ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΟΡΜΗ & ΕΝΕΡΓΕΙΑ
ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΕΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ

Αν ένα σώμα είναι ακίνητο ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς, τότε η μάζα του m_o λέγεται **μάζα ηρεμίας**. Όταν το σώμα κινείται με ταχύτητα $\upsilon > 0{,}1c$ τότε η μάζα του αυξάνει και λέγεται **σχετικιστική μάζα**, η οποία είναι:

$$m_r = \frac{m_o}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \Rightarrow \boxed{m_r = \gamma m_o} \quad \textbf{(1)}$$

Η **σχετικιστική ορμή** ενός σωματιδίου μάζας ηρεμίας m_o και ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ είναι σύμφωνα με την **(1)**:

$$\boxed{\vec{p} = m_r\vec{\upsilon} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\vec{\upsilon} = \gamma\, m_o\vec{\upsilon}} \quad \textbf{(2)}$$

☞ ***Παρατηρήσεις***

1) Για $\upsilon/c \to 0$ (δηλαδή υ<<c) η **(2)** δίνει $\vec{p} \to m_o\vec{\upsilon}$, την κλασσική τιμή της ορμής.

2) Για $\upsilon \to c$ η **(2)** δίνει $\vec{p} \to \infty$.

3) Η σχετικιστική ορμή διατηρείται στις αλληλεπιδράσεις μεταξύ σωματιδίων και φωτονίων.

Σχετικιστική κινητική ενέργεια: $\boxed{K = (\gamma - 1)m_o c^2}$ **(3)**

Ο όρος $m_o c^2$ στην εξίσωση **(3)** είναι ανεξάρτητος της ταχύτητας και καλείται **ενέργεια ηρεμίας E_o** του σωματιδίου. Δηλαδή:

$$\boxed{E_o = m_o c^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Η **(4)** αποτελεί την σχέση ισοδυναμίας μάζας και ενέργειας και είναι η περίφημη εξίσωση του Einstein , σύμφωνα με την οποία επειδή το c^2 είναι ένας πάρα πολύ μεγάλος αριθμός, ένα μικρό ποσό μάζας αντιστοιχεί σε ένα μεγάλο ποσό ενέργειας.

Η **ολική ενέργεια** του σωματιδίου ισούται με το άθροισμα της κινητικής του ενέργειας και της ενέργειας ηρεμίας του. Δηλαδή :

$$\boxed{E = K + E_o = (\gamma - 1)m_o c^2 + m_o c^2 = \gamma\, m_o c^2} \qquad \textbf{(5)}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις **(5)** και **(2)** μπορεί να εκφραστεί η ολική ενέργεια E συναρτήσει της ορμής p. Η **σχέση ορμής- ενέργειας** είναι:

$$E^2 - p^2c^2 \overset{(2),(5)}{=} (\gamma\, m_o c^2)^2 - (\gamma\, m_o \upsilon)^2 c^2 = (\gamma m_o c^2)^2 \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) =$$

$$= (\gamma m_o c^2)^2 \frac{1}{\gamma^2} = m_o^2 c^4 \Rightarrow \boxed{E^2 = p^2c^2 + m_o^2 c^4} \qquad \textbf{(6)}$$

☞**Παρατηρήσεις:**

1) Κατά την επίλυση προβλημάτων αλληλεπίδρασης σωματιδίων-φωτονίων (σκέδαση-διάσπαση-εξαΰλωση) στην ειδική θεωρία της σχετικότητας, εφαρμόζονται ***πάντα*** οι αρχές διατήρησης της σχετικιστικής ορμής και της ολικής σχετικιστικής ενέργειας.

2) Μια ειδική περίπτωση σωματιδίου, που συναντάται στη σχετικιστική Μηχανική είναι το **φωτόνιο**, το οποίο έχει μάζα ηρεμίας ίση με μηδέν ($m_o = 0$) και ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός c ($\upsilon = c$). Η ενέργεια του φωτονίου είναι:

$$E = h\nu \qquad \textbf{(7)}$$

και η ορμή του συνδέεται με την ενέργεια μέσω της σχέσης:

$$p = \frac{E}{c} \Rightarrow p = \frac{h\nu}{c} \qquad \textbf{(8)}$$

✎ Εφαρμογή 1

Για ποια ταχύτητα είναι η κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου ίση με την ενέργεια ηρεμίας του;

Λύση

Αν $K = E_o = m_o c^2$ τότε η ολική ενέργεια είναι:

$$E = K + E_o = m_o c^2 + m_o c^2 = 2m_o c^2$$

Αλλά σύμφωνα με την **(5)**: $E = \gamma m_o c^2$ οπότε:

$$\gamma = 2 \Rightarrow \gamma^2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{1-\upsilon^2/c^2} = 4 \Rightarrow 1 - \frac{\upsilon^2}{c^2} = 0{,}25 \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{c^2} = 0{,}75 \Rightarrow \upsilon = 0{,}87c$$

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΑΣΚΗΣΗ 1

Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, ένα φωτόνιο ενέργειας Q συγκρούεται με έναν ακίνητο πυρήνα μάζας ηρεμίας M_1. Το φωτόνιο απορροφάται πλήρως, σχηματίζοντας ένα σώμα μάζας ηρεμίας M_2, που κινείται με ταχύτητα υ. Να βρεθούν τα M_2 και υ.

Λύση

ΑΡΧΙΚΑ **ΤΕΛΙΚΑ**

Λόγω της αλληλεπίδρασης φωτονίου – πυρήνα ισχύουν η αρχή διατήρησης της σχετικιστικής ορμής και της ολικής σχετικιστικής ενέργειας, οπότε:

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow \frac{E}{c} + 0 = \gamma M_2 \upsilon \Rightarrow \frac{Q}{c} = \gamma M_2 \upsilon \qquad \textbf{(1)}$$

και

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow Q + M_1 c^2 = \gamma M_2 c^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Διαιρώντας τις **(1)** και **(2)** κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{\upsilon}{c^2} = \frac{Q/c}{Q + M_1 c^2} \Rightarrow \upsilon = \frac{Qc}{Q + M_1 c^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Και η **(1)** δίνει:

$$M_2 = \frac{Q}{c\gamma\upsilon} = \frac{Q}{c\upsilon}\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2} \overset{(3)}{=} \frac{Q}{c\,\dfrac{Qc}{Q + M_1 c^2}} \sqrt{1 - \frac{Q^2}{(Q + M_1 c^2)^2}} =$$

$$=\frac{Q+M_1c^2}{c^2}\sqrt{\frac{Q^2+M_1^2c^4+2QM_1c^2-Q^2}{(Q+M_1c^2)^2}}=\frac{\sqrt{M_1^2c^4+2QM_1c^2}}{c^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_2=\sqrt{M_1^2+\frac{2QM_1}{c^2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα φωτόνιο έχει ενέργεια $E_\gamma=\mu c^2$ όπου μ μια θετική σταθερά. Το φωτόνιο συγκρούεται με ακίνητο σωματίδιο του οποίου η μάζα ηρεμίας είναι M. Μετά τη σύγκρουση δημιουργείται ένα σωματίδιο μάζας ηρεμίας m_o το οποίο παραμένει ακίνητο και ένα άλλο σωματίδιο μάζας ηρεμίας m_1 το οποίο κινείται με ταχύτητα υ_1.

α) Δείξτε ότι είναι $\dfrac{\upsilon_1}{c}=\dfrac{\mu}{M-m_o+\mu}$

β) Δείξτε ότι είναι $m_1=\sqrt{(M-m_o)(M-m_o+2\mu)}$

γ) Εξηγήστε με λόγια τι συμβαίνει στις ειδικές περιπτώσεις:
i) όταν είναι $m_o=0$ και **ii)** όταν είναι $m_o=M$

Λύση

ΑΡΧΙΚΑ **ΤΕΛΙΚΑ**

α) Λόγω της αλληλεπίδρασης φωτονίου – σωματιδίου ισχύει η αρχή διατήρησης της σχετικιστικής ορμής και της ολικής σχετικιστικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow \frac{E_γ}{c} + 0 = 0 + γm_1υ_1 \Rightarrow \frac{μc^2}{c} = γm_1υ_1 \Rightarrow γm_1υ_1 = μc \quad \textbf{(1)}$$

και $$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow E_γ + Mc^2 = m_oc^2 + γm_1c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow μc^2 + Mc^2 = m_oc^2 + γm_1c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow μ + M = m_o + γm_1 \Rightarrow γm_1 = μ + M - m_o \quad \textbf{(2)}$$

Διαιρώντας τις **(1)** και **(2)** κατά μέλη προκύπτει:

$$υ_1 = \frac{μc}{μ + M - m_o} \Rightarrow \frac{υ_1}{c} = \frac{μ}{μ + M - m_o} \quad \textbf{(3)}$$

β) Από την **(1)** χρησιμοποιώντας την **(3)** προκύπτει:

$$\frac{m_1υ_1}{\sqrt{1-υ_1^2/c^2}} = μc \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{m_1μc/μ + M - m_o}{\sqrt{1-μ^2/(μ+M-m_o)^2}} = μc \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = (μ + M - m_o)\sqrt{\frac{μ^2 + M^2 + m_o^2 + 2μM - 2Mm_o - 2μm_o - μ^2}{(μ+M-m_o)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = \sqrt{M^2 + m_o^2 + 2μM - 2Mm_o - 2μm_o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = \sqrt{(M - m_o)(M - m_o + 2μ)}$$

γ) i) Στην πρίπτωση όπου m_o=0 το φωτόνιο θα απορροφάται πλήρως από το ακίνητο σωματίδιο μάζας ηρεμίας Μ και τελικά θα προκύψει ένα σωματίδιο μάζας ηρεμίας $m_1 = \sqrt{M(M+2\mu)}$ και ταχύτητας $\upsilon_1 = \dfrac{\mu c}{\mu + M}$.

ii) Όταν είναι m_o = M το φωτόνιο δεν αλληλεπιδρά με το ακίνητο σωματίδιο και τελικά θα προκύψει το ίδιο ακίνητο σωματίδιο ενώ το σωματίδιο m_1 θα έχει μάζα ηρεμίας $m_1 = 0$ και ταχύτητα $\upsilon_1 = c$, δηλαδή θα είναι φωτόνιο.

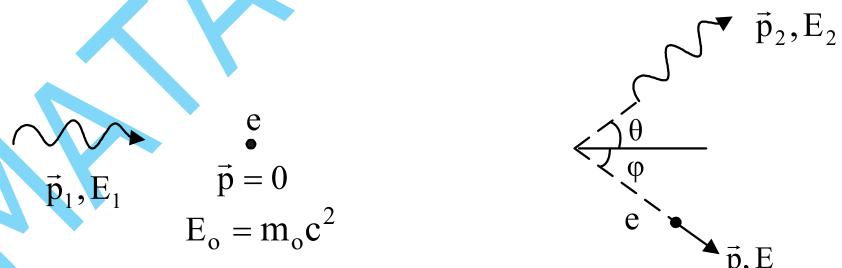
Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ένα φωτόνιο ενέργειας E_1 σκεδάζεται από ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο μάζας ηρεμίας m_o κατά γωνία θ (φαινόμενο Compton).
α) Να υπολογιστεί η ενέργεια του φωτονίου μετά την σκέδαση.
β) Να δειχθεί ότι η μεταβολή του μήκους κύματος του φωτονίου είναι:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_o c}(1-\cos\theta)$$

Λύση



ΑΡΧΙΚΑ **ΤΕΛΙΚΑ**

Κατά τη σκέδαση του φωτονίου από το ηλεκτρόνιο ισχύουν:

- Η αρχή διατήρησης της ολικής ενέργειας :

$$E_1 + m_o c^2 = E_2 + E \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά σύμφωνα με την **(6)** η ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά τη σκέδαση είναι:

$E = \sqrt{p^2c^2 + m_o^2c^4}$ οπότε η **(1)** γίνεται:

$$E_1 + m_o c^2 = E_2 + \sqrt{p^2c^2 + m_o^2c^4} \Rightarrow p^2 = \frac{(E_1 + m_o c^2 - E_2)^2}{c^2} - m_o^2c^2 \qquad \textbf{(2)}$$

- Η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p} \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \Rightarrow (\vec{p})^2 = (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 = (\vec{p}_1)^2 + (\vec{p}_2)^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\theta \qquad \textbf{(3)}$$

Σύμφωνα με την **(8)** η ορμή ενός φωτονίου συναρτήσει της ενέργειάς του είναι $p = E/c$ οπότε $p_1 = E_1/c$ και $p_2 = E_2/c$. Επομένως η **(3)** λόγω και της **(2)** γίνεται:

$$\frac{(E_1 + m_o c^2 - E_2)^2}{c^2} - m_o^2c^2 = \frac{E_1^2}{c^2} + \frac{E_2^2}{c^2} - 2\frac{E_1E_2}{c^2}\cos\theta \Rightarrow$$

$$(E_1 + m_o c^2 - E_2)^2 - m_o^2c^4 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\theta \Rightarrow$$

$$(E_1 - E_2)m_o c^2 = E_1E_2(1-\cos\theta) \Rightarrow \frac{E_1 - E_2}{E_1E_2} = \frac{1}{m_o c^2}(1-\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} = \frac{1}{m_o c^2}(1-\cos\theta) \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα η ενέργεια του σκεδαζομένου φωτονίου είναι:

$$\frac{1}{E_2}=\frac{1}{E_1}+\frac{1}{m_o c^2}(1-\cos\theta)\Rightarrow E_2=\frac{E_1}{1+\frac{E_1}{m_o c^2}(1-\cos\theta)}$$

Από την παραπάνω παρατηρείται ότι $E_2<E_1$, δηλαδή το φωτόνιο κατά τη σκέδαση πάντα χάνει ενέργεια κι επίσης $E_2>0$, δηλαδή το φωτόνιο δεν μπορεί να απορροφηθεί πλήρως από το ελεύθερο ηλεκτρόνιο.
Με το πείραμα αυτό (σκέδαση Compton) επιβεβαιώθηκε η παραδοχή του Einstein ότι το φωτόνιο είναι ένα συμπυκνωμένο πακέτο ενέργειας και για το λόγο αυτό ο Compton τιμήθηκε το 1927 με το βραβείο Nobel Φυσικής.

β) Η συχνότητα ν και το μήκος κύματος λ ενός φωτονίου συνδέονται μέσω της σχέσης: $c=\lambda\nu\Rightarrow \nu=c/\lambda$

Οπότε η ενέργεια φωτονίου δίνεται από τη σχέση: $E=h\nu=hc/\lambda$

Άρα: $E_1=h\nu_1=hc/\lambda_1$, $E_2=h\nu_2=hc/\lambda_2$ και η **(4)** δίνει:

$$\frac{\lambda_2}{hc}-\frac{\lambda_1}{hc}=\frac{1}{m_o c^2}(1-\cos\theta)\Rightarrow \Delta\lambda=\lambda_2-\lambda_1=\frac{h}{m_o c}(1-\cos\theta)$$

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας