ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

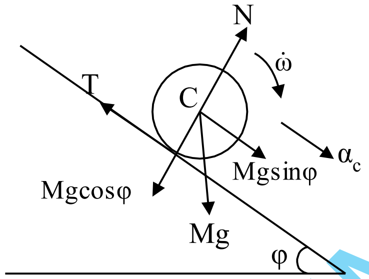
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 1

Μια σφαίρα, ένας κύλινδρος και ένας δακτύλιος έχουν την ίδια μάζα M και ίσες ακτίνες R. Τα τρία σώματα αφήνονται ταυτόχρονα από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας φ και κυλούν χωρίς ολίσθηση. Ποιο σώμα θα φτάσει πρώτο στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου; Δίνονται οι ροπές αδράνειας των στερεών ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας τους:
$I_{σφ} = 2MR^2/5$, $I_{κυλ.} = MR^2/2$ και $I_{δακ.} = MR^2$.

(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Κάθε ένα από τα τρία σώματα εκτελεί σύνθετη κίνηση. Για την μεταφορική κίνηση του κ.μ. ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x = M\vec{\alpha}_c \Rightarrow Mg\sin\varphi - T = M\alpha_c \qquad \textbf{(1)}$$

και για την περιστροφική κίνηση:

$$\Sigma\vec{\tau}_c = I_c\vec{\dot{\omega}} \Rightarrow TR = I_c\dot{\omega} \Rightarrow T = \frac{I_c}{R}\dot{\omega} \qquad \textbf{(2)}$$

Λόγω της κύλισης χωρίς ολίσθηση ισχύει:

$$\upsilon_c = \omega R \Rightarrow \frac{d\upsilon_c}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{\alpha_c}{R} \qquad \textbf{(3)}$$

Έτσι η **(2)** λόγω της **(3)** γίνεται: $T = \frac{I_c}{R^2}\alpha_c$ κι αντικαθιστώντας την

στην **(1)** προκύπτει: $Mg\sin\varphi - \frac{I_c}{R^2}\alpha_c = M\alpha_c \Rightarrow \alpha_c = \frac{g\sin\varphi}{1 + I_c/MR^2}$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι η επιτάχυνση α_c είναι σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου και εξαρτάται από τη ροπή αδράνειας του σώματος.

Επομένως για τη σφαίρα είναι: $\alpha_c = \dfrac{g\sin\varphi}{1 + \dfrac{2MR^2}{5MR^2}} = \dfrac{5}{7}g\sin\varphi$

για τον κύλινδρο: $\alpha_c = \dfrac{g\sin\varphi}{1+\dfrac{MR^2}{2MR^2}} = \dfrac{2}{3} g\sin\varphi$

και για το δακτύλιο : $\alpha_c = \dfrac{g\sin\varphi}{1+\dfrac{MR^2}{MR^2}} = \dfrac{1}{2} g\sin\varphi$

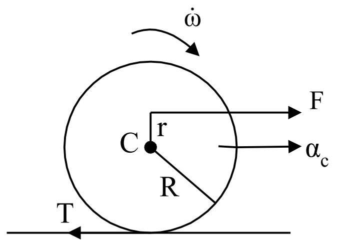
Συνεπώς το σώμα με τη μεγαλύτερη επιτάχυνση α_c, δηλαδή η σφαίρα θα φτάσει πρώτο στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και θα ακολουθήσουν ο κύλινδρος κι έπειτα ο δακτύλιος.

Θέμα 2

Κύλινδρος μάζας M ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Στον κύλινδρο εφαρμόζεται οριζόντια σταθερή δύναμη F προς τα δεξιά σε απόσταση r πάνω από το κέντρο μάζας.
α) Δείξτε ότι αν δεν πρόκειται να συμβεί ολίσθηση μεταξύ κυλίνδρου και επιφάνειας, η δύναμη της τριβής πρέπει να είναι $T = F(R-2r)/3R$.
β) Βρείτε την τιμή r_o της απόστασης r για την οποία η τριβή μηδενίζεται.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Για την μεταφορική κίνηση του κ.μ. ισχύει:

$$\Sigma\vec{F}_x = M\vec{\alpha}_c \Rightarrow F - T = M\alpha_c \Rightarrow \alpha_c = \frac{F-T}{M} \qquad \textbf{(1)}$$

και για την περιστροφική κίνηση ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_c = I_c\dot{\vec{\omega}} \Rightarrow rF + RT = I_c\dot{\omega} \qquad \textbf{(2)}$$

Λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση ισχύει:

$$\upsilon_c = \omega R \Rightarrow \alpha_c = \dot{\omega}R \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{\alpha_c}{R} \overset{(1)}{\Rightarrow} \dot{\omega} = \frac{F-T}{MR} \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα η **(2)** λόγω της **(3)**, λαμβάνοντας υπόψη ότι $I_c = MR^2/2$ γίνεται:

$$rF + RT = \frac{MR^2}{2}\frac{(F-T)}{MR} \Rightarrow rF + RT = \frac{R}{2}(F-T) \Rightarrow 3RT = RF - 2rF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{F(R-2r)}{3R}$$

β) Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση η τριβή μηδενίζεται όταν:

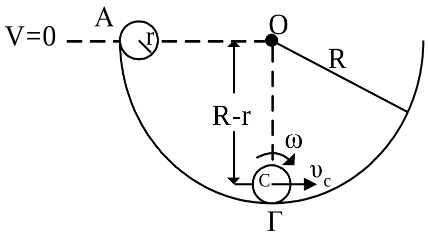
$$R - 2r_o = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \text{όταν} \quad r_o = R/2$$

Θέμα 3

Μια ομογενής σφαίρα μάζας M και ακτίνας r αφήνεται από το χείλος ενός σταθερού ημισφαιρίου ακτίνας R και κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει. Προσδιορίστε τη γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας και τη γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας όταν φτάνει στο χαμηλότερο σημείο του ημισφαιρίου.

(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το Ο προκύπτει:

$$K_A + V_A = K_\Gamma + V_\Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 0 = \frac{1}{2}M\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 - Mg(R - r) \qquad \textbf{(1)}$$

Λόγω της κύλισης χωρίς ολίσθηση ισχύει:

$$\upsilon_c = \omega r \qquad \textbf{(2)}$$

Κι επειδή $I_c = 2Mr^2/5$ η **(1)** λόγω της **(2)** γίνεται:

$$Mg(R - r) = \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}Mr^2\omega^2 \Rightarrow g(R - r) = \frac{7}{10}r^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{10}{7}g\frac{(R - r)}{r^2}} \qquad \textbf{(3)}$$

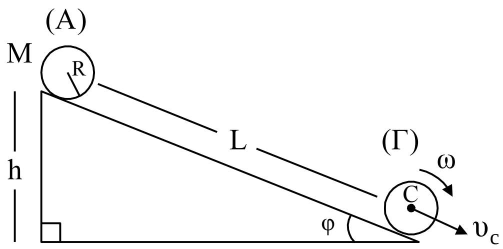
Και η **(2)** δίνει λόγω της **(3)**: $\upsilon_c = \sqrt{\frac{10}{7}g(R - r)}$

Θέμα 4

Κύλινδρος μάζας Μ και ακτίνας R αφήνεται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου γωνίας φ και μήκους L και κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία φθάνει στη βάση και σε πόσο χρόνο θα φτάσει στη βάση.

(Τμήμα Φυσικής Αθήνας)

Λύση



Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση, οπότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ της αρχικής θέσης (Α) και της τελικής (Γ) προκύπτει:

$$K_A + V_A = K_\Gamma + V_\Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 + 0 \Rightarrow Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Λόγω της κύλισης χωρίς ολίσθηση ισχύει:

$\upsilon_c = \omega R \Rightarrow \omega = \upsilon_c/R$ και επειδή $I_c = MR^2/2$ η **(1)** δίνει:

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon_c^2}{R^2} \Rightarrow gh = \frac{3}{4}\upsilon_c^2 \Rightarrow \upsilon_c = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \qquad \textbf{(2)}$$

Κι επειδή $\sin\varphi = \frac{h}{L} \Rightarrow h = L\sin\varphi$ οπότε η **(2)** τελικά δίνει:

$$\upsilon_c = \sqrt{\frac{4}{3}gL\sin\varphi} \qquad \textbf{(3)}$$

Σε τυχαία θέση η ταχύτητα του κυλίνδρου είναι : $\upsilon_c = \sqrt{\frac{4}{3}gx\sin\varphi}$ **(4)**

Επομένως από τον ορισμό της ταχύτητας προκύπτει :

$$\upsilon_c = \frac{dx}{dt} \overset{(4)}{\Rightarrow} \sqrt{\frac{4}{3} gx \sin\varphi} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{4}{3} g \sin\varphi} \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{L} = \sqrt{\frac{4}{3} g \sin\varphi} \cdot t \Rightarrow t = \sqrt{\frac{3L}{g \sin\varphi}}$$

Θέμα 5

Ομογενής κύλινδρος μάζας Μ και ακτίνας R κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε επίπεδη οριζόντια επιφάνεια με σταθερή μεταφορική ταχύτητα υ_o. Ο κύλινδρος συναντά κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ και αρχίζει να ανεβαίνει, πάλι κυλιόμενος χωρίς ολίσθηση.

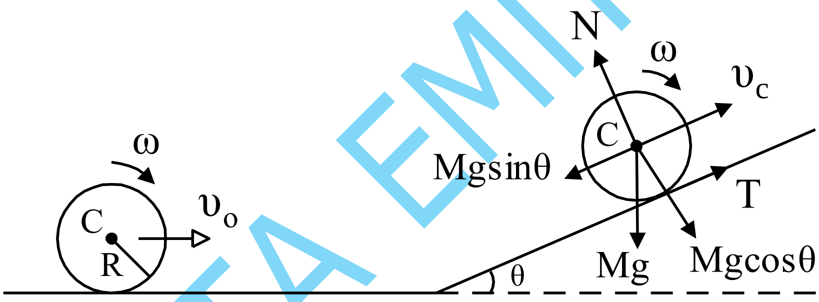
α) Να σχεδιαστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο κατά την άνοδό του, δικαιολογώντας την κατεύθυνση τους. Γράψτε τις εξισώσεις μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης του κυλίνδρου.

β) Υπολογίστε τη γωνιακή επιβράδυνση του κυλίνδρου $\dot{\omega}$, την επιβράδυνση α_c του κέντρου μάζας και το μέτρο της δύναμης τριβής Τ μεταξύ του κυλίνδρου και του κεκλιμένου επιπέδου κατά την ανάβαση.

γ) Υπολογίστε το χρονικό διάστημα $t_{ολ}$ που χρειάζεται ο κύλινδρος μέχρις ότου ανέλθει στο ανώτατο σημείο στο κεκλιμένο επίπεδο και σταματήσει στιγμιαία, θεωρώντας ως αρχή του χρόνου (t = 0) τη στιγμή που ο κύλινδρος αρχίζει την ανάβαση.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο κατά την άνοδό του στο κεκλιμένο επίπεδο είναι το βάρος του Mg, που αναλύεται στις συνιστώσες Mgsinθ και Mgcosθ, η κάθετη αντίδραση N και η δύναμη της τριβής T, όπως φαίνονται στο σχήμα. Η τριβή έχει τη φορά της κίνησης για το λόγο ότι πρέπει η ροπή της να είναι επιβραδύνουσα. Δηλαδή έτσι επιβραδύνει την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου.

Για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = M\vec{\alpha}_c \Rightarrow T - Mg\sin\theta = M\alpha_c \qquad \textbf{(1)}$$

Για την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_c = I_c\dot{\vec{\omega}} \Rightarrow -TR = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} \Rightarrow T = -\frac{MR}{2}\dot{\omega} \qquad \textbf{(2)}$$

β) Λόγω του ότι ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει:

$$\upsilon_c = \omega R \Rightarrow \alpha_c = \dot{\omega}R \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα η **(1)** λόγω των **(2)** και **(3)** δίνει:

$$-\frac{MR}{2}\dot{\omega} - Mg\sin\theta = M\dot{\omega}R \Rightarrow \frac{3}{2}\dot{\omega}R = -g\sin\theta \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{2g\sin\theta}{3R} \qquad \textbf{(4)}$$

Επίσης η **(3)** λόγω της **(4)** δίνει:

$$\alpha_c = -\frac{2}{3}g\sin\theta \qquad \textbf{(5)}$$

και η **(2)** λόγω της **(4)** δίνει:

$$T = \frac{Mg\sin\theta}{3}$$

γ) Από τον ορισμό της γραμμικής επιτάχυνσης του κέντρου μάζας προκύπτει ο ζητούμενος χρόνος ως εξής:

$$\alpha_c = \frac{d\upsilon_c}{dt} \overset{(5)}{\Rightarrow} \int_{\upsilon_o}^{0} d\upsilon_c = -\frac{2}{3}g\sin\theta\int_0^{t_{o\lambda}} dt \Rightarrow -\upsilon_o = -\frac{2}{3}g\sin\theta\, t_{o\lambda} \Rightarrow t_{o\lambda} = \frac{3\upsilon_o}{2g\sin\theta}$$

Θέμα 6

Ένα αβαρές νήμα είναι τυλιγμένο σε κύλινδρο μάζας m = 50 kgr και ακτίνας $R = 0{,}1\text{m}$, ο οποίος αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντια επιφάνεια. Κάποια στιγμή εφαρμόζουμε στο νήμα μια οριζόντια (εφαπτόμενη στην επιφάνεια του κυλίνδρου) σταθερή δύναμη F = 20Nt με συνέπεια το νήμα να αρχίσει να ξετυλίγεται και ο κύλινδρος να κυλιέται χωρίς ολίσθηση. Να υπολογιστούν:

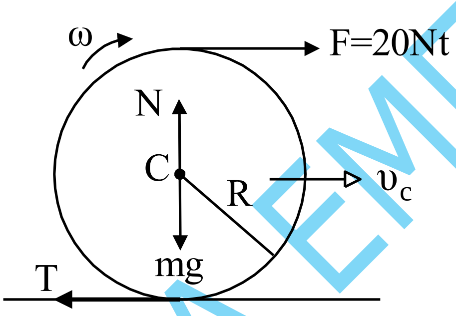
α) Η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου και η γραμμική επιτάχυνση του κέντρου μάζας του.

β) Η ταχύτητα του νήματος και η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου όταν έχει ξετυλιχτεί ένα μήκος s = 3m του νήματος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου: $I_c = MR^2/2$

(Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Εφαρμογών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_c \Rightarrow F - T = m\alpha_c \qquad \textbf{(1)}$$

Για την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_c = I_c\dot{\vec{\omega}} \Rightarrow FR + TR = \frac{1}{2}mR^2\dot{\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F + T = \frac{mR}{2}\dot{\omega} \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση ισχύει:

$$\upsilon_c = \omega R \Rightarrow \alpha_c = \dot{\omega}R \qquad \textbf{(3)}$$

Οπότε η **(1)** λόγω της **(3)** δίνει:

$$F-T=mR\dot{\omega}\Rightarrow T=F-mR\dot{\omega} \qquad \textbf{(4)}$$

Κι επομένως η **(2)** λόγω της **(4)** δίνει:

$$F+F-mR\dot{\omega}=\frac{mR}{2}\dot{\omega}\Rightarrow 2F=\frac{3}{2}mR\dot{\omega}\Rightarrow \dot{\omega}=\frac{4F}{3mR}=5{,}33\ \text{rad}/\sec^2$$

και η **(3)** δίνει: $\alpha_c=\dfrac{4F}{3m}=0{,}53\ \text{m}/\sec^2$

β) Όταν ο κύλινδρος έχει περιστραφεί κατά γωνία φ, το κέντρο μάζας έχει ταυτόχρονα μετατοπιστεί κατά x, λόγω της σύνθετης κίνησης. Επομένως το νήμα έχει συνολικά ξετυλιχτεί κατά s έτσι ώστε:

$$s=x+\varphi R\Rightarrow \upsilon=\upsilon_c+\omega R\Rightarrow \alpha=\alpha_c+\dot{\omega}R=0{,}53+0{,}53\Rightarrow \alpha=1{,}06\ \text{m/sec}^2$$

Η παραπάνω είναι η γραμμή επιτάχυνση του νήματος κι από τον ορισμό αυτής προκύπτει:

$$\alpha=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{ds}\frac{ds}{dt}\Rightarrow 1{,}06=\frac{d\upsilon}{ds}\upsilon\Rightarrow\int_0^{\upsilon}\upsilon d\upsilon=1{,}06\int_0^s ds\Rightarrow\frac{\upsilon^2}{2}=1{,}06s\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\upsilon(s)=1{,}46\sqrt{s}$$

Άρα για s = 3m η ταχύτητα του νήματος είναι: υ=2,53 m/sec

Ο χρόνος που απαιτείται ώστε να ξετυλιχτεί νήμα μήκους s =3m είναι:

$$\upsilon(s)=\frac{ds}{dt}\Rightarrow\int_0^t dt=\frac{1}{1{,}46}\int_0^3\frac{ds}{\sqrt{s}}\Rightarrow t=0{,}68\left[2\sqrt{s}\right]_0^3\Rightarrow t=2{,}35\sec$$

Άρα η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου τη χρονική αυτή στιγμή, σύμφωνα με τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης είναι :

$$\dot{\omega}=\frac{d\omega}{dt}\Rightarrow\int_0^{\omega}d\omega=5{,}33\int_0^{2{,}35}dt\Rightarrow\omega=12{,}53\ \text{rad}/\sec$$

Θέμα 7

Ένας κύλινδρος μάζας M_1 και ακτίνας R_1 είναι αναγκασμένος να περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του. Ένα μη εκτατό και αβαρές νήμα τυλιγμένο γύρω από αυτόν τον κύλινδρο είναι επίσης τυλιγμένο από το άλλο του άκρο, γύρω από ένα άλλο κύλινδρο μάζας M_2 και ακτίνας R_2. Ο δεύτερος κύλινδρος είναι ελεύθερος να ξετυλίγεται και να πέφτει, διατηρώντας τον άξονά του οριζόντιο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Θεωρούμε κατά προσέγγιση ότι το νήμα παραμένει κατακόρυφο. Ζητούνται:

α) Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δεύτερου κυλίνδρου.

β) Η γωνιακή επιτάχυνση του πρώτου κυλίνδρου.

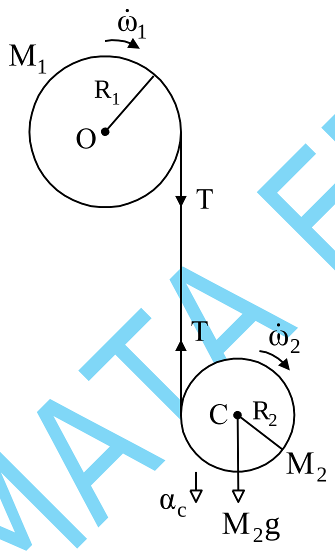
γ) Η γωνιακή επιτάχυνση του δεύτερου κυλίνδρου.

δ) Η τάση του νήματος.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου: $I = MR^2/2$

(Τμήμα Αγρονόμων – Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Ο πρώτος κύλινδρος εκτελεί περιστροφική κίνηση, ενώ ο δεύτερος σύνθετη κίνηση. Μελετώντας την κίνηση κάθε σώματος χωριστά προκύπτει:

Για την περιστροφική κίνηση του πρώτου κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_o = I_o\vec{\dot{\omega}}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow TR_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2\dot{\omega}_1 \Rightarrow$$

$$T \Rightarrow T = \frac{1}{2}M_1R_1\dot{\omega}_1 \qquad \textbf{(1)}$$

Για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του δεύτερου κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = M_2\vec{\alpha}_c \Rightarrow M_2g - T = M_2\alpha_c \qquad \textbf{(2)}$$

Ενώ για την περιστροφική κίνηση του δεύτερου κυλίνδρου περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_c = I_c\vec{\dot{\omega}}_2 \Rightarrow TR_2 = \frac{1}{2}M_2R_2^2\dot{\omega}_2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}M_2R_2\dot{\omega}_2 \qquad \textbf{(3)}$$

Επειδή σε χρόνο t ο πρώτος κύλινδρος περιστρέφεται κατά γωνία φ_1 και ο δεύτερος κύλινδρος κατά γωνία φ_2 με την ίδια φορά, το νήμα ξετυλίγεται συνολικά κατά μήκος $s = \varphi_1 R_1 + \varphi_2 R_2$. Δηλαδή σε χρόνο t το κέντρο μάζας του δεύτερου κυλίνδρου πέφτει κατά απόσταση: $s = \varphi_1 R_1 + \varphi_2 R_2$

Παραγωγίζοντας την απόσταση s δυο φορές ως προς το χρόνο προκύπτει η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δεύτερου κυλίνδρου ως:

$$\alpha_c = \dot{\omega}_1 R_1 + \dot{\omega}_2 R_2 \qquad \textbf{(4)}$$

Λύνοντας τις **(1)** και **(3)** ως προς $\dot{\omega}_1$ και $\dot{\omega}_2$ αντίστοιχα και αντικαθιστώντας στην **(4)** προκύπτει:

$$\alpha_c = \frac{2T}{M_1} + \frac{2T}{M_2} \qquad \textbf{(5)}$$

Οπότε η **(2)** λόγω της **(5)** δίνει:

$$M_2 g - T = M_2\left(\frac{2T}{M_1} + \frac{2T}{M_2}\right) \Rightarrow g - \frac{T}{M_2} = \frac{2T}{M_1} + \frac{2T}{M_2} \Rightarrow g = \frac{2T}{M_1} + \frac{3T}{M_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{g}{\dfrac{2}{M_1} + \dfrac{3}{M_2}} \Rightarrow T = \frac{M_1 M_2 g}{2M_2 + 3M_1} \qquad \textbf{(6)}$$

Τέλος με αντικατάσταση της **(6)** στις **(5)**, **(1)** και **(3)** προκύπτουν αντίστοιχα:

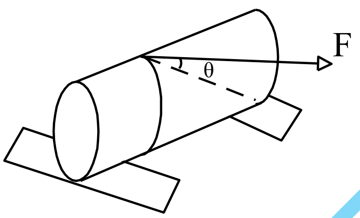
$$\alpha_c = \frac{2(M_1 + M_2)g}{2M_2 + 3M_1}, \qquad \dot{\omega}_1 = \frac{2M_2 g}{R_1(2M_2 + 3M_1)}, \qquad \dot{\omega}_2 = \frac{2M_1 g}{R_2(2M_2 + 3M_1)}$$

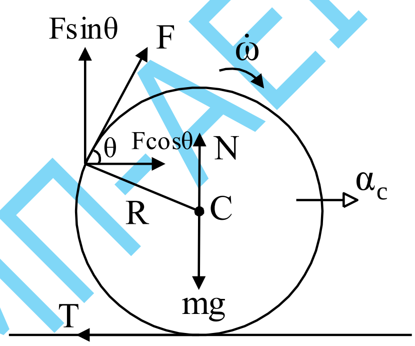
Θέμα 8

Κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R στηρίζεται συμμετρικά μέσω των άκρων του σε δυο οριζόντιες σανίδες. Στο μέσο του κυλίνδρου είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα μέσω του οποίου μπορεί να ασκηθεί εφαπτομενικά ως προς την επιφάνεια και κάθετα στον άξονά του δύναμη μέτρου F υπό γωνία θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο, έτσι ώστε το νήμα να ξετυλίγεται και ο κύλινδρος να κυλίεται προς τα δεξιά. Αν ο συντελεστής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και σανίδων είναι μ, υπολογίστε τη μέγιστη δύναμη F που μπορεί να ασκηθεί, ως συνάρτηση της γωνίας θ, έτσι ώστε να έχουμε κύλιση του κυλίνδρου, χωρίς ολίσθηση. Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του: $I = mR^2/2$.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση





Αφού ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση, για τη μεταφορική του κίνηση ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_c \Rightarrow F\cos\theta - T = m\alpha_c \qquad \textbf{(1)}$$

και $\Sigma\vec{F}_y = 0 \Rightarrow N + F\sin\theta - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F\sin\theta$ **(2)**

Ενώ για την περιστροφική του κίνηση ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_c = I_c\vec{\dot{\omega}} \Rightarrow TR + FR = \frac{1}{2}mR^2\dot{\omega} \Rightarrow T + F = \frac{mR}{2}\dot{\omega} \qquad \textbf{(3)}$$

Επίσης λόγω της κύλισης του κυλίνδρου χωρίς ολίσθηση ισχύει:

$$\upsilon_c = \omega R \Rightarrow \alpha_c = \dot{\omega}R \qquad \textbf{(4)}$$

Επομένως η **(1)** λόγω της **(4)** δίνει:

$$F\cos\theta - T = mR\dot{\omega} \qquad \textbf{(5)}$$

Και η **(3)** λόγω της **(5)** δίνει:

$$T + F = \frac{F\cos\theta - T}{2} \Rightarrow 3T = F(\cos\theta - 2) \Rightarrow T = \frac{F}{3}(\cos\theta - 2) \qquad \textbf{(6)}$$

Για να μην υπάρξει ολίσθηση μεταξύ του κυλίνδρου και της οριζόντιας επιφάνειας θα πρέπει:

$$T \le \mu N \overset{\textbf{(6),(2)}}{\Rightarrow} \frac{F}{3}(\cos\theta - 2) \le \mu(mg - F\sin\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{F}{3}(\cos\theta - 2) + \mu F\sin\theta \le \mu mg \Rightarrow F \le \frac{3\mu mg}{(\cos\theta - 2) + 3\mu\sin\theta}$$

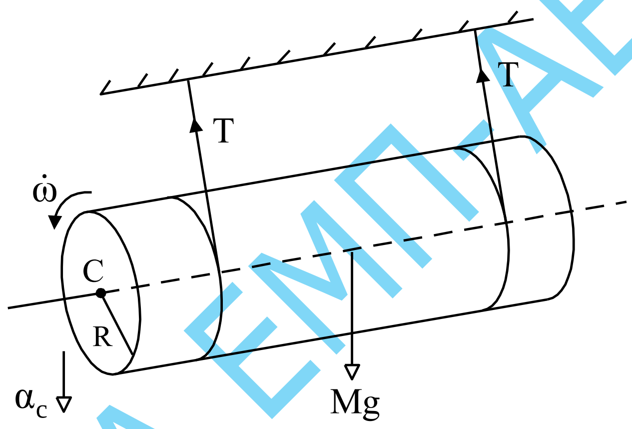
Άρα: $$F_{max} = \frac{3\mu mg}{(\cos\theta - 2) + 3\mu\sin\theta}$$

Θέμα 9

Κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R είναι ανηρτημένος με δυο νήματα που είναι σε ίσες αποστάσεις από τα άκρα του κυλίνδρου. Αν τη χρονική στιγμή t = 0 αφεθεί ο κύλινδρος ελεύθερος να ξετυλιχτεί υπό την επίδραση του βάρους του, να βρεθούν:
α) Οι τάσεις στα νήματα
β) Η γωνιακή επιτάχυνση
γ) Η χρονική εξάρτηση της στιγμιαίας ισχύος που αναπτύσσεται υπό την επίδραση της βαρυτικής δύναμης.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση κατακόρυφα προς τα κάτω, οπότε για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = M\vec{\alpha}_c \Rightarrow Mg - T - T = M\alpha_c \Rightarrow Mg - 2T = M\alpha_c \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ για την περιστροφική του κίνηση περί του άξονα, που διέρχεται από το κέντρο μάζας του ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_c = I_c\vec{\dot{\omega}} \Rightarrow TR + TR = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} \Rightarrow T = \frac{MR}{4}\dot{\omega} \qquad \textbf{(2)}$$

Όταν ο κύλινδρος περιστραφεί κατά γωνία φ, το κέντρο μάζας του C θα κατέβει κατά y = R φ, όσο είναι το αντίστοιχο τόξο (δηλαδή το νήμα που ξετυλίγεται). Οπότε ισχύει:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} \Rightarrow \alpha_c = R\dot{\omega} \qquad \textbf{(3)}$$

Έτσι η **(1)** λόγω της **(3)** δίνει: $Mg - 2T = MR\dot{\omega}$

και με αντικατάσταση αυτής στην **(2)** προκύπτει:

$$T = \frac{Mg - 2T}{4} \Rightarrow 6T = Mg \Rightarrow T = \frac{Mg}{6} \qquad \textbf{(4)}$$

β) Η **(2)** λόγω της **(4)** δίνει για τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου:

$$\frac{Mg}{6} = \frac{MR}{4}\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{2}{3}\frac{g}{R} \qquad \textbf{(5)}$$

γ) Η στιγμιαία ισχύς του βάρους, το οποίο προκαλεί τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου δίνεται από τη σχέση:

$$P = Mg\upsilon_c \qquad \textbf{(6)}$$

Αλλά από τις **(3)** και **(5)** είναι:

$$\alpha_c = \frac{2}{3}g \Rightarrow \frac{d\upsilon_c}{dt} = \frac{2}{3}g \Rightarrow \int_0^{\upsilon_c} d\upsilon_c = \frac{2}{3}g\int_0^t dt \Rightarrow \upsilon_c(t) = \frac{2}{3}gt \qquad \textbf{(7)}$$

Άρα η **(6)** δίνει: $P(t) = \frac{2}{3}Mg^2t$

2ος τρόπος:

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας κι επειδή ο κύλινδρος αρχικά είναι ακίνητος, προκύπτει για το έργο:

$$W = \Delta K = K_{τελ} - K_{αρχ} = \frac{1}{2}M\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 - 0 = \frac{1}{2}M\upsilon_c^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon_c}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{3}{4}M\upsilon_c^2 \qquad \textbf{(8)}$$

Άρα η ισχύς είναι:

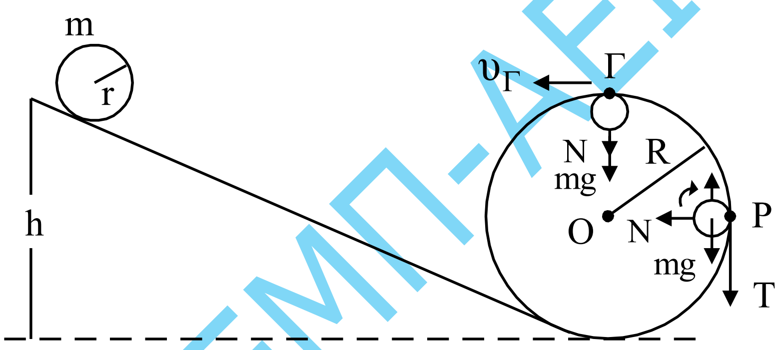
$$P = \frac{dW}{dt} \overset{(8)}{=} \frac{3}{4}M2\upsilon_c\frac{d\upsilon_c}{dt} = \frac{3}{2}M\upsilon_c\alpha_c \overset{(7)}{=} \frac{3}{2}M\frac{2}{3}gt\frac{2}{3}g \Rightarrow P(t) = \frac{2}{3}Mg^2t$$

Θέμα 10

Σφαίρα μάζας m και ακτίνας r αφήνεται από κεκλιμένο επίπεδο ύψους h και στη συνέχεια διαγράφει κύκλο ακτίνας R, ενώ κυλά χωρίς να ολισθαίνει.
α) Να βρεθεί το ελάχιστο ύψος h_{min} από το οποίο πρέπει να αφεθεί η σφαίρα έτσι ώστε να φτάσει στο ψηλότερο σημείο του κύκλου, δηλαδή να κάνει ανακύκλωση.
β) Ποιες είναι στο σημείο Ρ του κύκλου οι συνιστώσες των δυνάμεων που επιδρούν στο σώμα, αν h = 3R;

(Τμήμα Χημείας Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



α) Στο ανώτερο σημείο Γ της τροχιάς στον κύκλο το βάρος mg και η κάθετη αντίδραση N παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου, οπότε ισχύει:

$$N + mg = m\frac{\upsilon_\Gamma^2}{R} \Rightarrow N = m\frac{\upsilon_\Gamma^2}{R} - mg \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά πρέπει $N \geq 0$ οπότε η **(1)** δίνει:

$$m\frac{\upsilon_\Gamma^2}{R} - mg \geq 0 \Rightarrow \upsilon_\Gamma \geq \sqrt{gR}$$

Δηλαδή η ελάχιστη ταχύτητα της σφαίρας στο σημείο Γ ώστε να κάνει ανακύκλωση είναι: $\upsilon_{\Gamma min} = \sqrt{gR}$, η οποία αντιστοιχεί στο ελάχιστο ύψος h_{min}.
Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας για τη σύνθετη κίνηση της σφαίρας μεταξύ των θέσεων Α και Γ, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας προκύπτει:

$$K_A + V_A = K_\Gamma + V_\Gamma \Rightarrow 0 + mgh_{min} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\Gamma min}^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 + mg2R \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά: $\upsilon_{\Gamma min} = \sqrt{gR}$, $I_c = \frac{2}{5}mr^2$ και $\upsilon_{\Gamma min} = \omega r \Rightarrow \omega = \upsilon_{\Gamma min}/r$

οπότε η **(2)** δίνει:

$$mgh_{min} = \frac{1}{2}m\upsilon_{\Gamma min}^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{\upsilon_{\Gamma min}^2}{r^2} + mg2R \Rightarrow gh_{min} = \frac{7}{10}\upsilon_{\Gamma min}^2 + 2gR \Rightarrow$$

$$gh_{min} = \frac{7}{10}gR + 2gR \Rightarrow h_{min} = \frac{27}{10}R$$

β) Στο σημείο Ρ η κάθετη αντίδραση παίζει το ρόλο της κεντρομόλου, δηλαδή:

$$N = m\frac{\upsilon_P^2}{R} \qquad \textbf{(3)}$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Ρ προκύπτει:

$$K_A + V_A = K_P + V_P \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_P^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 + mgR$$

Αλλά: $\upsilon_P = \omega r \Rightarrow \omega = \upsilon_P/r$, $I_c = \frac{2}{5}mr^2$ και $h = 3R$ οπότε η παραπάνω δίνει:

$$3mgR = \frac{1}{2}m\upsilon_P^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{\upsilon_P^2}{r^2} + mgR \Rightarrow 2gR = \frac{7}{10}\upsilon_P^2 \Rightarrow \upsilon_P = \sqrt{\frac{20}{7}gR} \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα η **(3)** λόγω της **(4)** δίνει:

$$N = \frac{20}{7}mg$$

Στο σημείο Ρ για τη σύνθετη κίνηση της σφαίρας ισχύουν:

$$\Sigma\vec{\tau}_c = I_c\vec{\dot{\omega}} \Rightarrow Tr = \frac{2}{5}mr^2\dot{\omega} \Rightarrow T = \frac{2}{5}mr\dot{\omega} \qquad \textbf{(5)}$$

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_c \Rightarrow -T - mg = m\alpha_c \qquad \textbf{(6)}$$

Λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση ισχύει: $\upsilon_c = \omega r \Rightarrow \alpha_c = \dot{\omega} r$ **(7)**

Η **(6)** λόγω της **(7)** δίνει: $-T - mg = m\dot{\omega} r$ και με αντικατάσταση αυτής στην **(5)** προκύπτει:

$$T = \frac{2}{5}(-T - mg) \Rightarrow \frac{7}{5}T = -\frac{2}{5}mg \Rightarrow T = -\frac{2}{7}mg$$

Παρατηρείται ότι λόγω του αρνητικού προσήμου της τριβής, αυτή έχει αντίθετη φορά από αυτή που θεωρήθηκε στα σχήμα. Και αυτό είναι λογικό καθώς η τριβή πρέπει να δίνει επιβραδύνουσα ροπή στο σώμα, δηλαδή να επιβραδύνει την περιστροφική του κίνηση.