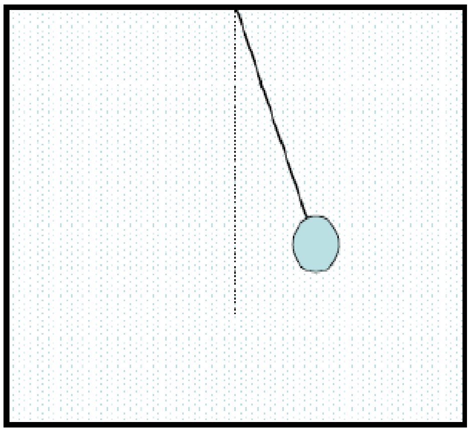
ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΣΕ ΡΕΥΣΤΟ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

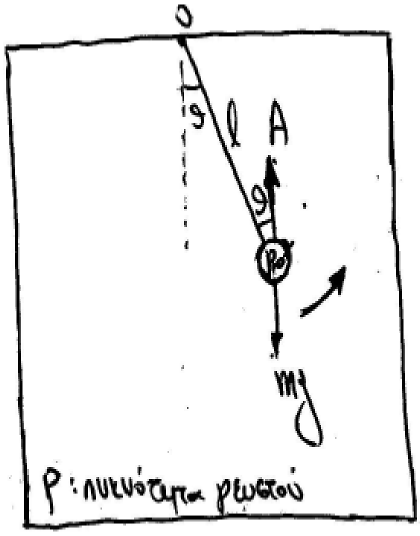
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

5ο ΘΕΜΑ: Μικρή σφαίρα πυκνότητας ρ_0 κρέμεται από αβαρές νήμα μέσα σε ρευστό πυκνότητας ρ_1 και δύναται να εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις περιόδου T_1. Αντικαθιστώντας το ρευστό με άλλο πυκνότητας ρ_2 η περίοδος μεταβάλλεται σε T_2.

Δεχόμενοι ότι οι αντιστάσεις των ρευστών είναι αμελητέες και ότι $\rho_0 > \rho_1$ και $\rho_0 > \rho_2$ να υπολογισθεί η πυκνότητα του σώματος ρ_0 μόνο από τις πυκνότητες ρ_1 και ρ_2.



Λύση



Στη σφαίρα ασκούνται η άνωση και το βάρος της όπως φαίνονται στο σχήμα.
Σύμφωνα με την αρχή του Αρχιμήδη είναι:

$$A = B_{\substack{\text{εκτοπ.}\\\text{ρευστού}}} = m_{\substack{\text{εκτοπ.}\\\text{ρευστού}}} \cdot g = \rho V_{\substack{\text{εκτοπ.}\\\text{ρευστού}}} \cdot g$$

αλλά $V_{\substack{\text{εκτοπ.}\\\text{ρευστού}}} = V_{\text{σφαίρας}}$

$$\rightarrow A = \rho V_{\text{σφαιρ.}} g \quad (1)$$

Η μάζα της σφαίρας είναι: $m = \rho_0 V_{\text{σφαιρ.}}$ (2)

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης για την περιστροφή του σφαιριδίου από τον άξονα ανάρτησης Ο του εκκρεμούς προκύπτει:

$$\sum \vec{\tau}_o = I_o \dot{\vec{\omega}} \to \cancel{l}A\sin\theta - \cancel{l}mg\sin\theta = ml^2\ddot{\theta} \to$$

$$\to (A - mg)\sin\theta = ml\ddot{\theta} \xrightarrow{(1,2)}$$

$$\to (\rho \cancel{V_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho.}} g - \rho_0 \cancel{V_{\sigma\varphi.}} g)\sin\theta = \rho_0 \cancel{V_{\sigma\varphi.}} l\ddot{\theta} \to$$

$$\to (\rho - \rho_0) g \sin\theta = \rho_0 l \ddot{\theta} \to \ddot{\theta} = \frac{(\rho - \rho_0) g}{\rho_0 l}\sin\theta \to$$

$$\to \ddot{\theta} + \frac{(\rho_0 - \rho) g}{\rho_0 l}\sin\theta = 0$$

Για μικρές γωνίες θ είναι $\sin\theta \simeq \theta$ οπότε:

$$\ddot{\theta} + \frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho_0 l} g\,\theta = 0$$

δηλ. το σφαιρίδιο εκτελεί α.α.τ. μέσα στο ρευστό με κυκλική

συχνότητα $\omega = \sqrt{\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 l}}$

& περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_0 l}{\rho_0 - \rho}}$

Συνεπώς για τις ταλαντώσεις σε καθένα ρευστό είναι:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{\rho_0 l}{\rho_0-\rho_1}} \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{\rho_0 l}{\rho_0-\rho_2}} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{(\div)} \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\rho_0-\rho_2}{\rho_0-\rho_1}} \rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{\rho_0-\rho_2}{\rho_0-\rho_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow T_1^2(\rho_0-\rho_1) = T_2^2(\rho_0-\rho_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow T_1^2\rho_0 - T_1^2\rho_1 = T_2^2\rho_0 - T_2^2\rho_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (T_1^2 - T_2^2)\rho_0 = T_1^2\rho_1 - T_2^2\rho_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\rho_0 = \frac{T_1^2\rho_1 - T_2^2\rho_2}{T_1^2 - T_2^2}}$$