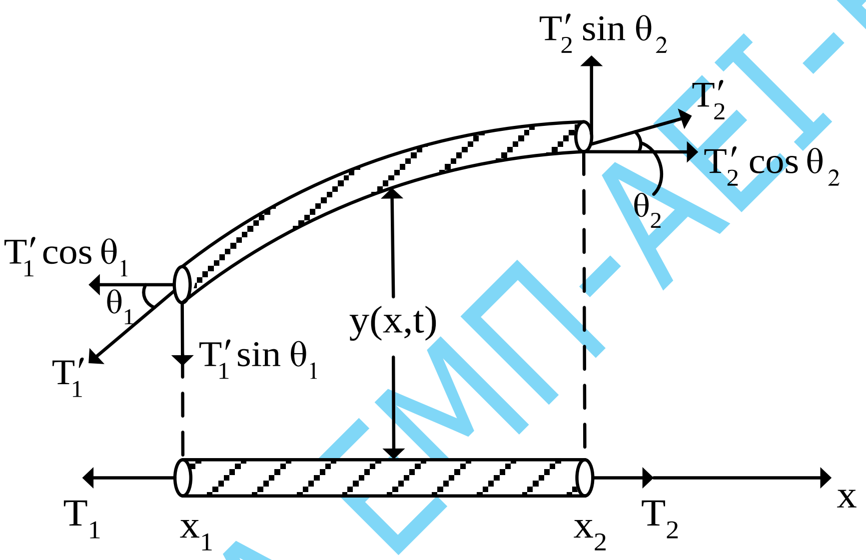
$$\Rightarrow \frac{Tk}{s} + \tan kL = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

Η σχέση **(5)** παρέχει τις δυνατές τιμές του κυματάριθμου των κανονικών τρόπων ταλάντωσης της χορδής αυτής.

ΘΕΜΑ 5

Να προσδιοριστεί η κυματική εξίσωση μιας μη ομογενούς χορδής.

Λύση



Έστω ένα τμήμα μήκους $\Delta x = x_2 - x_1$ και μάζας Δm μιας μη ομογενούς ελαστικής χορδής πυκνότητας $\rho(x)$. Αρχικά η χορδή βρίσκεται πάνω στον άξονα x και τείνεται με τάση T_1 στο άκρο $x = x_1$ και τάση T_2 στο άκρο $x = x_2$. Δηλαδή η τάση δεν είναι σταθερή αφού η χορδή είναι μη ομογενής. Σε μια τυχαία χρονική στιγμή t το τμήμα αυτό της χορδής Δx υφίσταται μια μέση μετατόπιση y(x,t) από τη θέση ισορροπίας και οι τάσεις στα άκρα x_1 και x_2 είναι T_1' και T_2' αντίστοιχα, ενώ σχηματίζουν γωνίες θ_1 και θ_2 με τον άξονα x. Οι οριζόντιες συνιστώσες των τάσεων T_1' και T_2' ισούνται με τις αρχικές τάσεις, δηλαδή:

$$T_1 = T_1'\cos\theta_1 \Rightarrow T_1' = T_1 / \cos\theta_1 \quad \text{και} \quad T_2 = T_2'\cos\theta_2 \Rightarrow T_2' = T_2 / \cos\theta_2 \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ η συνισταμένη κατακόρυφη δύναμη, σύμφωνα με τον 2ο νόμο του Newton είναι:

$$T_2' \sin\theta_2 - T_1' \sin\theta_1 = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \overset{(1)}{\Rightarrow} T_2 \tan\theta_2 - T_1 \tan\theta_1 = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά οι κλίσεις των άκρων είναι:

$$\tan\theta_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_1} \quad \text{και} \quad \tan\theta_2 = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_2} \qquad \textbf{(3)}$$

Οπότε η **(2)** λόγω των **(3)** γίνεται:

$$T_2\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_2} - T_1\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_1} = \Delta m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[T_2\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_2} - T_1\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_1}\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{dm}{dx}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right]}$$ **κυματική εξίσωση μη ομογενούς χορδής**

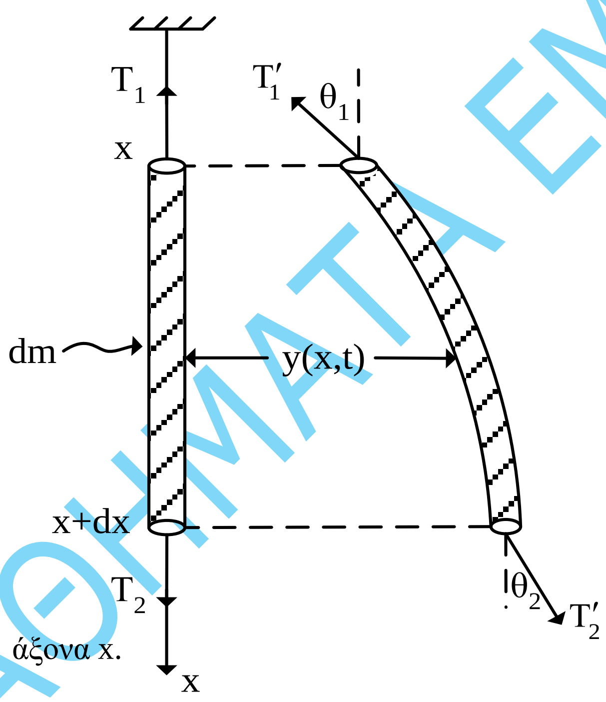
ΘΕΜΑ 6

α) Κατακόρυφη χορδή γραμμικής πυκνότητας ρ βρίσκεται υπό την επίδραση του βάρους της. Δείξτε ότι η κυματική εξίσωση την οποία ικανοποιούν εγκάρσιες ταλαντώσεις μικρού πλάτους, έτσι ώστε η χορδή να βρίσκεται συνεχώς σε σταθερό κατακόρυφο επίπεδο (που περιείχε τη χορδή σε κατάσταση ισορροπίας) έχει τη μορφή:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = gx\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + g\frac{\partial y}{\partial x}$$

β) Αν το μήκος της χορδής είναι ℓ και μια διαταραχή δημιουργείται στο κάτω άκρο της, να υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει η διαταραχή αυτή στο πάνω άκρο της χορδής.

Λύση



Έστω ένα τμήμα μήκους dx και μάζας dm μιας κατακόρυφης χορδής πυκνότητας ρ.
Αρχικά η χορδή βρίσκεται πάνω στον άξονα x και τείνεται με τάση T_1 στο άκρο x και τάση T_2 στο άκρο x+dx. Δηλαδή η τάση δεν είναι σταθερή αφού κάθε σημείο της χορδής τείνεται από το βάρος του τμήματος της χορδής που βρίσκεται κάτω από το σημείο αυτό.
Σε μια τυχαία χρονική στιγμή t το τμήμα αυτό της χορδής dx υφίσταται μια μέση μετατόπιση y(x,t) από τη θέση ισορροπίας και οι τάσεις στα άκρα x και x+dx είναι T_1' και T_2' αντίστοιχα, ενώ σχηματίζουν γωνίες θ_1 και θ_2 με τον άξονα x.

Έτσι η κάθετη δύναμη πάνω στο στοιχείο dx είναι $T_2'\sin\theta_2 - T_1'\sin\theta_1$ και σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton η εξίσωση κίνησής του είναι:

$$T_2' \sin\theta_2 - T_1' \sin\theta_1 = dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή όμως οι γωνίες θ_1 και θ_2 είναι πολύ μικρές ισχύουν: $\sin\theta_1 \cong \tan\theta_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x$ και $\sin\theta_2 \cong \tan\theta_2 = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx}$ (όπου οι δείκτες αναφέρονται στο σημείο που υπολογίζεται η παράγωγος) οπότε η **(1)** γράφεται:

$$T_2' \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx} - T_1' \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x = dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά το πρώτο μέλος της εξίσωσης **(2)** ορίζει τη διαφορική μεταβολή του $T(x)\frac{\partial y}{\partial x}$ επί το χωρικό διάστημα dx οπότε η **(2)** γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx = dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Επειδή όμως είναι dm=ρdx και η τάση του νήματος στο σημείο x είναι ίση με το βάρος του τμήματος μήκους x της χορδής, δηλαδή T=ρgx, η **(3)** τελικά δίνει:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho g x\frac{\partial y}{\partial x}\right)dx = \rho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \rho g\frac{\partial y}{\partial x} + \rho g x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = gx\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + g\frac{\partial y}{\partial x}}$$

β) Η ταχύτητα διάδοσης κυμάτων στη χορδή αυτή είναι : $\upsilon = \sqrt{T/\rho}$
όπου σε κάθε σημείο της χορδής είναι T=ρgx επομένως :

$$\upsilon = \sqrt{\rho g x/\rho} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{gx} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{gx} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{gx}}$$

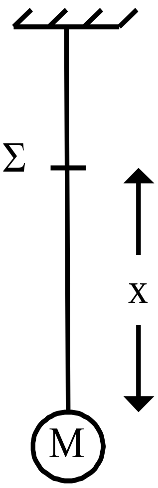
Η τελευταία σχέση δίνει το στοιχειώδη χρόνο που απαιτείται για να μεταδοθεί μια διαταραχή από τη θέση x μέχρι τη θέση x+dx. Οπότε ολοκληρώνοντας αυτή από x=0 έως x= ℓ υπολογίζεται ο ζητούμενος χρόνος ως :

$$\int_0^t dt = \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{gx}} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^{\ell} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{g}} 2\sqrt{x}\Big|_0^{\ell} \Rightarrow t = 2\sqrt{\ell / g}$$

ΘΕΜΑ 7

Χορδή μάζας m και μήκους ℓ κρέμεται μέσα σε πεδίο βαρύτητας επιτάχυνσης g, από ακλόνητη οροφή (x=ℓ), φέρνοντας στο άλλο άκρο (x=0) σημειακή μάζα M.
α) Υπολογίστε την τάση της χορδής ως συνάρτηση της απόστασης x από το κάτω άκρο της.
β) Γράψτε την εξίσωση κίνησης για μια στοιχειώδη μάζα dm της χορδής, που αντιστοιχεί σε μήκος dx και βρίσκεται σε απόσταση x από το κάτω άκρο της χορδής και παράγετε την αντίστοιχη εξίσωση κύματος.

Λύση



α) Ένα τυχαίο σημείο Σ της χορδής, σε απόσταση x από το άκρο της, τείνεται από το βάρος του τμήματος της χορδής μήκους x, που βρίσκεται κάτω από το σημείο αυτό και από το βάρος της σημειακής μάζας M. Η μάζα του τμήματος της χορδής x είναι ρx=mx/ℓ (όπου ρ=m/ℓ η γραμμική πυκνότητα της χορδής) και το βάρος του είναι mgx/ℓ. Άρα η τάση της χορδής στη θέση x είναι :

$$T = \frac{m}{\ell} gx + Mg \qquad \textbf{(1)}$$

β) Η εξίσωση κίνησης μιας στοιχειώδους μάζας dm της χορδής εξάγεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως αναπτύχθηκε στο **Θέμα 6** και προκύπτει η σχέση **(3)**. Δηλαδή :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right) dx = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά $dm = \rho dx = \frac{m}{\ell} dx$ και λόγω της **(1)** η **(2)** δίνει την κυματική εξίσωση ως :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{m}{\ell} gx + Mg \right) \frac{\partial y}{\partial x} \right] dx = \frac{m}{\ell} dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow$$

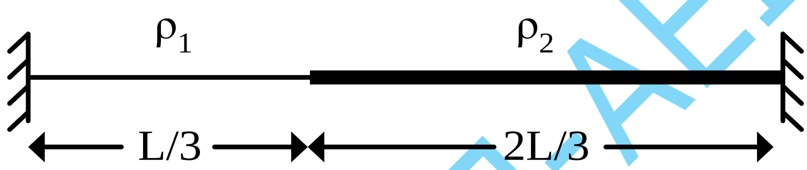
$$\Rightarrow \frac{m}{\ell} g \frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{m}{\ell} gx + Mg \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{m}{\ell} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(gx + \frac{M\ell}{m} g\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + g\frac{\partial y}{\partial x}}$$

ΘΕΜΑ 8

Χορδή συνολικού μήκους L αποτελείται από δύο τμήματα μήκους L/3 και 2L/3 με γραμμικές πυκνότητες ρ_1 και $\rho_2 = 4\rho_1$ αντίστοιχα. Η χορδή τείνεται με τάση T μεταξύ δύο σταθερών σημείων. Αν το σημείο ένωσης των δύο τμημάτων είναι ακίνητο να υπολογισθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και ο λόγος των μεγίστων μετατοπίσεων του συστήματος των δύο χορδών.

Λύση



Οι εξισώσεις των μετατοπίσεων $y_1(x,t)$ και $y_2(x,t)$ κάθε τμήματος της χορδής σε ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης, όπου όλα τα σημεία της χορδής έχουν την ίδια συχνότητα και την ίδια φάση, αλλά διαφορετικό κυματάριθμο σε κάθε τμήμα είναι:

$$y_1(x,t) = (A_1 \cos k_1 x + B_1 \sin k_1 x)\cos(\omega t + \varphi) \;\; \text{για} \;\; -L/3 \le x \le 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$y_2(x,t) = (A_2 \cos k_2 x + B_2 \sin k_2 x)\cos(\omega t + \varphi) \;\; \text{για} \;\; 0 \le x \le 2L/3 \qquad \textbf{(2)}$$

όπου θεωρήθηκε για ευκολία ως αρχή του άξονα x το σημείο ένωσης των δύο τμημάτων της χορδής, έτσι ώστε τα άκρα της χορδής να βρίσκονται στις θέσεις $x = -L/3$ και x= 2L/3 αντίστοιχα.
Επειδή όμως το σημείο ένωσης των δύο τμημάτων x=0 είναι ακίνητο ισχύουν οι οριακές συνθήκες:

$$y_1(x=0,t) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} A_1 \cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

και $$y_2(x=0,t) = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} A_2 \cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$

Οπότε οι σχέσεις **(1)** και **(2)** παίρνουν την απλοποιημένη μορφή:

$$y_1(x,t) = B_1 \sin k_1 x \cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(3)}$$

$$y_2(x,t) = B_2 \sin k_2 x \cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(4)}$$

Επίσης από τις οριακές συνθήκες Dirichlet των ακίνητων άκρων x=-L/3 και x=2L/3 προκύπτουν:

$$y_1(-L/3,t) = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} B_1 \sin\left(-\frac{k_1 L}{3}\right)\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -B_1 \sin\left(\frac{k_1 L}{3}\right)\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{k_1 L}{3}\right) = 0 \Rightarrow k_1 \frac{L}{3} = n\pi \Rightarrow k_1 = \frac{3n\pi}{L}, \quad n = 1,2,\dots \qquad \textbf{(5)}$$

και $y_2(2L/3,t) = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} B_2 \sin\left(k_2 \frac{2L}{3}\right)\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow \sin\left(k_2 \frac{2L}{3}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k_2 \frac{2L}{3} = m\pi \Rightarrow k_2 = \frac{3m\pi}{2L}, \quad m = 1,2,\dots \qquad \textbf{(6)}$$

Άρα από τις σχέσεις διασποράς του κάθε τμήματος είναι:

$$\omega = k_1 \sqrt{\frac{T}{\rho_1}} \quad \text{και} \quad \omega = k_2 \sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$$

Και επειδή η συχνότητα ω είναι κοινή στα δύο τμήματα θα πρέπει:

$$k_1 \sqrt{\frac{T}{\rho_1}} = k_2 \sqrt{\frac{T}{\rho_2}} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \overset{(5),(6)}{\Rightarrow} \frac{\frac{3n\pi}{L}}{\frac{3m\pi}{2L}} = \sqrt{\frac{\rho_1}{4\rho_1}} \Rightarrow \frac{2n}{m} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 4n$$

Συνεπώς οι δυνατές ιδιοσυχνότητες του συστήματος είναι:

$$\omega_m^2 = \frac{3m\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho_2}}, \quad m = 4,8,12,\dots. \qquad \textbf{(7)}$$

Επειδή το σημείο ένωσης των δύο τμημάτων της χορδής είναι ακίνητο, η χορδή θα έχει την ίδια κλίση αριστερά και δεξιά του σημείου αυτού, δηλαδή θα ισχύει:

$$\tan\varphi_1 = \tan\varphi_2 \Rightarrow \left.\frac{\partial y_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial y_2(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} \overset{(3),(4)}{\Rightarrow}$$

$$B_1 k_1 \cos k_1 x \cos(\omega t+\varphi)\big|_{x=0} = B_2 k_2 \cos k_2 x \cos(\omega t+\varphi)\big|_{x=0} \Rightarrow$$

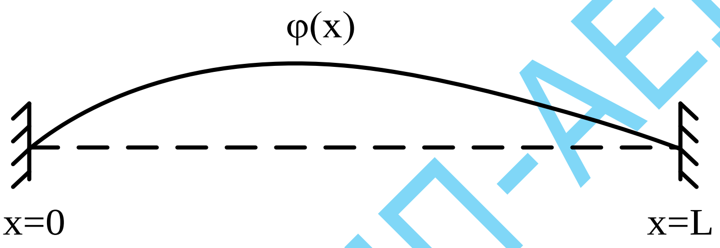
$$\Rightarrow B_1 k_1 = B_2 k_2 \Rightarrow \frac{B_1}{B_2} = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \Rightarrow \frac{B_1}{B_2} = 2$$

όπου B_1 είναι η μέγιστη μετατόπιση του αριστερού τμήματος και B_2 η μέγιστη μετατόπιση του δεξιού τμήματος της χορδής.

ΘΕΜΑ 9

Τελείως ελαστική χορδή γραμμικής πυκνότητας ρ και μήκους L είναι στερεωμένη στα άκρα της και βρίσκεται υπό σταθερή τάση Τ. Αρχικά η χορδή είναι ακίνητη και μετατοπισμένη από τη θέση ισορροπίας της, έχοντας πάρει τη μορφή που περιγράφει κάποια συνεχής συνάρτηση φ(x). Να περιγράψετε την κίνησή της αν αφεθεί ελεύθερη.

Λύση



Η γενική μορφή της τυχαίας κίνησης της ομογενούς ελαστικής χορδής είναι:

$$y(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}(A_s\cos k_s x+B_s\sin k_s x)\cos(\omega_s t+\varphi_s) \qquad \textbf{(1)}$$

Οι οριακές συνθήκες Dirichlet για τα ακλόνητα άκρα της χορδής δίνουν:

• Για το άκρο x=0: $y(x=0,t)=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{s=1}^{\infty} A_s\cos(\omega_s t+\varphi_s)=0 \Rightarrow A_s=0$

Οπότε η **(1)** παίρνει την απλοποιημένη μορφή:

$$y(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty} B_s\sin k_s x\cos(\omega_s t+\varphi_s) \qquad \textbf{(2)}$$

• Για το άκρο x=L: $y(x=L,t)=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \sum_{s=1}^{\infty} B_s\sin k_s L\cos(\omega_s t+\varphi_s)=0 \underset{\forall t}{\overset{B_s\neq 0}{\Rightarrow}}$

$$\Rightarrow \sin k_s L = 0 \Rightarrow k_s L = s\pi \Rightarrow k_s = \frac{s\pi}{L}, \quad s = 1,2,... \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα η **(2)** λόγω της **(3)** παίρνει τη μορφή:

$$y(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} B_s \sin\frac{s\pi x}{L}\cos(\omega_s t + \varphi_s) \qquad \textbf{(4)}$$

όπου οι συχνότητες ω_s προσδιορίζονται από τη σχέση διασποράς ως:

$$\omega_s = k_s\sqrt{\frac{T}{\rho}} \overset{(3)}{\Rightarrow} \omega_s = \frac{s\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad s = 1,2,... \qquad \textbf{(5)}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζονται οι αρχικές συνθήκες.
Επειδή αρχικά για t=0 η χορδή είναι ακίνητη, θα ισχύει για κάθε x ότι όλα τα σημεία της χορδής έχουν αρχική ταχύτητα μηδενική. Δηλαδή:

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{s=1}^{\infty} B_s \sin\frac{s\pi x}{L}\cos(\omega_s t + \varphi_s)\right]_{t=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\sum_{s=1}^{\infty} B_s \sin\frac{s\pi x}{L}(-\omega_s)\sin(\omega_s t + \varphi_s)\right|_{t=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sum_{s=1}^{\infty} B_s\omega_s \sin\frac{s\pi x}{L}\sin\varphi_s = 0 \underset{\forall x}{\overset{B_s \neq 0}{\Rightarrow}} \sin\varphi_s = 0 \Rightarrow \varphi_s = 0$$

Επομένως η **(4)** γίνεται:

$$y(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} B_s \sin\frac{s\pi x}{L}\cos\omega_s t \qquad \textbf{(6)}$$

Τέλος από την αρχική μορφή της χορδής φ(x) θα ισχύει:

$$y(x,t=0) = \varphi(x) \overset{(6)}{\Rightarrow} \sum_{s=1}^{\infty} B_s \sin\frac{s\pi x}{L} = \varphi(x) \qquad \textbf{(7)}$$

Από την τελευταία σχέση **(7)** υπολογίζονται οι συντελεστές B_s, ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης φ(x).

ΘΕΜΑ 10

Χορδή μήκους L και γραμμικής πυκνότητας ρ, τείνεται με τάση Τ μεταξύ δύο σταθερών σημείων. Υπολογίστε τη συνάρτηση απομάκρυνσης y(x,t) αν οι αρχικές συνθήκες απομάκρυνσης είναι $\dot{y}(x,t=0)=0$ και $y(x,t=0)=D(1-x/L)x/L$.

Λύση

Σύμφωνα με το **Θέμα 9** η γενική έκφραση της απομάκρυνσης της χορδής στερεωμένης στα δύο άκρα της είναι η σχέση **(6)**.

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\omega_n t \qquad \textbf{(1)}$$

Από την αρχική συνθήκη της θέσης της χορδής προκύπτει:

$$y(x,t=0)=\frac{D}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)x \overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}=\frac{D}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 \sin\frac{\pi x}{L}+B_2\sin\frac{2\pi x}{L}+\ldots+B_n\sin\frac{n\pi x}{L}+\ldots=\frac{D}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right)x$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $\sin(n\pi x/L)$ και ολοκληρώνοντας κατά μήκος της χορδής από x=0 μέχρι x=L δίνει:

$$B_1\int_0^L \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx+\ldots+B_n\int_0^L \sin^2\frac{n\pi x}{L}dx+\ldots=\frac{D}{L}\int_0^L\left(1-\frac{x}{L}\right)x\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad \textbf{(2)}$$

Επειδή όμως ισχύει η σχέση:

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\begin{cases}0 & \text{για } m\neq n\\ L/2 & \text{για } m=n\end{cases}$$

τελικά η **(2)** παίρνει την απλοποιημένη μορφή:

$$B_n \frac{L}{2} = \frac{D}{L}\int_0^L \left(1-\frac{x}{L}\right) x \sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad \textbf{(3)}$$

Όπου το ολοκλήρωμα της **(3)** υπολογίζεται με παραγοντική ολοκλήρωση ως εξής:

$$\int_0^L \left(x-\frac{x^2}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = -\frac{L}{n\pi}\int_0^L \left(x-\frac{x^2}{L}\right)d\left(\cos\frac{n\pi x}{L}\right) =$$

$$= -\frac{L}{n\pi}\left[\left(x-\frac{x^2}{L}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}\bigg|_0^L - \int_0^L \left(1-\frac{2x}{L}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right] =$$

$$= -\frac{L}{n\pi}\left[0-\int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}dx + \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right] =$$

$$= -\frac{L}{n\pi}\left[-\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\bigg|_0^L + \frac{2}{L}\frac{L}{n\pi}\int_0^L x d\left(\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\right] =$$

$$= -\frac{L}{n\pi}\left[0+\frac{2}{n\pi}\left(x\sin\frac{n\pi x}{L}\bigg|_0^L - \int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\right] = -\frac{2L}{n^2\pi^2}\left[0+\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\bigg|_0^L\right] =$$

$$= -\frac{2L^2}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - \cos 0) = -\frac{2L^2}{n^3\pi^3}[(-1)^n - 1] =$$

$$= \frac{2L^2}{n^3\pi^3}(1^n + 1) = \frac{2L^2}{n^3\pi^3}\cdot 2 = \frac{4L^2}{n^3\pi^3}$$

Άρα η **(3)** δίνει: $B_n \frac{L}{2} = \frac{D}{L}\frac{4L^2}{n^3\pi^3} \Rightarrow B_n = \frac{8D}{n^3\pi^3}$

Άρα η έκφραση **(1)** για την μετατόπιση της χορδής είναι:

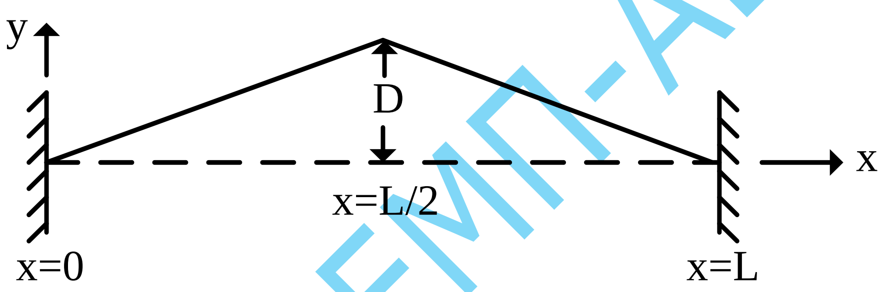
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8D}{n^3\pi^3}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\omega_n t =$$

$$= \frac{8D}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}t + \frac{1}{8}\sin\frac{2\pi x}{L}\cos\frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}t + \ldots \right)$$

ΘΕΜΑ 11

Ιδανική χορδή μήκους L και γραμμικής πυκνότητας ρ, τείνεται με τάση T μεταξύ δύο σταθερών σημείων. Τη χρονική στιγμή t=0 η χορδή απομακρύνεται από την κατάσταση ηρεμίας έτσι ώστε y(x=L/2, t=0)=D με όλα τα ενδιάμεσα σημεία να κατανέμονται γραμμικά μεταξύ της απομάκρυνσης αυτής και των ακλόνητων άκρων (όπως στο σχήμα). Στη συνέχεια η χορδή αφήνεται ελεύθερη με μηδενική ταχύτητα όλων των σημείων της. Να υπολογιστεί η κίνηση της χορδής για t>0 ως γραμμικός συνδυασμός όλων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

Λύση



Επειδή η χορδή έχει στερεωμένη τα άκρα της και αρχικά είναι ακίνητη η γενική έκφραση της μετατόπισης της χορδής y(x,t) συμπίπτει με αυτή που προέκυψε στο **Θέμα 9** και είναι:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\omega_n t \qquad \textbf{(1)}$$

Η αρχική συνθήκη της θέσης της χορδής είναι:

$$y(x,t=0) = \begin{cases} \dfrac{2Dx}{L}, & \text{για} \quad 0 \le x \le L/2 \\ 2D\left(1-\dfrac{x}{L}\right), & \text{για} \quad L/2 \le x \le L \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Έτσι η **(2)** λόγω της **(1)** δίνει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} = \begin{cases} \dfrac{2Dx}{L}, & \text{για} \quad 0 \le x \le L/2 \\ 2D\left(1-\dfrac{x}{L}\right), & \text{για} \quad L/2 \le x \le L \end{cases} \qquad \textbf{(3)}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης **(3)** με $\sin(n\pi x/L)$ και ολοκληρώνοντας από x=0 μέχρι x=L, και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση $\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx = 0$ για $m \neq n$ και L/2 για m=n προκύπτει:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^L B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \int_0^{L/2}\frac{2Dx}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \int_{L/2}^{L} 2D\left(1-\frac{x}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n\frac{L}{2} = \frac{2D}{L}\left[\int_0^{L/2} x\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right] \qquad \textbf{(4)}$$

όπου τα παραπάνω ολοκληρώματα υπολογίζονται με παραγοντική ολοκλήρωση ως εξής:

$$\int_0^{L/2} x\sin\frac{n\pi x}{L}dx = -\frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2} x d\left(\cos\frac{n\pi x}{L}\right) = -\frac{L}{n\pi}\left[x\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^{L/2} - \int_0^{L/2}\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right] =$$

$$= -\frac{L}{n\pi}\left[0 - \frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_0^{L/2}\right] = \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin 0\right) =$$

$$= \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{L^2}{n^2\pi^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, \qquad n = 1,3,\ldots$$

και $$\int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = -\frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L}(L-x)d\left(\cos\frac{n\pi x}{L}\right) =$$

$$= -\frac{L}{n\pi}\left[(L-x)\cos\frac{n\pi x}{L}\Big|_{L/2}^{L} + \int_{L/2}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right] =$$

$$-\frac{L}{n\pi}\left[0+\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}\Big|_{L/2}^{L}\right] = -\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left(\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{L^2}{n^2\pi^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad n = 1,3,\ldots$$

Άρα η **(4)** δίνει:

$$B_n\frac{L}{2} = \frac{2D}{L}\frac{2L^2}{n^2\pi^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \Rightarrow B_n = \frac{8D}{n^2\pi^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad n = 1,3,\ldots$$

Συνεπώς η έκφραση για την κίνηση της χορδής είναι:

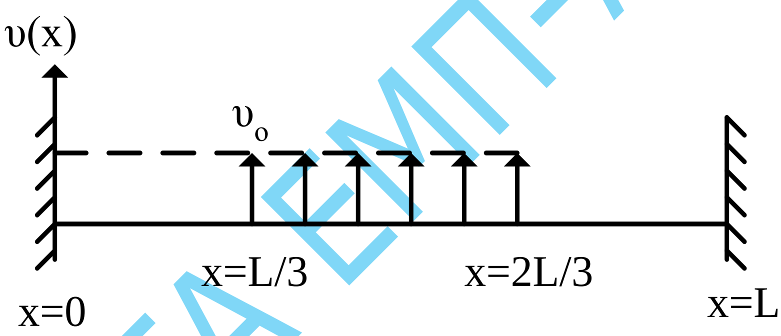
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8D}{n^2\pi^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\omega_n t =$$

$$= \frac{8D}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}t - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{L}\cos\frac{3\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}t + \frac{1}{25}\sin\frac{5\pi x}{L}\cos\frac{5\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}t + \ldots\right)$$

ΘΕΜΑ 12

Μια χορδή μήκους L και γραμμικής πυκνότητας ρ τείνεται με τάση T ανάμεσα σε δύο σταθερά στηρίγματα. Η χορδή αρχικά είναι ευθύγραμμη και δέχεται χτύπημα με ένα σφυρί ώστε τα σημεία $L/3<x<2L/3$ να αποκτήσουν αρχική ταχύτητα υ_o κατά μήκος του άξονα y, ενώ τα υπόλοιπα σημεία της δεν έχουν αρχική ταχύτητα. Να βρείτε την εξίσωση κίνησης της χορδής y(x,t).

Λύση



Η γενική μορφή της εξίσωσης κίνησης της χορδής είναι:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos k_n x+B_n\sin k_n x)\cos(\omega_n t+\varphi_n) \qquad \textbf{(1)}$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες Dirichlet στα ακλόνητα άκρα προκύπτουν:

- Στο άκρο x=0: $y(x=0,t)=0\overset{(1)}{\Rightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(\omega_n t+\varphi_n)=0\Rightarrow A_n=0$
-

Δηλαδή η **(1)** γράφεται :

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x \cos(\omega_n t+\varphi_n) \qquad \textbf{(2)}$$

• Στο άκρο x=L: $y(x=L,t)=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n L \cos(\omega_n t+\varphi_n)=0 \underset{\forall t}{\overset{B_n\neq 0}{\Rightarrow}}$

$$\Rightarrow \sin k_n L=0 \Rightarrow k_n L=n\pi \Rightarrow k_n=\frac{n\pi}{L}, \quad n=1,2,\ldots \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα η **(2)** λόγω της **(3)** παίρνει τη μορφή:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos(\omega_n t+\varphi_n) \qquad \textbf{(4)}$$

όπου οι συχνότητες ω_n προσδιορίζονται από τη σχέση διασποράς ως:

$$\omega_n=k_n\sqrt{\frac{T}{\rho}} \overset{(3)}{\Rightarrow} \omega_n=\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad n=1,2,\ldots \qquad \textbf{(5)}$$

Σύμφωνα με την αρχική συνθήκη της θέσης επειδή η χορδή αρχικά είναι ευθύγραμμη στη θέση ισορροπίας της, θα ισχύει για κάθε x:

$$y(x,t=0)=0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\varphi_n=0 \underset{\forall t}{\overset{B_n\neq 0}{\Rightarrow}} \cos\varphi_n=0 \Rightarrow \varphi_n=\pm\frac{\pi}{2}$$

Επομένως η **(4)** γίνεται:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\left(\omega_n t\pm\pi/2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\omega_n t \qquad \textbf{(6)}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τη συνθήκη για την αρχική ταχύτητα προκύπτει:

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \upsilon(x) \overset{(6)}{\Rightarrow} \left.\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\,\omega_n \cos\omega_n t\right|_{t=0} = \upsilon(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \sin\frac{n\pi x}{L} = \upsilon(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1\omega_1 \sin\frac{\pi x}{L} + \ldots + B_n\omega_n \sin\frac{n\pi x}{L} + \ldots = \upsilon(x) \qquad \textbf{(7)}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης **(7)** με sin(nπx/L) και ολοκληρώνοντας σε όλο το μήκος της χορδής από x=0 μέχρι x=L προκύπτει:

$$B_1\omega_1\int_0^L \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \ldots + B_n\omega_n\int_0^L \sin^2\frac{n\pi x}{L}dx + \ldots = \int_0^L \upsilon(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n\omega_n\frac{L}{2} = \int_0^{L/3} 0dx + \int_{L/3}^{2L/3} \upsilon_o \sin\frac{n\pi x}{L}dx + \int_{2L/3}^{L} 0dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n\omega_n\frac{L}{2} = \upsilon_o\int_{L/3}^{2L/3} \sin\frac{n\pi x}{L}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n\omega_n\frac{L}{2} = \upsilon_o\frac{L}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/3}^{2L/3} = \upsilon_o\frac{L}{n\pi}\left(-\cos\frac{2n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

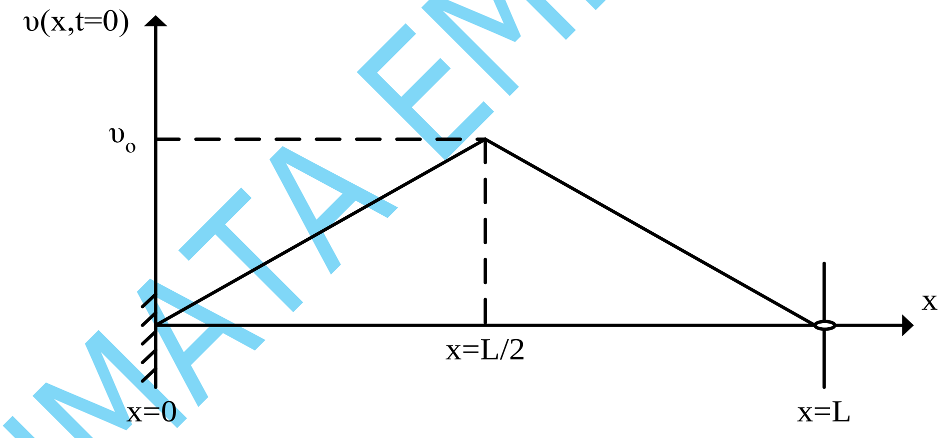
$$\Rightarrow B_n = \frac{2\upsilon_o}{n\pi\omega_n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\right) \overset{(5)}{\Rightarrow} B_n = \frac{2\upsilon_o L}{n^2\pi^2}\sqrt{\frac{\rho}{T}}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\right)$$

Άρα :
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\upsilon_o L}{n^2\pi^2}\sqrt{\frac{\rho}{T}}\left(\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\,t$$

ΘΕΜΑ 13

Ιδανική χορδή μήκους L και γραμμικής πυκνότητας ρ, που τείνεται με τάση T, έχει το ένα άκρο της (x=0) στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο, ενώ το άλλο άκρο της (x=L) είναι ελεύθερο να κινείται χωρίς τριβές με τη βοήθεια αβαρούς δακτυλίου πάνω σε κάθετη στη χορδή ράβδο. Τη χρονική στιγμή t=0 και ενώ όλα τα σημεία της χορδής βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους (y(x,t=0)=0), η χορδή διεγείρεται με μια κατανομή ταχυτήτων η οποία παίρνει μέγιστη τιμή υ_o στο σημείο x=L/2 και μειώνεται γραμμικά (όπως στο σχήμα), μηδενιζόμενη στα άκρα της χορδής. Να βρείτε την απομάκρυνση της χορδής y(x,t) για t>0.

Λύση



Η γενική εξίσωση για την απομάκρυνση της χορδής είναι:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos k_n x + B_n \sin k_n x)\cos(\omega_n t+\varphi_n) \qquad \textbf{(1)}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζονται οι οριακές συνθήκες στα άκρα της χορδής. Έτσι στο άκρο x=0 που είναι ακίνητο ισχύει η συνθήκη:

$$y(x=0,t)=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t+\varphi_n)=0 \overset{\forall t}{\Rightarrow} A_n=0$$

Οπότε είναι: $$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x \cos(\omega_n t+\varphi_n) \qquad \textbf{(2)}$$

Ενώ στο άκρο x=L που είναι ελεύθερο ισχύει η συνθήκη Newmann (δηλαδή η κλίση της χορδής στο άκρο αυτό είναι μηδέν):

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L}=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} B_n k_n \cos k_n L \cos(\omega_n t+\varphi_n)=0 \underset{\forall t}{\overset{B_n\neq 0}{\Rightarrow}} \cos k_n L=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_n L=n\pi-\frac{\pi}{2} \Rightarrow k_n=\frac{\pi}{L}\left(n-\frac{1}{2}\right), \quad n=1,2,\ldots \qquad \textbf{(3)}$$

Επίσης οι συχνότητες ω_n από τη σχέση διασποράς είναι:

$$\omega_n=k_n \upsilon=k_n\sqrt{\frac{T}{\rho}} \overset{(3)}{\Rightarrow} \omega_n=\frac{\pi}{L}\left(n-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \qquad n=1,2,\ldots \qquad \textbf{(4)}$$

Ακολούθως εφαρμόζονται οι αρχικές συνθήκες. Έτσι επειδή αρχικά για t=0 η χορδή βρίσκεται στη θέση ισορροπίας θα ισχύει:

$$y(x,t=0)=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x \cos\varphi_n=0 \underset{\forall x}{\overset{B_n\neq 0}{\Rightarrow}} \cos\varphi_n=0 \Rightarrow \varphi_n=\pm\frac{\pi}{2}$$

Άρα η σχέση **(2)** παίρνει τη μορφή:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x \cos\left(\omega_n t\pm\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x \sin\omega_n t \qquad \textbf{(5)}$$

Ενώ η συνθήκη για την αρχική ταχύτητα δίνει:

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\upsilon(x) \overset{(5)}{\Rightarrow} \left.\sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin k_n x \cos\omega_n t\right|_{t=0}=\upsilon(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \omega_n \sin k_n x = \upsilon(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1\omega_1 \sin k_1 x + \ldots + B_n\omega_n \sin k_n x + \ldots = \upsilon(x) \qquad \textbf{(6)}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης **(6)** με $\sin k_n x$ και ολοκληρώνοντας σε όλο το μήκος της χορδής από x=0 μέχρι x=L προκύπτει:

$$B_1\omega_1 \int_0^L \sin k_1 x \sin k_n x dx + \ldots + B_n\omega_n \int_0^L \sin^2 k_n x dx + \ldots = \int_0^L \upsilon(x) \sin k_n x dx \qquad \textbf{(7)}$$

Αλλά είναι: $\displaystyle\int_0^L \sin k_m x \sin k_n x dx = 0 \quad \forall \quad m \neq n$

και $\displaystyle\int_0^L \sin^2 k_n x dx = \int_0^L \frac{1-\cos 2k_n x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4k_n} \sin 2k_n x \Big|_0^L = \frac{L}{2}$

Οπότε η **(7)** γίνεται:

$$B_n\omega_n \frac{L}{2} = \int_0^L \upsilon(x) \sin k_n x dx \qquad \textbf{(8)}$$

Σύμφωνα με το σχήμα η συνάρτηση υ(x) έχει τη μορφή:

$$\upsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{2\upsilon_o}{L} x, & \text{για} \quad 0 \leq x \leq L/2 \\ \dfrac{2\upsilon_o}{L}(L-x), & \text{για} \quad L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

Επομένως η **(8)** δίνει:

$$B_n\omega_n \frac{L}{2} = \int_0^{L/2} \frac{2\upsilon_o}{L} x \sin k_n x dx + \int_{L/2}^{L} \frac{2\upsilon_o}{L}(L-x) \sin k_n x dx \qquad \textbf{(9)}$$

όπου τα παραπάνω ολοκληρώματα υπολογίζονται με παραγοντική ολοκλήρωση ως εξής:

$$\int_0^{L/2} x\sin k_n x dx = -\frac{1}{k_n}\int_0^{L/2} x d(\cos k_n x) = -\frac{1}{k_n}\left[x\cos k_n x\Big|_0^{L/2} - \int_0^{L/2}\cos k_n x dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{k_n}\left[\frac{L}{2}\cos\frac{k_n L}{2} - \frac{1}{k_n}\sin k_n x\Big|_0^{L/2}\right] = -\frac{L}{2k_n}\cos\frac{k_n L}{2} + \frac{1}{k_n^2}\sin\frac{k_n L}{2}$$

και $$\int_{L/2}^{L}(L-x)\sin k_n x dx = -\frac{1}{k_n}\int_{L/2}^{L}(L-x)d(\cos k_n x) =$$

$$= -\frac{1}{k_n}\left[(L-x)\cos k_n x\Big|_{L/2}^{L} + \int_{L/2}^{L}\cos k_n x dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{k_n}\left[\frac{L}{2}\cos\frac{k_n L}{2} + \frac{1}{k_n}\sin k_n x\Big|_{L/2}^{L}\right] =$$

$$= -\frac{L}{2k_n}\cos\frac{k_n L}{2} - \frac{1}{k_n^2}\left(\sin k_n L - \sin\frac{k_n L}{2}\right)$$

Άρα τελικά η **(9)** δίνει:

$$B_n\omega_n\frac{L}{2} = \frac{2\upsilon_o}{L}\left[-\frac{2L}{2k_n}\cos\frac{k_n L}{2} + \frac{2}{k_n^2}\sin\frac{k_n L}{2} - \frac{1}{k_n^2}\sin k_n L\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{4\upsilon_0}{k_n\omega_n L^2}\left(-L\cos\frac{k_n L}{2} + \frac{2}{k_n}\sin\frac{k_n L}{2} - \frac{1}{k_n}\sin k_n L\right)$$

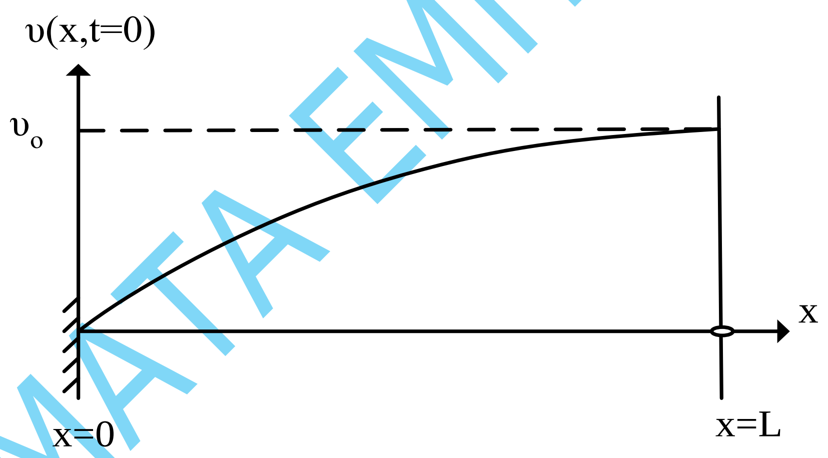
όπου τα k_n και ω_n δίνονται από τις σχέσεις **(3)** και **(4)**.

Άρα η κίνηση της χορδής δίνεται από την y(x,t) της σχέσης **(5)**, όπου οι συντελεστές B_n είναι αυτοί που προσδιορίστηκαν παραπάνω.

ΘΕΜΑ 14

Χορδή μήκους L και γραμμικής πυκνότητας ρ τείνεται με τάση Τ και έχει το ένα άκρο της στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο, ενώ το άλλο άκρο της είναι ελεύθερο να κινείται με τη βοήθεια αβαρούς δακτυλιδιού πάνω σε κάθετη στη χορδή ράβδο, χωρίς τριβές. Τη χρονική στιγμή t=0 και ενώ όλα τα σημεία της χορδής βρίσκονται στη θέση ισορροπίας τους (y(x,t=0)=0), η χορδή διεγείρεται με μια κατανομή ταχυτήτων η οποία αυξάνει ημιτονοειδώς μηδενιζόμενη στο άκρο x=0 και παίρνει μέγιστη τιμή υ_o στο άλλο άκρο x=L (όπως στο σχήμα). Να βρείτε την απομάκρυνση y(x,t) της χορδής για t>0.

Λύση



Ακολουθώντας την ίδια ακριβώς διαδικασία του **Θέματος 13** και εφαρμόζοντας τις οριακές και τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος προκύπτουν ομοίως οι σχέσεις **(5)** και **(6)**. Δηλαδή είναι:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x \sin \omega_n t \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $k_n=\dfrac{\pi}{L}\left(n-\dfrac{1}{2}\right)$ και $\omega_n=\dfrac{\pi}{L}\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{\dfrac{T}{\rho}},\quad n=1,2,...$ **(2)**

και η συνθήκη της αρχικής ταχύτητας δίνει:

$$B_1\omega_1 \sin k_1 x + B_2\omega_2 \sin k_2 x + \ldots + B_n\omega_n \sin k_n x + \ldots = \upsilon(x) \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά σύμφωνα με το σχήμα η συνάρτηση υ(x) έχει τη μορφή:

$$\upsilon(x) = \upsilon_o \sin\frac{\pi x}{2L}, \qquad 0 \le x \le L \qquad \textbf{(4)}$$

Συνεπώς η **(3)** λόγω της **(4)** και των **(2)** δίνει:

$$B_1 \frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \sin\frac{\pi}{2L}x + B_2 \frac{3\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \sin\frac{3\pi}{2L}x + \ldots = \upsilon_o \sin\frac{\pi x}{2L}$$

Άρα για να ισχύει η παραπάνω σχέση για κάθε x θα πρέπει οι συντελεστές των ομοίων συναρτήσεων στα δύο μέλη να είναι ίσοι. Δηλαδή είναι:

$$B_1 \frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} = \upsilon_o \Rightarrow B_1 = \frac{2L\upsilon_o}{\pi}\sqrt{\frac{\rho}{T}} \quad \text{και} \quad B_2 = B_3 = \ldots . = B_n = 0$$

Επομένως η απομάκρυνση της χορδής **(1)** γίνεται:

$$y(x,t) = B_1 \sin k_1 x \sin \omega_1 t \Rightarrow y(x,t) = \frac{2L\upsilon_o}{\pi}\sqrt{\frac{\rho}{T}} \sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}t\right)$$

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή η χορδή κινείται μόνο με τον θεμελιώδη (n=1) κανονικό τρόπο ταλάντωσης.

ΘΕΜΑ 15

Χαλύβδινη γέφυρα μήκους L=1 km προσομοιάζει με μη ιδανική χορδή της οποίας η σχέση διασποράς έχει τη μορφή:

$$\omega = \upsilon_o k + \frac{\upsilon_1}{2\pi} k^2$$

όπου $\upsilon_o = 400 \mathrm{m/sec}$ και υ_1 σταθερά η οποία εξαρτάται από την κατασκευή της γέφυρας (αν η γέφυρα ήταν τελείως ελαστική θα ήταν $\upsilon_1 = 0$).

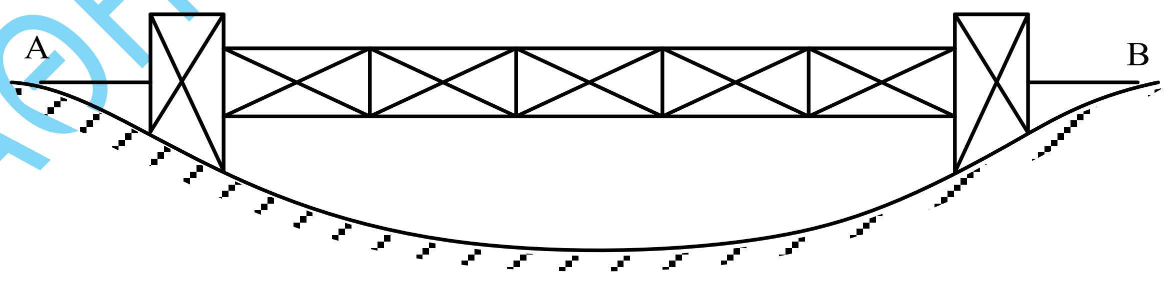
α) Θεωρείστε ότι τα άκρα της γέφυρας είναι ακλόνητα και βρείτε τα επιτρεπόμενα μήκη κύματος των εγκάρσιων στάσιμων κυμάτων που αναπτύσσονται στη γέφυρα.

β) Εκφράστε τις επιτρεπόμενες συχνότητες εγκάρσιας ταλάντωσης της γέφυρας συναρτήσει των $\upsilon_o, \upsilon_1, L$ και n.

γ) Με τη βοήθεια της σχέσης διασποράς υπολογίστε, συναρτήσει των $\upsilon_o, \upsilon_1, L$ και n, την ποσοστιαία μεταβολή $\frac{\Delta\omega_n}{\omega_{on}} = \frac{\omega_n - \omega_{on}}{\omega_{on}}$ της συχνότητας ω_n των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ως προς την αντίστοιχη συχνότητα ω_{on} των κανονικών τρόπων ταλάντωσης στην περίπτωση που η γέφυρα συμπεριφερόταν ως ιδανική χορδή ($\upsilon_1 = 0$).

δ) Η περιοχή που θα κατασκευαστεί η γέφυρα είναι σεισμογενής και παρατηρήσεις έδειξαν ότι οι τοπικοί σεισμοί έχουν διάρκεια Δt μεγαλύτερη από 2,5 sec. Εκτιμήστε κατά προσέγγιση τι διάστημα τιμών θα πρέπει να λαβαίνει η σταθερά υ_1, ώστε οι τοπικοί σεισμοί να μην προκαλούν εγκάρσιες ταλαντώσεις της γέφυρας.

Λύση



α) Η γενική εξίσωση απομάκρυνσης της γέφυρας είναι η επαλληλία των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin k_n x + B_n \cos k_n x)\cos(\omega_n t+\varphi_n) \qquad \textbf{(1)}$$

όπου ω_n είναι οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και $k_n = 2\pi/\lambda_n$ είναι οι κυματάριθμοι των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.
Αφού τα άκρα της γέφυρας είναι ακλόνητα η απομάκρυνση y(x,t) υπακούει στις συνοριακές συνθήκες Dirichlet: y(x=0,t)=0 και y(x=L,t)=0. Δηλαδή:

$$y(x=0,t)=0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cdot 0+B_n\cdot\cos 0)\cos(\omega_n t+\varphi_n)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n\cos(\omega_n t+\varphi_n)=0 \overset{\forall t}{\Rightarrow} B_n=0$$

Οπότε είναι: $$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos k_n x\cos(\omega_n t+\varphi_n) \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης είναι:

$$y(x=L,t)=0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin k_n L\cos(\omega_n t+\varphi_n)=0 \overset{\forall t}{\Rightarrow} A_n\sin k_n L=0 \overset{A_n\neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \sin k_n L=0 \Rightarrow k_n L=n\pi \Rightarrow k_n=\frac{n\pi}{L} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_n}=\frac{n\pi}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_n=\frac{2L}{n},\quad n=1,2,\ldots} \qquad \textbf{(3)}$$

Η σχέση **(3)** δίνει τα επιτρεπόμενα μήκη κύματος και για L=1km είναι:

$$\lambda_n = 2\text{km},\ \ 1\text{km},\ \ 0{,}67\text{km},\ \ 0{,}5\text{km},\ \ 0{,}4\text{km},\ldots$$

β) Με τη βοήθεια της δοσμένης σχέσης διασποράς και αντικαθιστώντας την τιμή των κυματάριθμων $k_n = n\pi/L$ που βρέθηκαν παραπάνω προκύπτουν οι επιτρεπόμενες συχνότητες ως:

$$\omega_n=\upsilon_o k_n+\frac{\upsilon_1}{2\pi}k_n^2=\upsilon_o\frac{n\pi}{L}+\frac{\upsilon_1}{2\pi}\frac{n^2\pi^2}{L^2} \Rightarrow \omega_n=\frac{n\pi}{L}\left(\upsilon_o+\frac{\upsilon_1}{2L}n\right) \qquad \textbf{(4)}$$

γ) Αν η γέφυρα συμπεριφερόταν ως ιδανική χορδή θα ήταν $\upsilon_1=0$, οπότε οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσής της θα ήταν, σύμφωνα με την **(4)**:

$$\omega_{on} = \frac{n\pi}{L}\upsilon_o \qquad \textbf{(5)}$$

Επομένως η ποσοστιαία μεταβολή της συχνότητας ω_n είναι:

$$\frac{\Delta\omega_n}{\omega_{on}} = \frac{\omega_n - \omega_{on}}{\omega_{on}} \overset{(4),(5)}{=} \frac{\frac{n\pi}{L}\upsilon_o + \frac{n^2\pi\upsilon_1}{2L^2} - \frac{n\pi}{L}\upsilon_o}{\frac{n\pi}{L}\upsilon_o} = \frac{\frac{n^2\pi\upsilon_1}{2L^2}}{\frac{n\pi}{L}\upsilon_o} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\omega_n}{\omega_{on}} = \frac{\upsilon_1}{2L\upsilon_o}n}$$

δ) Το εύρος Δω της ζώνης συχνοτήτων των αρμονικών συνιστωσών ενός σεισμού με χρονική διάρκεια μεγαλύτερη από $\Delta t=2{,}5$ sec δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{2{,}5\,\text{sec}} \Rightarrow \Delta\omega = 0{,}8\pi \;\; \text{rad/sec} \qquad \textbf{(6)}$$

Επομένως για να μην προκαλούνται εγκάρσιες ταλαντώσεις στη γέφυρα από το σεισμό θα πρέπει όλες οι επιτρεπόμενες συχνότητες εγκάρσιας ταλάντωσης της γέφυρας να βρίσκονται έξω από το διάστημα Δω. Επειδή $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots$ αρκεί να ισχύει:

$$\Delta\omega < \omega_1 \overset{(4),(6)}{\Rightarrow} 0{,}8\pi < \frac{\pi}{L}\left(\upsilon_o + \frac{\upsilon_1}{2L}\right) \Rightarrow 0{,}8 < \frac{\upsilon_o}{L} + \frac{\upsilon_1}{2L^2} \Rightarrow \frac{\upsilon_1}{2L^2} > 0{,}8 - \frac{\upsilon_o}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 > 2L^2\left(0{,}8 - \frac{\upsilon_0}{L}\right) \overset{L=10^3\text{m}}{\Rightarrow} \upsilon_1 > 2\cdot 10^6\left(0{,}8 - \frac{400}{10^3}\right) \Rightarrow \upsilon_1 > 2\cdot 10^6 \cdot 0{,}4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 > 8\cdot 10^5 \quad \text{m/sec}$$

ΘΕΜΑ 16

Μια μη ιδανική χορδή μήκους L έχει τα άκρα της ακλόνητα στερεωμένα. Η σχέση διασποράς της χορδής αυτής είναι:

$\omega^2 = \upsilon_o^2 k^2 + \beta^2 k^4$, όπου υ_o και β σταθερές.

Να βρεθούν τα μήκη κύματος των στασίμων κυμάτων που μπορούν να αναπτυχθούν στη χορδή και να προσδιοριστούν οι αντίστοιχες συχνότητες.

Λύση

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία του ερωτήματος **(α)** του **Θέματος 15**, δηλαδή παίρνοντας τη γενική εξίσωση απομάκρυνσης της χορδής y(x,t) και εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες Dirichlet στα άκρα της χορδής προκύπτουν οι επιτρεπόμενοι κυματάριθμοι ως:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1,2,... \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ τα επιτρεπόμενα μήκη κύματος είναι:

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{n\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_n} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n = 1,2,... \qquad \textbf{(2)}$$

Τέλος αντικαθιστώντας τις τιμές k_n της **(1)** στη δοσμένη σχέση διασποράς προκύπτουν οι επιτρεπόμενες συχνότητες ως:

$$\omega_n^2 = \upsilon_o^2 k_n^2 + \beta^2 k_n^4 \overset{(1)}{\Rightarrow} \omega_n^2 = \upsilon_o^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} + \beta^2 \frac{n^4\pi^4}{L^4} \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\upsilon_o^2 + \beta^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2}}$$

ΘΕΜΑ 17

Μεταλλική γέφυρα μήκους L συμπεριφέρεται ως μη ιδανική χορδή της οποίας οι εγκάρσιες ταλαντώσεις διαδίδονται κατά μήκος του άξονα x με ταχύτητα c και υπακούουν στην κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \omega_o^2 y$$

α) Υπολογίστε τη σχέση διασποράς.

β) Τα δύο άκρα της γέφυρας είναι ακλόνητα και κατά τη χρονική στιγμή t=0 η γέφυρα έχει μηδενική απομάκρυνση από την κατάσταση ισορροπίας της, αλλά υφίσταται λόγω εξωτερικών αιτίων μια στιγμιαία κατανομή ταχυτήτων $\upsilon(x) = 4\upsilon_o \frac{x}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$. Δείξτε ότι η ταλάντωση της γέφυρας έχει τη μορφή $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \sin \omega_n t$ και υπολογίστε τα k_n, ω_n, A_n.

Λύση

α) Η μετατόπιση y(x,t) για ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης της γέφυρας είναι:

$$y(x,t) = (A\sin kx + B\cos kx)\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(1)}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση **(1)** στη δοσμένη κυματική εξίσωση της γέφυρας προκύπτει η σχέση διασποράς ως:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \omega_o^2 y(x,t) \overset{(1)}{\Rightarrow} -\omega^2 (A\sin kx + B\cos kx)\cos(\omega t + \varphi) =$$

$$-c^2k^2(A\sin kx + B\cos kx)\cos(\omega t + \varphi) + \omega_o^2(A\sin kx + B\cos kx)\cos(\omega t + \varphi) \underset{\forall x}{\overset{\forall t}{\Rightarrow}}$$

$$\Rightarrow -\omega^2 = -c^2k^2 + \omega_o^2 \Rightarrow \boxed{\omega^2 = c^2k^2 - \omega_o^2} \qquad \textbf{(2)}$$

β) Η γενική εξίσωση ταλάντωσης της γέφυρας προκύπτει ως επαλληλία των κανονικών τρόπων ταλάντωσής της και είναι:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin k_n x + B_n \cos k_n x)\cos(\omega_n t+\varphi_n) \qquad \textbf{(3)}$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες Dirichlet στα ακλόνητα άκρα της γέφυρας προκύπτουν:

• Στο άκρο x=0: $y(x=0,t)=0 \overset{(3)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos k_n x \cos(\omega_n t+\varphi_n)=0 \underset{\forall t}{\overset{\forall x}{\Rightarrow}} B_n=0$

Δηλαδή η **(3)** απλοποιείται στη μορφή:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos(\omega_n t+\varphi_n) \qquad \textbf{(4)}$$

• Στο άκρο x=L: $y(x=L,t)=0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n L \cos(\omega_n t+\varphi_n)=0 \underset{\forall t}{\overset{A_n\neq 0}{\Rightarrow}}$

$$\Rightarrow \sin k_n L=0 \Rightarrow k_n L = n\pi \Rightarrow k_n=\frac{n\pi}{L}, \quad n=1,2,\ldots \qquad \textbf{(5)}$$

Σύμφωνα με τη σχέση διασποράς **(2)** οι συχνότητες ω_n είναι:

$$\omega_n^2=c^2k^2-\omega_o^2 \overset{(5)}{\Rightarrow} \omega_n^2=c^2\frac{n^2\pi^2}{L^2}-\omega_o^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{c^2\pi^2}{L^2}n^2-\omega_o^2}, \quad n=1,2,\ldots \qquad \textbf{(6)}$$

Επίσης σύμφωνα με την αρχική συνθήκη θέσης, επειδή η χορδή αρχικά έχει μηδενική απομάκρυνση στη θέση ισορροπίας της, θα ισχύει για κάθε x:

$$y(x,t=0)=0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos\varphi_n=0 \underset{\forall x}{\overset{A_n\neq 0}{\Rightarrow}} \cos\varphi_n=0 \Rightarrow \varphi_n=\pm\frac{\pi}{2}$$

Επομένως η **(4)** γίνεται:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos\left(\omega_n t \pm \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \sin \omega_n t \quad \textbf{(7)}$$

Τέλος εφαρμόζοντας τη συνθήκη της αρχικής ταχύτητας θα υπολογιστούν οι συντελεστές A_n. Δηλαδή:

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \upsilon(x) \overset{(7)}{\Rightarrow} \left.\sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \sin k_n x \cos\omega_n t\right|_{t=0} = \upsilon(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \sin k_n x = 4\upsilon_o \frac{x}{L}\left(1-\frac{x}{L}\right) \qquad \textbf{(8)}$$

Κατά τα γνωστά πλέον πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης **(8)** με $\sin k_n x$ και ολοκληρώνοντας από x=0 μέχρι x=L, στο αριστερό μέλος ως γνωστόν επιβιώνει μόνο ο όρος με δείκτη n και προκύπτει:

$$A_n\omega_n \int_0^L \sin^2 k_n x dx = \frac{4\upsilon_o}{L}\int_0^L x\left(1-\frac{x}{L}\right)\sin k_n x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_n\omega_n \frac{L}{2} = \frac{4\upsilon_o}{L}\frac{4L^2}{n^3\pi^3} \Rightarrow A_n = \frac{32\upsilon_o}{n^3\pi^3\omega_n}$$

όπου το δεύτερο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με διαδοχική ολοκλήρωση κατά παράγοντες όπως έγινε αναλυτικά στο **Θέμα 10**.