ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

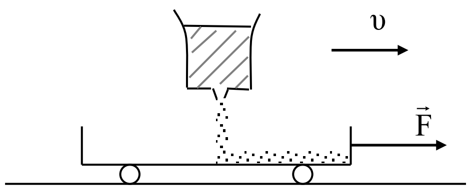
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 1

Βαγονέτο μάζας m_o αρχίζει, σε χρόνο t = 0, να κινείται προς τα δεξιά υπό την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$. Ταυτόχρονα αρχίζει να προστίθεται στο βαγονέτο άμμος από ένα ακίνητο σε αυτό μηχάνημα με σταθερή παροχή λ (kgr/sec).
Βρείτε τη χρονική εξέλιξη της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του βαγονέτου, θεωρώντας ότι η τριβή είναι αμελητέα.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Επειδή το βαγονέτο αυτό αποτελεί σύστημα μεταβλητής μάζας, η γενικευμένη διατύπωση του 2ου νόμου του Newton δίνει την εξίσωση κίνησής του :

$$\Sigma F_{ext} = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\upsilon) \Rightarrow F = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου dm/dt =λ είναι η σταθερή αύξηση της μάζας του βαγονέτου

και $$dm = \lambda dt \Rightarrow \int_{m_o}^{m(t)} dm = \lambda\int_0^t dt \Rightarrow m(t) = m_o + \lambda t$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην εξίσωση **(1)** προκύπτει :

$$F = (m_o + \lambda t)\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\lambda \Rightarrow F - \lambda\upsilon = (m_o + \lambda t)\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{F - \lambda\upsilon} = \int_0^{t} \frac{dt}{m_o + \lambda t} \Rightarrow -\frac{1}{\lambda}\ell n\left(\frac{F - \lambda\upsilon}{F}\right) = \frac{1}{\lambda}\ell n\left(\frac{m_o + \lambda t}{m_o}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell n\left(\frac{F}{F - \lambda\upsilon}\right) = \ell n\left(\frac{m_o + \lambda t}{m_o}\right) \Rightarrow \frac{F}{F - \lambda\upsilon} = \frac{m_o + \lambda t}{m_o} \Rightarrow F - \lambda\upsilon = \frac{F m_o}{m_o + \lambda t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon(t) = \frac{F}{\lambda}\left(1 - \frac{m_o}{m_o + \lambda t}\right) = \frac{F}{\lambda}\frac{m_o + \lambda t - m_o}{m_o + \lambda t} \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{Ft}{m_o + \lambda t}$$

Η επιτάχυνση του βαγονέτου είναι:

$$\alpha(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{F(m_o + \lambda t) - Ft\lambda}{(m_o + \lambda t)^2} \Rightarrow \alpha(t) = \frac{F m_o}{(m_o + \lambda t)^2}$$

Θέμα 2

Μια σφαιρική σταγόνα από χαλάζι πέφτει κατακορύφως λόγω της βαρύτητας, χωρίς αντίσταση από τον αέρα. Λόγω στερεοποίησης υδρατμών στην επιφάνεια της σφαίρας, η ακτίνα της r αυξάνει με ρυθμό dr/dt = λr, όπου λ είναι μια θετική σταθερά. Η αρχική ακτίνα της σταγόνας είναι α και η αρχική της μάζα m_o.

α) Βρείτε τη μάζα της σταγόνας συναρτήσει του χρόνου t.

β) Βρείτε την ταχύτητα της σταγόνας συναρτήσει του χρόνου t.

γ) Δείξτε ότι η ταχύτητα της σταγόνας τείνει προς μια οριακή τιμή ίση με g/3λ.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Η συνάρτηση r(t) υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{dr}{dt}=\lambda r \Rightarrow \int_{\alpha}^{r}\frac{dr}{r}=\lambda\int_{0}^{t}dt \Rightarrow \ell n\frac{r}{\alpha}=\lambda t \Rightarrow r(t)=\alpha e^{\lambda t} \qquad \textbf{(1)}$$

Η μάζα της σφαιρικής σταγόνας μπορεί να εκφραστεί μέσω της σταθερής πυκνότητας ρ. Οπότε: $m_o=\rho V_o=\rho\frac{4}{3}\pi\alpha^3$ και $m=\rho V=\rho\frac{4}{3}\pi r^3$.

Διαιρώντας τις παραπάνω κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{m}{m_o}=\frac{r^3}{\alpha^3}\Rightarrow m=m_o\frac{r^3}{\alpha^3}\overset{(1)}{\Rightarrow} m(t)=m_o e^{3\lambda t} \qquad \textbf{(2)}$$

β) Θεωρώντας ως άξονα της κίνησης τον κατακόρυφο με φορά προς τα κά- τω η εξίσωση κίνησης της σταγόνας από τη γενικευμένη διατύπωση του 2ου νόμου του Newton είναι :

$$\Sigma\vec{F}_{ext}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon})\Rightarrow mg=m\frac{d\upsilon}{dt}+\upsilon\frac{dm}{dt} \qquad \textbf{(3)}$$

όπου σύμφωνα με τη **(2)** προκύπτει: $\frac{dm}{dt}=m_o 3\lambda e^{3\lambda t}$

Επομένως η **(3)** γίνεται:

$$mg=m\frac{d\upsilon}{dt}+\upsilon m_o 3\lambda e^{3\lambda t}\Rightarrow g-\upsilon\frac{m_o 3\lambda e^{3\lambda t}}{m(t)}=\frac{d\upsilon}{dt}\overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow g - 3\lambda\upsilon = \frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_0^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{g - 3\lambda\upsilon} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{3\lambda}\ell n\left(\frac{g - 3\lambda\upsilon}{g}\right) = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g - 3\lambda\upsilon}{g} = e^{-3\lambda t} \Rightarrow g - 3\lambda\upsilon = ge^{-3\lambda t} \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{g}{3\lambda}(1 - e^{-3\lambda t}) \qquad \textbf{(4)}$$

γ) Από την εξίσωση **(4)** προκύπτει ότι όταν $t \to \infty$ τότε $e^{-3\lambda t} \to 0$ κι επομένως $\upsilon \to g/3\lambda$.
Άρα η ταχύτητα της σταγόνας τείνει στην οριακή τιμή $g/3\lambda$.

Θέμα 3

Δορυφόρος κινείται έξω από το πεδίο βαρύτητας και προσβάλλεται από διαπλανητικά κατάλοιπα με ρυθμό λ kgr/m. Να βρεθεί η ταχύτητά του συναρτήσει του χρόνου αν για t =0 η μάζα του είναι m_o και η ταχύτητά του υ_o.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση

Αφού ο δορυφόρος κινείται έξω από το πεδίο βαρύτητας, η εξίσωση κίνησής του είναι:

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow 0 = \frac{d(m\upsilon)}{dt} \qquad \textbf{(1)}$$

Από την **(1)** προκύπτει ότι: $m\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta.$ δηλαδή $p = \sigma\tau\alpha\theta.$

Άρα εξισώνοντας την αρχική ορμή και την ορμή σε μια τυχαία θέση του δορυφόρου προκύπτει:

$$m_o\upsilon_o = m\upsilon \Rightarrow m = \frac{m_o\upsilon_o}{\upsilon} \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης η **(1)** δίνει:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{dm}{dt}\frac{\upsilon}{m} \qquad \textbf{(3)}$$

Επειδή όμως ο ρυθμός δίνεται σε kgr/m θα ισχύει:

$$\lambda = \frac{dm}{dx} \quad \text{κι επομένως:} \quad \frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dx}\frac{dx}{dt} = \lambda\upsilon \qquad \textbf{(4)}$$

Συνεπώς η **(3)** λόγω των **(2)**,**(4)** γράφεται:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{\lambda\upsilon^2}{\frac{m_o\upsilon_o}{\upsilon}} = -\frac{\lambda\upsilon^3}{m_o\upsilon_o} \Rightarrow \int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^3} = -\frac{\lambda}{m_o\upsilon_o}\int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\upsilon^2} - \frac{1}{\upsilon_o^2}\right) = -\frac{\lambda}{m_o\upsilon_o}t \Rightarrow \frac{1}{\upsilon^2} = \frac{1}{\upsilon_o^2} + \frac{2\lambda t}{m_o\upsilon_o} = \frac{m_o\upsilon_o + 2\lambda\upsilon_o^2 t}{m_o\upsilon_o^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = \frac{m_o\upsilon_o^3}{m_o\upsilon_o + 2\lambda\upsilon_o^2 t} \Rightarrow \upsilon(t) = \sqrt{\frac{m_o\upsilon_o^3}{m_o\upsilon_o + 2\lambda\upsilon_o^2 t}}$$

Θέμα 4

Πύραυλος εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω σε ένα σταθερό πεδίο βαρύτητας έντασης g, αποβάλλοντας αέρια με σταθερό ρυθμό k (kgr/sec). Τα αέρια αποβάλλονται με σταθερή ταχύτητα u ως προς τον πύραυλο. Αν τη χρονική στιγμή t=0 η μάζα του πυραύλου είναι m_o και η ταχύτητά του $\upsilon_o = 0$ να υπολογιστούν:

α) Η ταχύτητα του πυραύλου συναρτήσει του χρόνου.

β) Αν ο πύραυλος βρίσκεται έξω από το πεδίο βαρύτητας και η μόνη εξωτερική δύναμη που ασκείται πάνω του είναι μια δύναμη τριβής ίση με $T = -k\upsilon$ (όπου υ η ταχύτητα του πυραύλου), ποια είναι σε αυτή τη περίπτωση η ταχύτητα του πυραύλου συναρτήσει του χρόνου;

(Τμήμα Χημείας Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση

α) Η εξίσωση κίνησης του πυραύλου είναι**:**

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} - \vec{\upsilon}_{rel}\frac{dm}{dt} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $\Sigma\vec{F}_{ext} = -mg$, $\vec{\upsilon}_{rel} = -u$ και λόγω ελάττωσης της μάζας dm/dt = -k.

Επίσης η εξάρτηση της μάζας από το χρόνο είναι:

$$\frac{dm}{dt} = -k \Rightarrow \int_{m_o}^{m} dm = -k\int_0^t dt \Rightarrow m(t) = m_o - kt.$$

Συνεπώς η **(1)** δίνει:

$$-mg = m\frac{d\upsilon}{dt} - (-u)(-k) \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{uk}{m(t)} - g = \frac{uk}{m_o - kt} - g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^t \left(\frac{uk}{m_o - kt} - g\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = uk\left(-\frac{1}{k}\right)\ell n\frac{m_o - kt}{m_o} - gt \Rightarrow \upsilon(t) = u\ell n\frac{m_o}{m_o - kt} - gt$$

β) Στην περίπτωση αυτή είναι $\Sigma\vec{F}_{ext} = -k\upsilon$ και η **(1)** γίνεται:

$$-k\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} - uk \Rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt} = -k(\upsilon - u) \Rightarrow \int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{(\upsilon - u)} = -k\int_0^{t}\frac{dt}{m_o - kt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell n\frac{\upsilon - u}{-u} = \ell n\frac{m_o - kt}{m_o} \Rightarrow \frac{\upsilon - u}{-u} = \frac{m_o - kt}{m_o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = u - \frac{u}{m_o}(m_o - kt) = \frac{um_o - u(m_o - kt)}{m_o} \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{ukt}{m_o}$$

Θέμα 5

Ένα φορτηγό που αρχικά έχει μάζα m_o και ταχύτητα υ_o κινείται με σβησμένη τη μηχανή του ευθύγραμμα χωρίς τριβές. Στο σημείο $x_o = 0$ αρχίζει να βρέχει. Η βροχή πέφτει κατακόρυφα στο φορτηγό με σταθερό ρυθμό λ (kgr/sec). Υπολογίστε την ταχύτητα και τη θέση του φορτηγού συναρτήσει του χρόνου.

(Τμήμα Φυσικής Αθήνας)

Λύση

Θεωρώντας ότι αρχίζει να βρέχει τη χρονική στιγμή t = 0 το φορτηγό αποτελεί σύστημα μεταβλητής μάζας και ισχύει:

$$\Sigma F_{ext} = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\upsilon) = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt} \Rightarrow 0 = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt} \Rightarrow m d\upsilon = -\upsilon dm \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\int_{m_o}^{m}\frac{dm}{m} \Rightarrow \ell n\frac{\upsilon}{\upsilon_o} = -\ell n\frac{m}{m_o} = \ell n\frac{m_o}{m} \Rightarrow \upsilon = \frac{m_o\upsilon_o}{m} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά: $\frac{dm}{dt} = \lambda \Rightarrow \int_{m_o}^{m} dm = \lambda\int_0^t dt \Rightarrow m(t) = m_o + \lambda t$ οπότε η **(1)** δίνει:

$$\upsilon(t) = \frac{m_o\upsilon_o}{m_o + \lambda t}$$

Από τον ορισμό της ταχύτητας:

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = m_o\upsilon_o\int_0^t \frac{dt}{m_o + \lambda t} \Rightarrow x(t) = \frac{m_o\upsilon_o}{\lambda}\ell n\left(\frac{m_o + \lambda t}{m_o}\right)$$

Θέμα 6

Μια βάρκα μάζας Μ αναρροφά νερό από τη θάλασσα και το πετάει όλο προς τα πίσω με ταχύτητα u ως προς τη βάρκα και με ρυθμό μ kgr/sec. Αν η αντίσταση του νερού στην κίνηση της βάρκας έχει μέτρο kυ, όπου υ η ταχύτητα της βάρκας και k θετική γνωστή σταθερά, υπολογίστε την ταχύτητα της βάρκας υ(t) αν η βάρκα αρχικά ηρεμεί.

(Τμήμα Πληροφορικής Αθήνας)

Λύση

Επειδή η βάρκα αναρροφά το νερό και ταυτόχρονα το εκτοξεύει προς τα πίσω, η μάζα της δεν μεταβάλλεται αλλά είναι σταθερή και ίση με Μ.
Αφού μας δίνεται η σχετική ταχύτητα $\upsilon_{re\ell} = -u$ του νερού ως προς τη βάρκα και dm/dt=-μ (αφού η μάζα ελαττώνεται καθώς εκτοξεύεται το νερό προς τα πίσω) η εξίσωση κίνησης αυτής θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Sigma F_{ext} = M\frac{d\upsilon}{dt} - \upsilon_{re\ell}\frac{dm}{dt} \Rightarrow -k\upsilon = M\frac{d\upsilon}{dt} - (-u)(-\mu) \Rightarrow M\frac{d\upsilon}{dt} = \mu u - k\upsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\mu u - k\upsilon} = \frac{1}{M}\int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{k}\ell n\left(\frac{\mu u - k\upsilon}{\mu u}\right) = \frac{1}{M}t \Rightarrow \ell n\left(1 - \frac{k}{\mu u}\upsilon\right) = -\frac{k}{m}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{k}{\mu u}\upsilon = e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow \upsilon(t) = \frac{\mu u}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Θέμα 7

Ένας κόκκος σκόνης αρχίζει να πέφτει ($t = 0$) υπό την επίδραση της βαρύτητας σε περιοχή κορεσμένη από υδρατμούς. Οι υδρατμοί συμπυκνώνονται πάνω στον κόκκο με σταθερό ρυθμό λ (kgr/m) και δημιουργούν έτσι μια σταγόνα νερού με αυξανόμενη μάζα.

α) Να βρεθεί η επιτάχυνση της σταγόνας ως συνάρτηση της ταχύτητας και της απόστασης που διένυσε.

β) Με βάση την έκφραση που βρέθηκε για την επιτάχυνση, να διατυπωθεί η εξίσωση κίνησης της σταγόνας.

(Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

Αφού ο κόκκος αποτελεί σύστημα μεταβλητής μάζας θα ισχύει για την κίνησή του η γενικευμένη διατύπωση του 2[ου] νόμου του Newton. Δηλαδή, θεωρώντας ως άξονα της κίνησης τον κατακόρυφο άξονα με φορά προς τα κάτω προκύπτει:

$$\Sigma F_{ext} = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\upsilon) \Rightarrow mg = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt} \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή ο ρυθμός μεταβολής της μάζας δίνεται σε kgr/m είναι $\lambda = dm/dy$ κι επομένως:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dy}\frac{dy}{dt} = \lambda\upsilon \qquad \textbf{(2)}$$

Η μάζα m συναρτήσεις του ύψους y βρίσκεται από τη σχέση:

$$\lambda = \frac{dm}{dy} \Rightarrow \int_0^m dm = \lambda\int_0^y dy \Rightarrow m = \lambda y \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα η **(1)** λόγω των **(2)** και **(3)** δίνει:

$$mg = m\frac{d\upsilon}{dt} + \lambda\upsilon^2 \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = g - \frac{\lambda\upsilon^2}{m} \Rightarrow \alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = g - \frac{\lambda\upsilon^2}{\lambda y} \Rightarrow \alpha = g - \frac{\upsilon^2}{y}$$

β) Λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιτάχυνση είναι $\alpha = d^2y/dt^2$ και η ταχύτητα είναι $\upsilon = dy/dt$ η παραπάνω έκφραση της επιτάχυνσης δίνει την εξίσωση κίνησης της σταγόνας :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \Rightarrow y\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - gy = 0$$

Θέμα 8

Μια ρουκέτα αρχικής μάζας M_o εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω από την ηρεμία χάρις στην εκτόνωση αερίων (προς τα κάτω) με ταχύτητα u ως προς τη ρουκέτα και ρυθμό εκτόνωσης α (kgr/sec). Να υπολογιστεί η ταχύτητα ανόδου της ρουκέτας ως προς το έδαφος συναρτήσει του χρόνου υποθέτοντας ότι για μικρά ύψη (πάνω από την επιφάνεια της γης) η επιτάχυνση της βαρύτητας g είναι σταθερή.

(Τμήμα Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

Η ρουκέτα αυτή αποτελεί σύστημα μεταβλητής μάζας και η μόνη δύναμη που επιδρά σε αυτή είναι η δύναμη της βαρύτητας. Θεωρώντας ως άξονα της κίνησης τον κατακόρυφο με θετική φορά προς τα πάνω, από την εξίσωση κίνησης προκύπτει:

$$\Sigma F_{ext} = m\frac{d\upsilon}{dt} - \upsilon_{re\ell}\frac{dm}{dt} \Rightarrow -mg = m\frac{d\upsilon}{dt} - u(-\alpha) \Rightarrow -u\alpha - mg = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{-u\alpha - mg}{m} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{-u\alpha}{m} - g \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή η μάζα της ρουκέτας μειώνεται είναι:

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha \Rightarrow \int_{M_o}^{m} dm = -\alpha\int_0^t dt \Rightarrow m(t) = M_o - \alpha t$$

Άρα η **(1)** δίνει:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{u\alpha}{M_o - \alpha t} - g \Rightarrow \int_0^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^t \left(-\frac{u\alpha}{M_o - \alpha t} - g\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = \frac{-u\alpha}{\alpha}\ell n\left(\frac{M_o - \alpha t}{M_o}\right) - gt \Rightarrow \upsilon(t) = u\ell n\left(\frac{M_o}{M_o - \alpha t}\right) - gt$$

Θέμα 9

Διαστημόπλοιο μάζας M_o έχει διατομή S και κινείται εκτός πεδίου βαρύτητας. Στο διαστημόπλοιο προσκολλάται διαστημική σκόνη με ρυθμό $dM/dt = c\upsilon$, όπου υ η ταχύτητα του διαστημοπλοίου και c θετική σταθερά. Εάν ρ είναι η πυκνότητα της ατμόσφαιρας και το διαστημόπλοιο έχει αρχική ταχύτητα υ_o, να υπολογίσετε:
α) την τιμή της σταθεράς c,
β) να βρείτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης,
γ) να την επιλύσετε ως προς υ,
δ) να υπολογίσετε το χρόνο t που απαιτείται ώστε να επιβραδυνθεί το διαστημόπλοιο στο 80% της αρχικής του ταχύτητας.

(Τμήμα Αγρονόμων – Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Από τον ορισμό της πυκνότητας της ατμόσφαιρας προκύπτει:

$$\rho = \frac{dM}{dV} = \frac{dM}{Sdx} = \frac{dM}{Sdt\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{S}\frac{dM}{dt}\frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{S}c\upsilon\frac{1}{\upsilon} = \frac{c}{S} \Rightarrow c = \rho S \qquad \textbf{(1)}$$

β,γ) Αφού το διαστημόπλοιο κινείται εκτός πεδίου βαρύτητας, ο 2^ος^ νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma F_{ext} = \frac{dp}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(M\upsilon) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Δηλαδή: $M\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow M_o\upsilon_o = M\upsilon \Rightarrow M = \frac{M_o\upsilon_o}{\upsilon}$ **(3)**

Επίσης η **(2)** δίνει:

$$M\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dM}{dt} = 0 \Rightarrow M\frac{d\upsilon}{dt} = -c\upsilon^2 \overset{(1),(3)}{\Rightarrow} \frac{M_o\upsilon_o}{\upsilon}\frac{d\upsilon}{dt} = -\rho S\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^3} = -\frac{\rho S}{M_o\upsilon_o}\int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{2\upsilon^2}\Big|_{\upsilon_o}^{\upsilon} = -\frac{\rho S}{M_o\upsilon_o}t \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\upsilon^2} - \frac{1}{\upsilon_o^2}\right) = \frac{\rho S}{M_o\upsilon_o}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\upsilon^2} = \frac{1}{\upsilon_o^2} + \frac{2\rho S}{M_o\upsilon_o}t = \frac{M_o + 2\rho S\upsilon_o t}{M_o\upsilon_o^2} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{M_o\upsilon_o^2}{M_o + 2\rho S\upsilon_o t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon(t) = \upsilon_o \sqrt{\frac{M_o}{M_o + 2\rho S \upsilon_o t}}$$

δ) Για να είναι $\upsilon = 0{,}8\upsilon_o$ σύμφωνα με την τελευταία πρέπει:

$$0{,}8\upsilon_o = \upsilon_o \sqrt{\frac{M_o}{M_o + 2\rho S \upsilon_o t}} \Rightarrow 0{,}64 = \frac{M_o}{M_o + 2\rho S \upsilon_o t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}64(M_o + 2\rho S \upsilon_o t) = M_o \Rightarrow$$

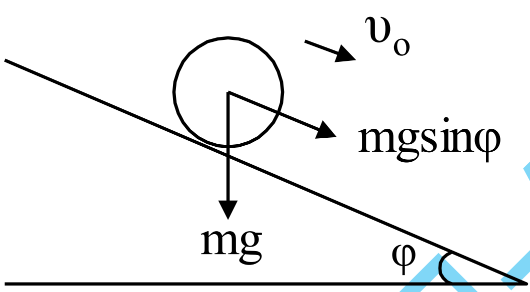
$$\Rightarrow 1{,}28\rho S \upsilon_o t = 0{,}36 M_o \Rightarrow t = \frac{0{,}36 M_o}{1{,}28\rho S \upsilon_o} \Rightarrow t = \frac{9M_o}{32\rho S \upsilon_o}$$

Θέμα 10

Κύλινδρος ολισθαίνει σε χιονισμένη πλαγιά που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο. Κατά την πορεία του στον κύλινδρο κολλάει χιόνι και η μάζα του αυξάνει σύμφωνα με τη σχέση $m = kR^2$, όπου k θετική σταθερά. Αν η αρχική ακτίνα του κυλίνδρου είναι R_o και η αρχική του ταχύτητα υ_o να υπολογιστεί η χρονική εξάρτηση της ακτίνας του με το χρόνο R = R(t) έτσι ώστε αυτός να κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_o.

(Κατατακτήριες εξετάσεις Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Αφού ο κύλινδρος κινείται σε χιονισμένη πλαγιά δεν θα ασκείται τριβή κι επομένως θα ολισθαίνει. Επίσης, για να κινείται με σταθερή ταχύτητα θα πρέπει η επιτάχυνσή του να είναι $\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = 0$. Έτσι στον κύλινδρο ασκείται το βάρος του και συγκεκριμένα η συνιστώσα mgsinφ προκαλεί την κίνησή του.

Επομένως, επειδή είναι σύστημα μεταβλητής μάζας η γενικευμένη διατύπωση του 2^{ου} νόμου του Newton δίνει:

$$\Sigma F_{ext} = \frac{dp}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt} \Rightarrow mg\sin\varphi = 0 + \upsilon_o\frac{dm}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg\sin\varphi = \upsilon_o\frac{dm}{dt} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά: $m = kR^2$ και παραγωγίζοντάς την ως προς το χρόνο: $\frac{dm}{dt} = 2kR\frac{dR}{dt}$

Οπότε η **(1)** δίνει:

$$kR^2 g\sin\varphi = \upsilon_o 2kR\frac{dR}{dt} \Rightarrow \int_{R_o}^{R}\frac{dR}{R} = \frac{g\sin\varphi}{2\upsilon_o}\int_0^t dt \Rightarrow \ell n\frac{R}{R_o} = \frac{g\sin\varphi}{2\upsilon_o}t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(t) = R_o e^{\frac{g\sin\varphi}{2\upsilon_o}t}$$