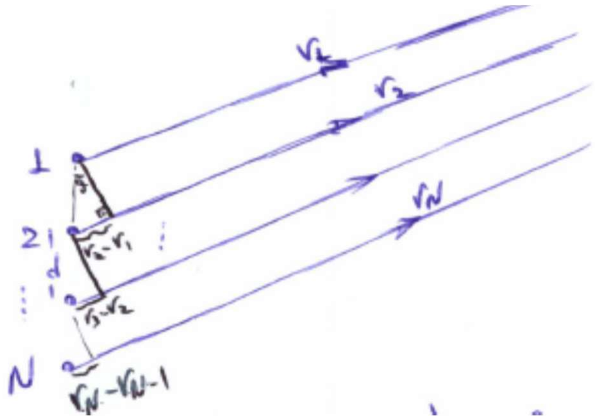
Μεθοδικά, απλά & κατανοητά...

ΣΥΜΒΟΛΗ ΑΠΟ Ν ΣΥΜΦΩΝΕΣ ΠΗΓΕΣ



Το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P μακριά απ' τις πηγές είναι:

$$E_P = E_1 + E_2 + \dots + E_N = E_0 e^{-ikr_1} + E_0 e^{-ikr_2} + E_0 e^{-ikr_3} + \dots + E_0 e^{-ikr_N} \to$$

$$\to E_P = E_0\left(e^{-ikr_1} + e^{-ikr_2} + e^{-ikr_3} + \dots + e^{-ikr_N}\right) \quad (1)$$

Αλλά: $r_2 - r_1 = d\sin\theta \to r_2 = r_1 + d\sin\theta \quad (2)$

$$r_3 - r_2 = d\sin\theta \to r_3 = r_2 + d\sin\theta \overset{(2)}{=} r_1 + 2d\sin\theta \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$r_N - r_{N-1} = d\sin\theta \to r_N = r_{N-1} + d\sin\theta = r_1 + (N-2)d\sin\theta + d\sin\theta \to$$

$$\to r_N = r_1 + (N-1)d\sin\theta \quad (4)$$

Οπότε: $(1) \overset{(2,3,4)}{\leadsto} E_P = E_0\left(e^{-ikr_1} + e^{-ik(r_1+d\sin\theta)} + e^{-ik(r_1+2d\sin\theta)} + \dots + e^{-ik(r_1+(N-1)d\sin\theta)}\right) \to$

$$\to E_P = E_0 e^{-ikr_1}\left(1 + e^{-ikd\sin\theta} + e^{-2ikd\sin\theta} + \dots + e^{-ik(N-1)d\sin\theta}\right) \quad (5)$$

Θέτω: $\varphi = kd\sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$ (6) η διαφορά φάσης 2 διαδοχικών πηγών στο P.

$$(5) \overset{(6)}{\leadsto} E_P = E_0 e^{-ikr_1}\left(1 + e^{-i\varphi} + e^{-2i\varphi} + \dots + e^{-(N-1)i\varphi}\right) \quad (7)$$

Αλλά από τη γεωμετρική σειρά: $\sum_{n=0}^{n} x^n = 1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Στην περίπτωσή μας είναι $x=e^{-i\varphi}$ και το n παίρνει τιμές από 0 ως $n=N-1$, οπότε:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-in\varphi} = 1+e^{-i\varphi}+e^{-2i\varphi}+\dots+e^{-i(N-1)\varphi} = \frac{1-\left(e^{-i\varphi}\right)^{N-\cancel{1}+\cancel{1}}}{1-e^{-i\varphi}} = \frac{1-e^{-iN\varphi}}{1-e^{-i\varphi}} \quad (8)$$

Άρα η (7) $\overset{(8)}{\leadsto}$ $E_p = E_0 e^{-ikr_1}\frac{1-e^{-iN\varphi}}{1-e^{-i\varphi}} =$

$$= E_0 e^{-ikr_1}\frac{e^{-iN\frac{\varphi}{2}}\left(e^{iN\frac{\varphi}{2}}-e^{-iN\frac{\varphi}{2}}\right)}{e^{-i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)} = E_0 e^{-ikr_1} e^{-i(N-1)\frac{\varphi}{2}} \frac{e^{iN\frac{\varphi}{2}}-e^{-iN\frac{\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\varphi}{2}}} \quad (9)$$

Αλλά: $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \rightarrow e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

Συνεπώς: $e^{iN\frac{\varphi}{2}}-e^{-iN\frac{\varphi}{2}} = 2i\sin\left(N\frac{\varphi}{2}\right)$ και $e^{i\frac{\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\varphi}{2}} = 2i\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ και η (9) γίνεται:

$$E_p = E_0 e^{-i\left(kr_1+(N-1)\frac{\varphi}{2}\right)} \frac{\cancel{2i}\sin\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\cancel{2i}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (10)$$

Μεθοδικά, απλά & κατανοητά...

Άρα η ένταση της ακτινοβολίας στο P είναι:

$$I \sim E_P^2 \xrightarrow{(10)} I \sim \underbrace{E_0^2 \, e^{-2i\left(kr_1+(N-1)\frac{\varphi}{2}\right)}}_{= I_0} \frac{\sin^2\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow I = I_0 \frac{\sin^2\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \xrightarrow{(6)} \boxed{I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}} \quad (11)$$