ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Μετασχηματισμός Lorentz του Ηλεκτρικού και Μαγνητικού Πεδίου

Έστω ένα ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E}$ και ένα μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ μετρούμενα από ακίνητο παρατηρητή σε σύστημα S. Αν οι μετρούμενες εντάσεις των πεδίων αυτών είναι $\vec{E}'$ και $\vec{B}'$ ως προς κινούμενο παρατηρητή σε σύστημα S', κινούμενο ως προς το S με ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{x}$ συγκρίσιμη με την ταχύτητα του φωτός ($\upsilon > 0{,}1c$, σχετικιστική περιοχή), τότε οι σχέσεις που συνδέουν τις εντάσεις των δυο συστημάτων είναι :

$$\boxed{\begin{array}{ll} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma(E_y - \upsilon B_z) & B'_y = \gamma(B_y + \dfrac{\upsilon}{c^2}E_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + \upsilon B_y) & B'_z = \gamma(B_z - \dfrac{\upsilon}{c^2}E_y) \end{array}} \qquad \textbf{(A)}$$

όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = 1/\sqrt{1-\beta^2} \geq 1$ και $\beta = \upsilon/c \leq 1$.

Οι σχέσεις **(A)** αποτελούν τους **μετασχηματισμούς Lorentz** του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου.

Επειδή το σύστημα S μπορεί να θεωρηθεί ότι κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon} = -\upsilon\hat{x}$ ως προς το S' μπορούν να υπολογιστούν οι **αντίστροφοι μετασχηματισμοί Lorentz** των πεδίων θέτοντας όπου υ το $-\upsilon$ και εναλλάσσοντας τα τονούμενα και άτονα μεγέθη. Επομένως :

$$\begin{array}{ll} E_x = E'_x & B_x = B'_x \\ E_y = \gamma(E'_y + \upsilon B'_z) & B_y = \gamma(B'_y - \dfrac{\upsilon}{c^2}E'_z) \\ E_z = \gamma(E'_z - \upsilon B'_y) & B_z = \gamma(B'_z + \dfrac{\upsilon}{c^2}E'_y) \end{array} \qquad \textbf{(B)}$$

Άσκηση 1

Να αποδειχθεί ότι η ποσότητα $E^2 - c^2B^2$ παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό Lorentz.

Λύση

Θα πρέπει να αποδειχτεί ότι: $E^2 - c^2B^2 = E'^2 - c^2B'^2$

Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz **(A)** είναι:

$$E'^2 = E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2 = E_x^2 + \gamma^2(E_y - \upsilon B_z)^2 + \gamma^2(E_z + \upsilon B_y)^2 =$$

$$= E_x^2 + \gamma^2(E_y^2 + E_z^2) + \gamma^2\upsilon^2(B_y^2 + B_z^2) + 2\gamma^2\upsilon(E_zB_y - E_yB_z) \qquad \textbf{(1)}$$

και $$c^2B'^2 = c^2\left[B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2\right] =$$

$$= c^2\left[B_x^2 + \gamma^2\left(B_y + \frac{\upsilon}{c^2}E_z\right)^2 + \gamma^2\left(B_z - \frac{\upsilon}{c^2}E_y\right)^2\right] =$$

$$= c^2B_x^2 + c^2\gamma^2(B_y^2 + B_z^2) + \gamma^2\frac{\upsilon^2}{c^2}(E_y^2 + E_z^2) + 2\gamma^2\upsilon(E_zB_y - E_yB_z) \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα λόγω των **(1)** και **(2)** προκύπτει:

$$E'^2 - c^2B'^2 = E_x^2 + \gamma^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)(E_y^2 + E_z^2) - c^2B_x^2 + \gamma^2(\upsilon^2 - c^2)(B_y^2 + B_z^2) \, \textbf{(3)}$$

Αλλά: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} \Rightarrow 1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2} = \dfrac{1}{\gamma^2}$ και $\upsilon^2 - c^2 = -\dfrac{c^2}{\gamma^2}$

Οπότε η **(3)** γίνεται:

$$E'^2 - c^2B'^2 = (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) - c^2(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) = E^2 - c^2B^2$$

Δηλαδή η ποσότητα $E^2 - c^2B^2$ είναι αναλλοίωτη στο μετασχηματισμό Lorentz.

Άσκηση 2

Να βρεθεί σύστημα αναφοράς S', στο οποίο τα πεδία $\vec{E}'$ και $\vec{B}'$ να είναι παράλληλα μεταξύ τους.

Λύση

Για να είναι τα πεδία $\vec{E}'$ και $\vec{B}'$ παράλληλα θα πρέπει να ισχύει:

$\vec{E}' = \lambda \vec{B}' \, (\lambda \in R)$ ή ισοδύναμα: $E'_x = \lambda B'_x$, $E'_y = \lambda B'_y$ και $E'_z = \lambda B'_z$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δυο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει:

$$\frac{E'_z}{E'_y} = \frac{B'_z}{B'_y} \overset{(5-38)}{\Rightarrow} \frac{\gamma(E_z + \upsilon B_y)}{\gamma(E_y - \upsilon B_z)} = \frac{\gamma\left(B_z - \frac{\upsilon}{c^2}E_y\right)}{\gamma\left(B_y + \frac{\upsilon}{c^2}E_z\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_z B_y + \frac{\upsilon}{c^2}E_z^2 + \upsilon B_y^2 + \frac{\upsilon^2}{c^2}E_z B_y = E_y B_z - \frac{\upsilon}{c^2}E_y^2 - \upsilon B_z^2 + \frac{\upsilon^2}{c^2}E_y B_z \qquad \textbf{(1)}$$

Θεωρώντας για ευκολία ότι $E_y = 0$, $E_z = E$, $B_z = 0$ και $B_y = B$,
η **(1)** δίνει:

$$EB + \frac{\upsilon}{c^2}E^2 + \upsilon B^2 + \frac{\upsilon^2}{c^2}EB = 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)EB + \frac{\upsilon}{c^2}E^2 + \upsilon B^2 = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης από τη συνθήκη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ισχύει E/B=c, οπότε η **(2)** δίνει:

$$\left(1 + \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)cB^2 + \frac{\upsilon}{c^2}c^2B^2 + \upsilon B^2 = 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)cB^2 + 2\upsilon B^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) + 2\frac{\upsilon}{c} = 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{\upsilon}{c}\right)^2 = 0 \Rightarrow 1 + \frac{\upsilon}{c} = 0 \Rightarrow \frac{\upsilon}{c} = -1 \Rightarrow \upsilon = -c$$

Δηλαδή δεν είναι δυνατό να υπάρχει τέτοιο σύστημα αναφοράς ώστε να είναι τα πεδία παράλληλα μεταξύ τους.

Άσκηση 3

Δίνονται τα κάθετα μεταξύ τους πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ $(\vec{E}\perp\vec{B})$ ως προς ακίνητο παρατηρητή S.

α) Να προσδιοριστεί η ταχύτητα του συστήματος αναφοράς S' ως προς το S, του οποίου ο παρατηρητής S' να αντιλαμβάνεται μόνο το $\vec{E}'$.

β) Ποια η ταχύτητα του S' όταν αυτός αντιλαμβάνεται μόνο το $\vec{B}'$;

Λύση

α) Έστω ότι ο παρατηρητής S βλέπει το ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα y, δηλαδή $\vec{E}=E_y\hat{y}$ και το μαγνητικό πεδίο κάθετο στο ηλεκτρικό, στον άξονα z, δηλαδή $\vec{B}=B_z\hat{z}$.

Ένα κινούμενο σύστημα S' δεν μπορεί να κινείται κατά τον άξονα z γιατί τότε θα έμενε αναλλοίωτη η συνιστώσα B_z και ο S' δεν θα έβλεπε μόνο το $\vec{E}'$.

Αν ο παρατηρητής S' κινείται κατά μήκος του άξονα x τότε οι μετασχηματισμοί Lorentz για το μαγνητικό πεδίο **(A)** δίνουν:

$$B'_x = B_x = 0$$

$$B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{\upsilon}{c^2}E_z\right) = \gamma\left(0 + \frac{\upsilon}{c^2}0\right) = 0$$

$$B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{\upsilon}{c^2}E_y\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα για να αντιλαμβάνεται ο S' μόνο το $\vec{E}'$ θα πρέπει να είναι:

$$B'_z = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} B_z - \frac{\upsilon}{c^2}E_y = 0 \Rightarrow B = \frac{\upsilon}{c^2}E \Rightarrow \upsilon = \frac{c^2 B}{E}$$

Δηλαδή η ταχύτητα του S' πρέπει να είναι: $\vec{\upsilon} = \dfrac{c^2 B}{E}\hat{x}$

β) Ανάλογα με τα παραπάνω αν ο παρατηρητής S' κινείται κατά μήκος του άξονα x τότε οι μετασχηματισμοί Lorentz για το ηλεκτρικό πεδίο **(5-38)** δίνουν:

$$E'_x = E_x = 0$$

$$E'_y = \gamma(E_y - \upsilon B_z) \qquad \textbf{(2)}$$

$$E'_z = \gamma(E_z + \upsilon B_y) = \gamma(0 + \upsilon 0) = 0$$

Άρα για να αντιλαμβάνεται ο S' μόνο το $\vec{B}'$ θα πρέπει:

$$E'_y = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} E_y - \upsilon B_z = 0 \Rightarrow E = \upsilon B \Rightarrow \upsilon = \frac{E}{B}$$

Δηλαδή η ταχύτητα του S' πρέπει να είναι: $\vec{\upsilon} = \frac{E}{B}\hat{x}$