ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΣΥΖΕΥΓΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

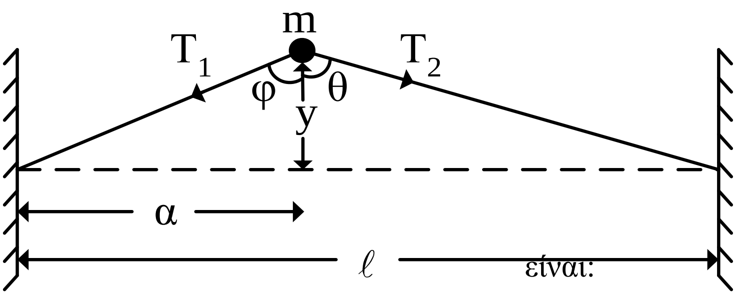
EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

Μια χορδή μήκους ℓ που τείνεται με τάση Τ φέρει σφαιρίδιο μάζας m που απέχει απόσταση α από το αριστερό τοίχωμα. Υποθέτοντας μικρές ταλαντώσεις της μάζας από τη θέση ισορροπίας της να υπολογιστεί η φυσική συχνότητα της εγκάρσιας ταλάντωσης της μάζας.

Λύση



Αναλύοντας τις τάσεις που ασκούνται στη μάζα m από τα δύο τμήματα της χορδής και εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Newton κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, η εξίσωση κίνησης της μάζας είναι:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -T_1 \cos\varphi - T_2 \cos\theta = m\ddot{y} \qquad \textbf{(1)}$$

Λόγω όμως ισορροπίας της μάζας κατά την οριζόντια διεύθυνση x κάθε οριζόντια συνιστώσα της τάσης $T_1 \sin\varphi$, $T_2 \sin\theta$ είναι ίση με την τάση Τ που είχε αρχικά τεντώσει τη χορδή. Δηλαδή:

$$T_1 \sin\varphi = T_2 \sin\theta = T \Rightarrow T_1 = T/\sin\varphi \quad \text{και} \quad T_2 = T/\sin\theta \qquad \textbf{(2)}$$

Αντικαθιστώντας τις **(2)** στην **(1)** προκύπτει:

$$-T\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} - T\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = m\ddot{y} \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά από το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι:

$$\cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{y}{\alpha} \quad \text{και} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{y}{\ell - \alpha} \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα τελικά η **(3)** λόγω των **(4)** δίνει:

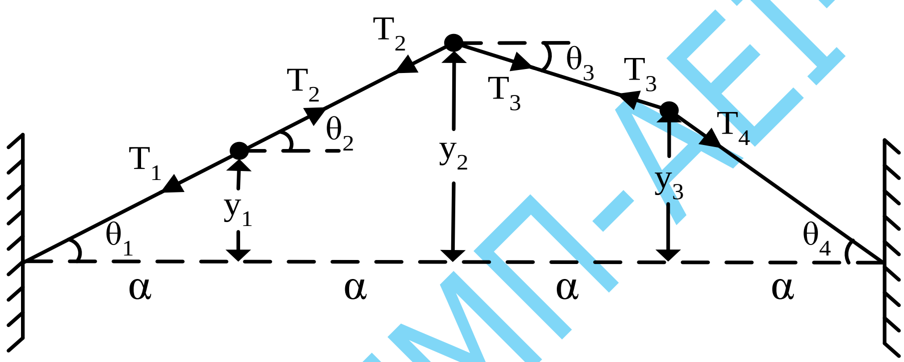
$$m\ddot{y} + T\left(\frac{y}{\alpha} + \frac{y}{\ell - \alpha}\right) = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + Ty\left[\frac{\ell - \alpha + \alpha}{\alpha(\ell - \alpha)}\right] = 0 \Rightarrow \ddot{y} + \frac{T\ell}{m\alpha(\ell - \alpha)}y = 0$$

Συνεπώς η μάζα m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με συχνότητα: $\omega = \sqrt{\dfrac{T\ell}{m\alpha(\ell - \alpha)}}$

ΘΕΜΑ 2

Θεωρείστε μια ελαστική χορδή που τείνεται με τάση T και φέρει τρία σφαιρίδια μάζας m, που απέχουν μεταξύ τους, αλλά και από τα τοιχώματα απόσταση α. Να υπολογιστούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και οι αντίστοιχοι λόγοι των πλατών μετατόπισης των μαζών.

Λύση



Σύμφωνα με τον 2° νόμο του Newton η εξίσωση κίνησης κάθε μάζας κατά την κατακόρυφη διεύθυνση είναι:

$$
\begin{aligned}
&T_2 \sin\theta_2 - T_1 \sin\theta_1 = m\ddot{y}_1 \\
&-T_2 \sin\theta_2 - T_3 \sin\theta_3 = m\ddot{y}_2 \qquad \textbf{(1)} \\
&T_3 \sin\theta_3 - T_4 \sin\theta_4 = m\ddot{y}_3
\end{aligned}
$$

Λόγω όμως ισορροπίας των μαζών κατά την οριζόντια διεύθυνση x κάθε οριζόντια συνιστώσα της τάσης $T_i \cos\theta_i$ είναι ίση με την τάση T που είχε αρχικά τεντώσει τη χορδή. Δηλαδή:

$$T_1 \cos\theta_1 = T_2 \cos\theta_2 = T,\ T_2 \cos\theta_2 = T_3 \cos\theta_3 = T \text{ και}$$

$$T_3 \cos\theta_3 = T_4 \cos\theta_4 = T$$

Οπότε προκύπτει:

$$T_1 = T/\cos\theta_1,\ T_2 = T/\cos\theta_2,\ T_3 = T/\cos\theta_3 \text{ και } T_4 = T/\cos\theta_4$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω στις **(1)** προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
&T\tan\theta_2 - T\tan\theta_1 = m\ddot{y}_1 \\
&-T\tan\theta_2 - T\tan\theta_3 = m\ddot{y}_2 \\
&T\tan\theta_3 - T\tan\theta_4 = m\ddot{y}_3
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2)}
$$

Αλλά από το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι:

$$\tan\theta_1 = \frac{y_1}{\alpha},\quad \tan\theta_2 = \frac{y_2 - y_1}{\alpha},\quad \tan\theta_3 = \frac{y_2 - y_3}{\alpha} \quad \text{και} \quad \tan\theta_4 = \frac{y_3}{\alpha}$$

Άρα οι σχέσεις **(2)** γίνονται:

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{y}_1 = \frac{T}{\alpha}(y_2 - y_1 - y_1) \Rightarrow \ddot{y}_1 - \frac{T}{m\alpha}(-2y_1 + y_2) = 0 \\
&m\ddot{y}_2 = \frac{T}{\alpha}(y_1 - y_2 + y_3 - y_2) \Rightarrow \ddot{y}_2 - \frac{T}{m\alpha}(y_1 - 2y_2 + y_3) = 0 \\
&m\ddot{y}_3 = \frac{T}{\alpha}(y_2 - y_3 - y_3) \Rightarrow \ddot{y}_3 - \frac{T}{m\alpha}(y_2 - 2y_3) = 0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3)}
$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, θεωρώντας λύσεις της μορφής :

$$y_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi),\quad y_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi),\quad y_3(t) = \Gamma\cos(\omega t + \varphi)$$

και αντικαθιστώντας στο σύστημα **(3)** προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
&-A\omega^2 - \frac{T}{m\alpha}(-2A + B) = 0 \Rightarrow \left(\frac{2T}{m\alpha} - \omega^2\right)A - \frac{T}{m\alpha}B = 0 \\
&-B\omega^2 - \frac{T}{m\alpha}(A - 2B + \Gamma) = 0 \Rightarrow -\frac{T}{m\alpha}A + \left(\frac{2T}{m\alpha} - \omega^2\right)B - \frac{T}{m\alpha}\Gamma = 0 \\
&-\Gamma\omega^2 - \frac{T}{m\alpha}(B - 2\Gamma) = 0 \Rightarrow -\frac{T}{m\alpha}B + \left(\frac{2T}{m\alpha} - \omega^2\right)\Gamma = 0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4)}
$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς αυτού συστήματος παρέχει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} \frac{2T}{m\alpha}-\omega^2 & -\frac{T}{m\alpha} & 0 \\ -\frac{T}{m\alpha} & \frac{2T}{m\alpha}-\omega^2 & -\frac{T}{m\alpha} \\ 0 & -\frac{T}{m\alpha} & \frac{2T}{m\alpha}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2T}{m\alpha}-\omega^2\right)\left[\left(\frac{2T}{m\alpha}-\omega^2\right)^2-\frac{T^2}{m^2\alpha^2}\right]-\frac{T^2}{m^2\alpha^2}\left(\frac{2T}{m\alpha}-\omega^2\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2T}{m\alpha}-\omega^2\right)\left[\left(\frac{2T}{m\alpha}-\omega^2\right)^2-\frac{2T^2}{m^2\alpha^2}\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2T}{m\alpha}-\omega^2\right)\left(\omega^4-\frac{4T}{m\alpha}\omega^2+\frac{2T^2}{m^2\alpha^2}\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1^2=(2-\sqrt{2})\frac{T}{m\alpha},\quad \omega_2^2=\frac{2T}{m\alpha}\quad \text{και}\quad \omega_3^2=(2+\sqrt{2})\frac{T}{m\alpha}$$

Οι αντίστοιχοι λόγοι πλατών προκύπτουν με αντικατάσταση των ω_1, ω_2 και ω_3 στις σχέσεις **(4)**:

- Για $\omega_1^2=(2-\sqrt{2})\frac{T}{m\alpha}$ είναι: $\frac{B}{A}=\frac{B}{\Gamma}=\sqrt{2}$ και $\frac{\Gamma}{A}=1$
- Για $\omega_2^2=\frac{2T}{m\alpha}$ είναι: $\frac{B}{A}=\frac{B}{\Gamma}=0$ και $\frac{\Gamma}{A}=-1$
- Για $\omega_3^2=(2+\sqrt{2})\frac{T}{m\alpha}$ είναι: $\frac{B}{A}=\frac{B}{\Gamma}=-\sqrt{2}$ και $\frac{\Gamma}{A}=1$

ΘΕΜΑ 3

Δύο συζευγμένοι αρμονικοί ταλαντωτές κινούμενοι κατά μήκος οριζόντιου άξονα, των οποίων οι μετατοπίσεις περιγράφονται από τις συναρτήσεις x(t) και y(t), υπακούουν στις εξισώσεις:

$$2\frac{d^2x}{dt^2}=\omega_o^2(2y-3x),\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=\omega_o^2(2x-3y)\qquad \omega_o:\text{σταθερά}$$

Χρησιμοποιώντας την έννοια του κανονικού τρόπου ταλάντωσης, να υπολογίσετε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος των δύο ταλαντωτών και τους αντίστοιχους λόγους των πλατών ταλάντωσης των x(t) και y(t).

Λύση

Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης έχουν την μορφή:

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi),\quad y(t)=B\cos(\omega t+\varphi)\qquad \textbf{(1)}$$

Αντικαθιστώντας τις **(1)** στις δοθείσες διαφορικές εξισώσεις προκύπτουν δύο γραμμικές και ομογενείς εξισώσεις για τα πλάτη A και B:

$$-2A\omega^2=\omega_o^2(2B-3A)\Rightarrow(3\omega_o^2-2\omega^2)A-2\omega_o^2B=0$$

$$-B\omega^2=\omega_o^2(2A-3B)\Rightarrow-2\omega_o^2A+(3\omega_o^2-\omega^2)B=0\qquad \textbf{(2)}$$

Για να υπάρχει λύση εκτός από την τετριμένη (A=B=0), πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(2)** να μηδενίζεται. Δηλαδή:

$$\begin{vmatrix}3\omega_o^2-2\omega^2 & -2\omega_o^2\\ -2\omega_o^2 & 3\omega_o^2-2\omega^2\end{vmatrix}=0\Rightarrow(3\omega_o^2-2\omega^2)(3\omega_o^2-\omega^2)-4\omega_o^4=0\Rightarrow$$

$$9\omega_o^4-3\omega_o^2\omega^2-6\omega_o^2\omega^2+2\omega^4-4\omega_o^4=0\Rightarrow2\omega^4-9\omega_o^2\omega^2+5\omega_o^4=0$$

Η δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση ως προς ω^2 έχει ρίζες:

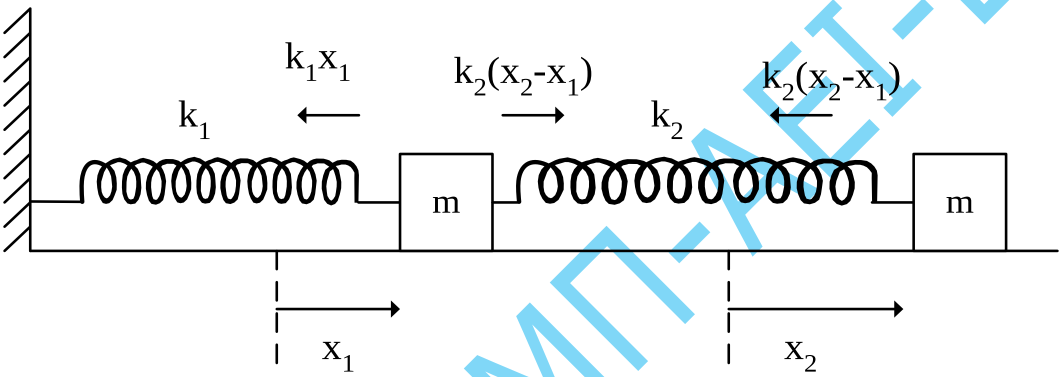
$$\omega_{1,2}^2=\frac{9\omega_o^2\pm\sqrt{81\omega_o^4-40\omega_o^4}}{4}=\frac{9\pm\sqrt{41}}{4}\omega_o^2\Rightarrow\omega_1^2=0{,}65\omega_o^2\ \text{ και }\ \omega_2^2=3{,}85\omega_o^2$$

Επίσης από τις εξισώσεις **(2)** ο λόγος των πλατών για $\omega = \omega_1$ είναι B/A=0,85, ενώ για $\omega=\omega_2$ ο λόγος πλατών είναι B/A= – 2,35.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρείστε ένα σύστημα δύο ίσων μαζών και δύο ελατηρίων που κινούνται χωρίς τριβές πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι, όπως δείχνει το σχήμα. Ο λόγος των σταθερών των ελατηρίων είναι $k_1/k_2=3/2$. Υπολογίστε το λόγο των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

Λύση



Έστω x_1 και x_2 ($x_1<x_2$) οι οριζόντιες μετατοπίσεις των δύο μαζών από τις θέσεις ισορροπίας τους. Οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε μάζα από τα ελατήρια φαίνονται στο σχήμα και σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton, οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών είναι:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k_1x_1 + k_2(x_2-x_1) \\ m\frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_2(x_2-x_1) \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Θεωρώντας τη γενική μορφή ενός κανονικού τρόπου ταλάντωσης με συχνότητα ω είναι:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t+\varphi) \quad \text{και} \quad x_2(t) = B\cos(\omega t+\varphi) \qquad \textbf{(2)}$$

Αντικαθιστώντας τις **(2)** στις εξισώσεις **(1)** προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα εξισώσεων για τα πλάτη A και B:

$$-mA\omega^2 = -k_1 A + k_2(B-A) \Rightarrow (m\omega^2 - k_1 - k_2)A + k_2 B = 0$$

$$-mB\omega^2 = -k_2(B-A) \Rightarrow k_2 A + (m\omega^2 - k_2)B = 0$$

Για να υπάρχει μη τετριμένη λύση του παραπάνω συστήματος πρέπει να μηδενίζεται η ορίζουσα των συντελεστών:

$$\begin{vmatrix} m\omega^2 - k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & m\omega^2 - k_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (m\omega^2 - k_1 - k_2)(m\omega^2 - k_2) - k_2^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2\omega^4 - (k_1 + 2k_2)m\omega^2 + k_1 k_2 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{k_1 + 2k_2 \pm \sqrt{4k_2^2 + k_1^2}}{2m}$$

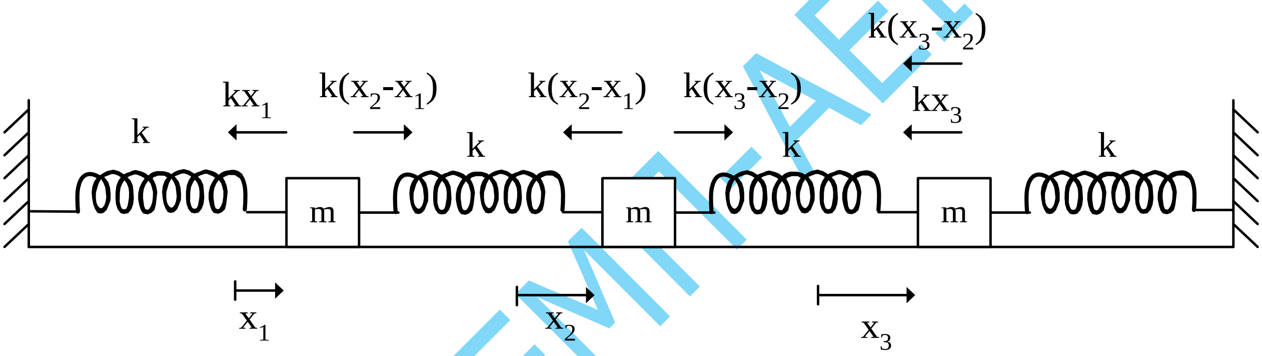
Άρα ο λόγος των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2 + \sqrt{4k_2^2 + k_1^2}}{k_1 + 2k_2 - \sqrt{4k_2^2 + k_1^2}}} = \sqrt{\frac{3 + 2\cdot 2 + \sqrt{4\cdot 2^2 + 3^2}}{3 + 2\cdot 2 - \sqrt{4\cdot 2^2 + 3^2}}} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \sqrt{6}$$

ΘΕΜΑ 5

Τρεις ίσες μάζες m, συνδεδεμένες με τέσσερα όμοια ελατήρια σταθεράς k κινούνται πάνω σε οριζόντιο τραπέζι χωρίς τριβές, όπως δείχνει το σχήμα.
Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης που ικανοποιούν οι τρεις απομακρύνσεις x_1, x_2, x_3 των μαζών από τις θέσεις ισορροπίας τους και προσδιορίστε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

Λύση



Σε μια τυχαία θέση του συστήματος αν x_1, x_2, x_3 είναι οι μετατοπίσεις των μαζών από τη θέση ισορροπίας τους με $x_1 < x_2 < x_3$, τότε το πρώτο ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά x_1, το δεύτερο κατά x_2- x_1, το τρίτο κατά $x_3 - x_2$, ενώ το τέταρτο ελατήριο έχει συμπιεστεί κατά x_3.
Επομένως οι δυνάμεις που ασκούνται στις τρεις μάζες από τα ελατήρια είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα και ο $2^{ος}$ νόμος του Newton για την κίνηση της κάθε μάζας στον άξονα x δίνει:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \Rightarrow m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) = 0$$

$$m\ddot{x}_2 = k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1) \Rightarrow m\ddot{x}_2 + k(-x_1 + 2x_2 - x_3) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2) - kx_3 \Rightarrow m\ddot{x}_3 + k(-x_2 + 2x_3) = 0$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, θεωρώντας λύσεις της μορφής :

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi),\ x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi),\ x_3(t) = C\cos(\omega t + \varphi)$$

και αντικαθιστώντας στο σύστημα **(1)** προκύπτει:

$$\begin{aligned} -mA\omega^2 + k(2A - B) = 0 &\Rightarrow (2k - m\omega^2)A - kB = 0 \\ -mB\omega^2 + k(-A + 2B - C) = 0 &\Rightarrow -kA + (2k - m\omega^2)B - kC = 0 \qquad \textbf{(2)} \\ -mC\omega^2 + k(-B + 2C) = 0 &\Rightarrow -kB + (2k - m\omega^2)C = 0 \end{aligned}$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς αυτού συστήματος δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2k - m\omega^2)[(2k - m\omega^2)^2 - k^2] - k^2(2k - m\omega^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2k - m\omega^2)[(2k - m\omega^2)^2 - 2k^2] = 0 \Rightarrow$$

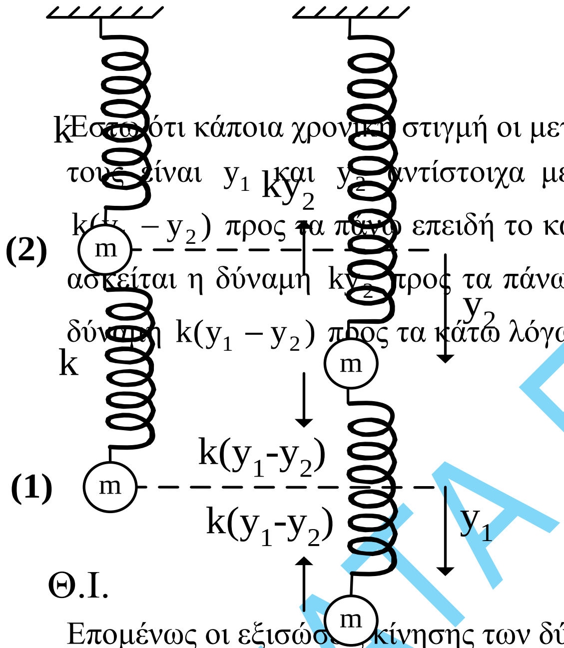
$$\Rightarrow (2k - m\omega^2)(m^2\omega^4 - 4km\omega^2 + 2k^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\frac{k}{m},\quad \omega_2^2 = \frac{2k}{m} \quad \text{και} \quad \omega_3^2 = (2 + \sqrt{2})\frac{k}{m}$$

ΘΕΜΑ 6

Δύο ίσες μάζες m κρέμονται μέσω αβαρών ελατηρίων σταθεράς k, όπως δείχνει το σχήμα. Θεωρώντας μόνο κατακόρυφες κινήσεις και αμελώντας τις τριβές να γραφούν οι εξισώσεις που διέπουν την κίνηση του συστήματος αυτού και να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

Λύση



Έστω ότι κάποια χρονική στιγμή οι μετατοπίσεις των δύο μαζών από τις θέσεις ισορροπίας τους είναι y_1 και y_2 αντίστοιχα με $y_1 > y_2$. Τότε στη μάζα **(1)** ασκείται η δύναμη $k(y_1 - y_2)$ προς τα πάνω επειδή το κάτω ελατήριο είναι επιμηκυνμένο, ενώ στη μάζα **(2)** ασκείται η δύναμη ky_2 προς τα πάνω λόγω της επιμήκυνσης του πάνω ελατηρίου και η δύναμη $k(y_1 - y_2)$ προς τα κάτω λόγω του κάτω ελατηρίου.

Σημειώνεται ότι οι δυνάμεις βαρύτητας αγνοούνται γιατί δεν συγκαταλέγονται στις δυνάμεις στις οποίες οφείλονται οι ταλαντώσεις, αλλά απλώς καθορίζουν τις θέσεις ισορροπίας των δύο μαζών.

Επομένως οι εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton είναι:

$$m\ddot{y}_1 = -k(y_1 - y_2) \Rightarrow m\ddot{y}_1 + k(y_1 - y_2) = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$m\ddot{y}_2 = k(y_1 - y_2) - ky_2 \Rightarrow m\ddot{y}_2 + k(-y_1 + 2y_2) = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, θεωρώντας λύσεις της μορφής $y_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $y_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$ και αντικαθιστώντας στο σύστημα των εξισώσεων **(1)** και **(2)** προκύπτει:

$$\left.\begin{array}{l} -m\omega^2 A + k(A - B) = 0 \Rightarrow (k - m\omega^2)A - kB = 0 \\ -m\omega^2 B + k(-A + 2B) = 0 \Rightarrow -kA + (2k - m\omega^2)B = 0 \end{array}\right\} \quad \textbf{(3)}$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(3)** δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (k - m\omega^2)(2k - m\omega^2) - k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2\omega^4 - 3km\omega^2 + k^2 = 0$$

Οι λύσεις της τελευταίας δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:

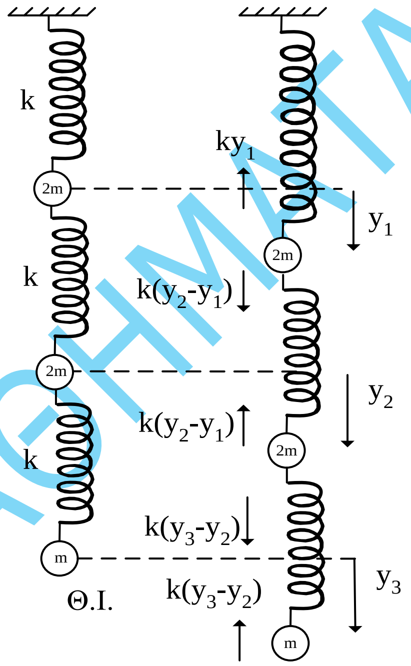
$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3km \pm \sqrt{9k^2m^2 - 4k^2m^2}}{2m^2} = \frac{(3 \pm \sqrt{5})}{2}\frac{k}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{(3 - \sqrt{5})}{2}\frac{k}{m} \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = \frac{(3 + \sqrt{5})}{2}\frac{k}{m}$$

ΘΕΜΑ 7

Τρία ίδια ελατήρια σταθεράς k το καθένα, είναι κρεμασμένα κατακόρυφα από την οροφή, συνδεδεμένα σε σειρά μέσω τριών σωμάτων μάζας 2m, 2m και m αντίστοιχα, όπως δείχνει το σχήμα. Υπολογίστε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

Λύσ



Έστω ότι κάποια τυχαία χρονική στιγμή οι απομακρύνσεις των μαζών από τις θέσεις ισορροπίας τους είναι y_1, y_2, y_3 αντίστοιχα με $y_1<y_2<y_3$. Στη θέση αυτή τα τρία ελατήρια είναι επιμηκυνσμένα και οι δυνάμεις που ασκούνται από αυτά στις τρεις μάζες φαίνονται στο σχήμα.

Συνεπώς σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton, οι εξισώσεις κίνησης των τριών μαζών είναι:

$$2m\ddot{y}_1 = -ky_1 + k(y_2 - y_1) \Rightarrow 2m\ddot{y}_1 + k(2y_1 - y_2) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$2m\ddot{y}_2 = -k(y_2 - y_1) + k(y_3 - y_2) \Rightarrow 2m\ddot{y}_2 + k(-y_1 + 2y_2 - y_3) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

$$m\ddot{y}_3 = -k(y_3 - y_2) \Rightarrow m\ddot{y}_3 + k(-y_2 + y_3) = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, θεωρώντας λύσεις της μορφής :

$$y_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \quad y_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi), \quad y_3(t) = C\cos(\omega t + \varphi)$$

και αντικαθιστώντας στο σύστημα των εξισώσεων **(1)**, **(2)** και **(3)** προκύπτει:

$$-2m\omega^2 A + k(2A - B) = 0 \Rightarrow 2(k - m\omega^2)A - kB = 0$$

$$-2m\omega^2 B + k(-A + 2B - C) = 0 \Rightarrow -kA + 2(k - m\omega^2)B - kC = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$-m\omega^2 C + k(-B + C) = 0 \Rightarrow -kB + (k - m\omega^2)C = 0$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(4)** δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} 2(k - m\omega^2) & -k & 0 \\ -k & 2(k - m\omega^2) & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(k - m\omega^2)[2(k - m\omega^2)^2 - k^2] - k^2(k - m\omega^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k - m\omega^2)[4(k - m\omega^2)^2 - 2k^2 - k^2] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (k - m\omega^2)(4m^2\omega^4 - 8km\omega^2 + k^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{(2-\sqrt{3})}{2}\frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m} \quad \text{και} \quad \omega_3^2 = \frac{(2+\sqrt{3})}{2}\frac{k}{m}$$

ΘΕΜΑ 8

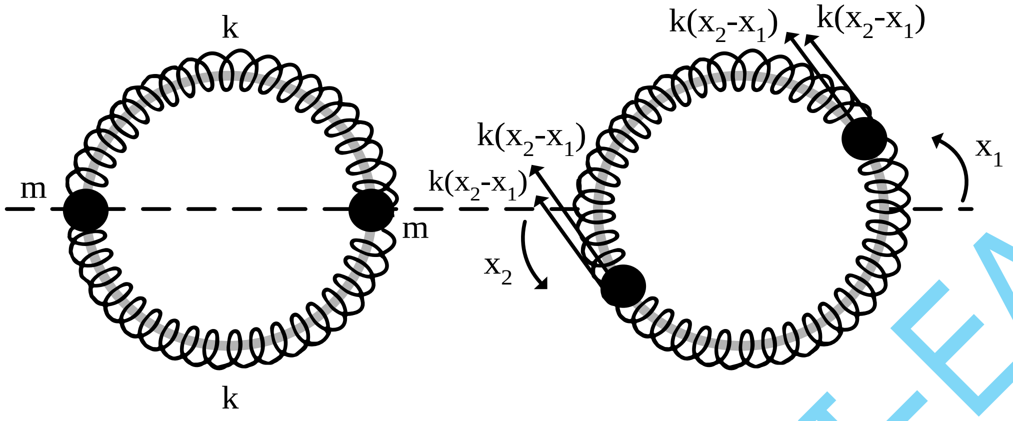
Δύο ελατήρια σταθεράς k και αμελητέας μάζας είναι περασμένα σε κυκλικό ακλόνητο στεφάνι και συνδέονται με δύο δακτυλιοειδή σώματα μάζας m το καθένα, που είναι κι αυτά περασμένα στο στεφάνι και μπορούν να ολισθαίνουν κατά μήκος του. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες.

α) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων και να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

β) Τη χρονική στιγμή t = 0 οι μάζες μετατοπίζονται από τη θέση ισορροπίας κατά $x_1(0) = 2m$ και $x_2(0) = 1m$ αντίστοιχα και αφήνονται ελεύθερες. Να υπολογιστεί συναρτήσει του χρόνου η θέση και η ταχύτητα της κάθε μάζας.

γ) Εξετάστε αν υπάρχει χρονική στιγμή για την οποία κάποια από τις δύο μάζες περνάει από τη θέση αρχικής ισορροπίας της $x_1 = 0$ ή $x_2 = 0$.

Λύση



α) Έστω ότι κάποια χρονική στιγμή οι απομακρύνσεις των μαζών από τις θέσεις ισορροπίας τους είναι x_1 και $x_2 > x_1$ αντίστοιχα. Οι απομακρύνσεις αυτές θεωρούνται μικρές (προσέγγιση μικρών γωνιών).

Επειδή το πάνω ελατήριο είναι επιμηκυνμένο κατά $x_2 - x_1$, ενώ το κάτω ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $x_2 - x_1$ οι δυνάμεις που ασκούνται από αυτά σε κάθε μάζα έχουν μέτρο $k(x_2 - x_1)$ και φορές όπως φαίνονται στο σχήμα.

Επομένως σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton, η εξίσωση κίνησης κάθε μάζας είναι:

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) \Rightarrow m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + 2kx_2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_1) \Rightarrow m\ddot{x}_2 = 2kx_1 - 2kx_2 \qquad \textbf{(2)}$$

Θεωρώντας λύσεις της μορφής :

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \quad x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$$

και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει:

$$\left.\begin{aligned} -m\omega^2 A = -2kA + 2kB \Rightarrow (2k - m\omega^2)A - 2kB = 0 \\ -m\omega^2 B = 2kA - 2kB \Rightarrow -2kA + (2k - m\omega^2)B = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3)}$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(3)** παρέχει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -2k \\ -2k & 2k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2k - m\omega^2)^2 - 4k^2 = 0 \Rightarrow m^2\omega^4 - 4km\omega^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\omega^2(m\omega^2 - 2k) = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = 0 \;\; \text{και} \;\; \omega_2^2 = \frac{4k}{m}$$

Οι λόγοι των πλατών των ταλαντώσεων των δύο μαζών προκύπτουν με αντικατάσταση των τιμών των ω_1, ω_2 σε μια από τις σχέσεις **(3)**. Δηλαδή:

Για $\omega_1^2 = 0$ είναι: $\frac{A}{B} = 1$

1ος τρόπος: $x_1(t) = A\cos\varphi_1$, $x_2(t) = A\cos\varphi_1$

Για $\omega_2^2 = \frac{4k}{m}$ είναι: $\frac{A}{B} = -1$

2ος τρόπος: $x_1(t) = A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, $x_2(t) = -A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

Άρα στη γενικότερη περίπτωση που έχουν διεγερθεί ταυτόχρονα και οι δύο τρόποι ταλάντωσης, οι σχέσεις που περιγράφουν την κίνηση των μαζών του συστήματος θα δίνονται από την υπέρθεση των σχέσεων που περιγράφουν την κίνηση σε κάθε κανονικό τρόπο, δηλαδή:

$$x_1(t) = A\cos\varphi_1 + A\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad \textbf{(4)}$$

$$x_2(t) = A\cos\varphi_1 - A\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad \textbf{(5)}$$

β) Η ταχύτητα κάθε μάζας παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο τις **(4)** και **(5)** είναι:

$$\dot{x}_1(t) = -A\omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad \textbf{(6)}$$

$$\dot{x}_2(t) = A\omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad \textbf{(7)}$$

Από τις δοθείσες αρχικές συνθήκες είναι: $x_1(0)=2$, $x_2(0)=1$ και $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$. Αντικατάσταση αυτών στις **(4)**, **(5)**, **(6)** και **(7)** δίνει:

$$x_1(0)=2 \overset{(4)}{\Rightarrow} A\cos\varphi_1 + A\cos\varphi_2 = 2 \qquad \textbf{(8)}$$

$$x_2(0)=1 \overset{(5)}{\Rightarrow} A\cos\varphi_1 - A\cos\varphi_2 = 1 \qquad \textbf{(9)}$$

$$\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0 \overset{(6),(7)}{\Rightarrow} \pm A_2\omega_2 \sin\varphi_2 = 0 \Rightarrow \sin\varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = 0 \qquad \textbf{(10)}$$

Συνεπώς η **(8)** και **(9)** λόγω της **(10)** δίνουν:

$$\left.\begin{matrix} A\cos\varphi_1 + A = 2 \\ A\cos\varphi_1 - A = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ και } \cos\varphi_1 = 3$$

Άρα η θέση και η ταχύτητα της κάθε μάζας είναι:

$$x_1(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos\omega_2 t, \quad x_2(t) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos\omega_2 t \qquad \textbf{(11)}$$

και
$$\dot{x}_1(t) = -\frac{\omega_2}{2}\sin\omega_2 t, \quad \dot{x}_2(t) = \frac{\omega_2}{2}\sin\omega_2 t \qquad \textbf{(12)}$$

γ) Για να περνάει κάποια από τις δύο μάζες από τη θέση ισορροπίας θα πρέπει:

$$x_1(t) = 0 \overset{(11)}{\Rightarrow} \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos\omega_2 t = 0 \Rightarrow \cos\omega_2 t = -3$$

ή
$$x_2(t) = 0 \overset{(11)}{\Rightarrow} \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos\omega_2 t = 0 \Rightarrow \cos\omega_2 t = 3$$

Αλλά οι σχέσεις που προέκυψαν είναι αδύνατες, οπότε οι μάζες δεν περνούν από τη θέση ισορροπίας.

ΘΕΜΑ 9

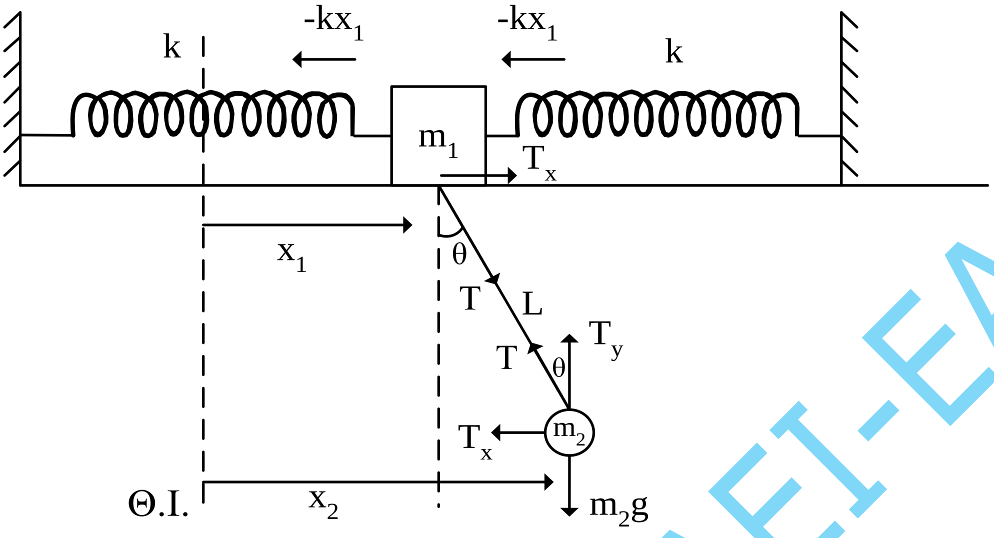
Σώμα μάζας m_1 βρίσκεται μεταξύ δύο ακλόνητων τοιχωμάτων με τα οποία είναι συνδεδεμένο με δύο ελατήρια σταθεράς k το καθένα και μπορεί να κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Από το σώμα κρέμεται, με αβαρές μη εκτατό νήμα μήκους L, μάζα m_2.

α) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης για μικρές απομακρύνσεις από την κατάσταση ισορροπίας.

β) Να υπολογιστούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης στην περίπτωση που $k/m_1 = g/L = \omega_o^2$, $m_2 = 2m_1$.

γ) Να προσδιοριστούν οι κανονικές μεταβλητές.

Λύση



α) Σε μια τυχαία θέση οι απομακρύνσεις των μαζών από τη θέση ισορροπίας τους είναι x_1 και x_2 αντίστοιχα και οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτές φαίνονται στο σχήμα. Συνεπώς εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Newton για κάθε μάζα ξεχωριστά προκύπτει:

- Για τη μάζα m_2 του εκκρεμούς:

$$\Sigma\vec{F} = m_2\vec{\alpha}_2 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m_2\alpha \Rightarrow -T_x = m_2\alpha \Rightarrow -T\sin\theta = m_2\ddot{x}_2 & \textbf{(1)} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y = m_2 g \Rightarrow T\cos\theta = m_2 g \Rightarrow T = \dfrac{m_2 g}{\cos\theta} & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας την **(2)** στην **(1)** προκύπτει:

$$-m_2 g\tan\theta = m_2\ddot{x}_2 \Rightarrow -g\tan\theta = \ddot{x}_2 \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά επειδή το σύστημα εκτελεί μικρές ταλαντώσεις ισχύει η προσέγγιση μικρών γωνιών και από το σχήμα είναι:

$$\tan\theta \cong \sin\theta = \frac{x_2 - x_1}{L} \qquad \textbf{(4)}$$

Οπότε η **(3)** λόγω της **(4)** δίνει:

$$\ddot{x}_2 = -g\frac{(x_2 - x_1)}{L} \Rightarrow \ddot{x}_2 + \frac{g}{L}(x_2 - x_1) = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

- Για τη μάζα m_1:

$$\Sigma\vec{F}_x = m_1\vec{\alpha}_1 \Rightarrow T_x - F_{\varepsilon\lambda} - F_{\varepsilon\lambda} = m_1\alpha_1 \Rightarrow T\sin\theta - kx_1 - kx_1 = m_1\ddot{x}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1\ddot{x}_1 = T\sin\theta - 2kx_1 \overset{(2)}{\Rightarrow} m_1\ddot{x}_1 = m_2 g\tan\theta - 2kx_1 \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow m_1\ddot{x}_1 = \frac{m_2 g}{L}(x_2 - x_1) - 2kx_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 + \left(\frac{2k}{m_1} + \frac{m_2 g}{m_1 L}\right)x_1 - \frac{m_2 g}{m_1 L}x_2 = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

Συνεπώς οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος είναι οι σχέσεις **(5)** και **(6)**.

β) Για $k/m_1 = g/L$ και $m_2 = 2m_1$ οι εξισώσεις κίνησης **(5)** και **(6)** γίνονται:

$$\ddot{x}_1 + \frac{4g}{L}x_1 - \frac{2g}{L}x_2 = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

$$\ddot{x}_2 - \frac{g}{L}x_1 + \frac{g}{L}x_2 = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Θεωρώντας λύσεις της μορφής :

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \;\; x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$$

και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις **(7)**, **(8)** με την απαίτηση να ισχύουν για κάθε t προκύπτει:

$$\begin{aligned} -A\omega^2 + \frac{4g}{L}A - \frac{2g}{L}B = 0 &\Rightarrow \left(\frac{4g}{L} - \omega^2\right)A - \frac{2g}{L}B = 0 \\ -B\omega^2 - \frac{g}{L}A + \frac{g}{L}B = 0 &\Rightarrow -\frac{g}{L}A + \left(\frac{g}{L} - \omega^2\right)B = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(9)}$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(9)** παρέχει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} \frac{4g}{L}-\omega^2 & -\frac{2g}{L} \\ -\frac{g}{L} & \frac{g}{L}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{4g}{L}-\omega^2\right)\left(\frac{g}{L}-\omega^2\right)-\frac{2g^2}{L^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^4-\frac{5g}{L}\omega^2+\frac{2g^2}{L^2}=0 \Rightarrow \omega_1^2=\frac{(5-\sqrt{17})g}{2L} \quad \text{και} \quad \omega_2^2=\frac{(5+\sqrt{17})g}{2L}$$

γ) Αντικαθιστώντας τις τιμές των ω_1, ω_2 σε μια από τις σχέσεις **(9)** προκύπτουν οι λόγοι των πλατών:

- Για $\omega=\omega_1$ είναι: $\dfrac{B_1}{A_1}=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

Οπότε $x_1(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$, $x_2(t)=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ **1ος τρόπος**

- Για $\omega=\omega_2$ είναι: $\dfrac{B_2}{A_2}=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$

Οπότε $x_1(t)=A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$, $x_2(t)=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$ **2ος τρόπος**

Άρα στη γενικότερη περίπτωση που έχουν διεγερθεί ταυτόχρονα και οι δύο τρόποι ταλάντωσης, οι σχέσεις που περιγράφουν την κίνηση των μαζών του συστήματος θα δίνονται από την υπέρθεση των σχέσεων που περιγράφουν την κίνηση σε κάθε κανονικό τρόπο, δηλαδή:

$$x_1(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \qquad \textbf{(10)}$$

$$x_2(t)=\frac{3+\sqrt{17}}{2}A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+\frac{3-\sqrt{17}}{2}A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \qquad \textbf{(11)}$$

Επειδή το σύστημα του σχήματος δεν παρουσιάζει συμμετρία ώστε με προσθαφαίρεση να προκύψουν οι κανονικές συντεταγμένες, θεωρούνται ως κανονικές συντεταγμένες οι:

$$\xi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{και} \quad \xi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Οπότε οι σχέσεις **(10)** και **(11)** δίνουν:

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2 \quad \text{και} \quad 2x_2 = (3+\sqrt{17})\xi_1 + (3-\sqrt{17})\xi_2 \qquad \textbf{(12)}$$

Άρα λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων **(12)** προκύπτουν οι κανονικές συντεταγμένες συναρτήσει των x_1, x_2 ως:

$$\xi_1 = \frac{(\sqrt{17}-3)x_1 + 2x_2}{2\sqrt{17}} \quad \text{και} \quad \xi_2 = \frac{(3+\sqrt{17})x_1 - 2x_2}{2\sqrt{17}}$$

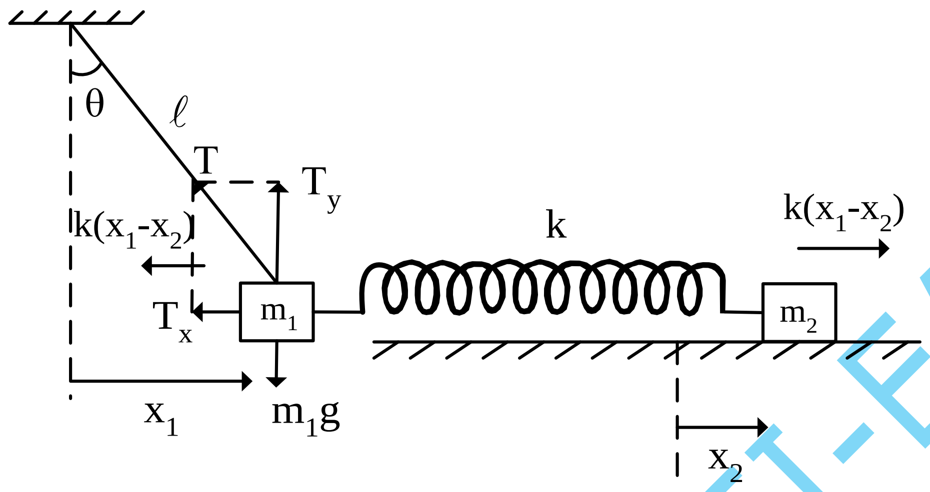
ΘΕΜΑ 10

Εκκρεμές μήκους ℓ και μάζας m_1 εκτελεί μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας έχοντας συνδεθεί μέσω ελατηρίου σταθεράς k με σώμα μάζας m_2, που μπορεί να κινείται ελεύθερα και χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο.

α) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης για μικρές ταλαντώσεις από τη θέση ισορροπίας.

β) Να υπολογιστούν οι ιδιοσυχνότητες και οι κανονικές μεταβλητές του συστήματος, αν $m_1 = m_2 = m$ και $k = mg/\ell$.

Λύση



α) Έστω ότι κάποια χρονική στιγμή η μετατόπιση της μάζας m_2 από την θέση ισορροπίας της είναι x_2, ενώ η απομάκρυνση της μάζας m_1 του εκκρεμούς από την κατακόρυφη θέση είναι $x_1\,(x_1 > x_2)$.
Αν η αρχική απόσταση μεταξύ των μαζών ισούται με το φυσικό μήκος του ελατηρίου, τότε στη τυχαία θέση το ελατήριο ασκεί δύναμη $k(x_1 - x_2)$ στις δύο μάζες με φορά που φαίνεται στο σχήμα. Επίσης στη μάζα m_1 ασκείται και η συνιστώσα της τάσης του νήματος $T_x = T\sin\theta$.
Επομένως εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Newton σε κάθε μάζα χωριστά προκύπτει:

- Για τη μάζα m_1:

$$\Sigma\vec{F} = m_1\vec{\alpha}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m_1\alpha_1 \Rightarrow -k(x_1 - x_2) - T_x = m_1\alpha_1 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow -k(x_1 - x_2) - T\sin\theta = m_1\ddot{x}_1 \quad \textbf{(1)} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y = m_1 g \Rightarrow T\cos\theta = m_1 g \Rightarrow T = \dfrac{m_1 g}{\cos\theta} \quad \textbf{(2)} \end{cases}$$

Έτσι η **(1)** λόγω της **(2)** γίνεται:

$$-k(x_1 - x_2) - m_1 g\tan\theta = m_1\ddot{x}_1 \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά επειδή η μάζα m_1 εκτελεί μικρές ταλαντώσεις ισχύει η προσέγγιση μικρών γωνιών και από το σχήμα είναι:

$$\tan\theta \cong \sin\theta = \frac{x_1}{\ell} \qquad \textbf{(4)}$$

Οπότε τελικά η **(3)** λόγω της **(4)** γράφεται:

$$-k(x_1 - x_2) - \frac{m_1 g}{\ell}x_1 = m_1\ddot{x}_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \left(\frac{k}{m_1} + \frac{g}{\ell}\right)x_1 - \frac{k}{m_1}x_2 = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

Για τη μάζα m_2:

$$\Sigma\vec{F} = m_2\vec{\alpha}_2 \Rightarrow k(x_1 - x_2) = m_2\ddot{x}_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 - \frac{k}{m_2}x_1 + \frac{k}{m_2}x_2 = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

Οι σχέσεις **(5)**, **(6)** αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

β) Για $m_1 = m_2 = m$ και $k = mg/\ell$ οι εξισώσεις κίνησης **(5)** και **(6)** γίνονται:

$$\ddot{x}_1 + \frac{2g}{\ell}x_1 - \frac{g}{\ell}x_2 = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

$$\ddot{x}_2 - \frac{g}{\ell}x_1 + \frac{g}{\ell}x_2 = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Θεωρώντας λύσεις της μορφής $x_1(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, $x_2(t)=B\cos(\omega t+\varphi)$ και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις **(7)** και **(8)** προκύπτει:

$$\begin{aligned} -\omega^2 A + \frac{2g}{\ell}A - \frac{g}{\ell}B = 0 &\Rightarrow \left(\frac{2g}{\ell} - \omega^2\right)A - \frac{g}{\ell}B = 0 \\ -\omega^2 B - \frac{g}{\ell}A + \frac{g}{\ell}B = 0 &\Rightarrow -\frac{g}{\ell}A + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right)B = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(9)}$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(9)** παρέχει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} \frac{2g}{\ell}-\omega^2 & -\frac{g}{\ell} \\ -\frac{g}{\ell} & \frac{g}{\ell}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{2g}{\ell}-\omega^2\right)\left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)-\frac{g^2}{\ell^2}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^4 - \frac{3g}{\ell}\omega^2 + \frac{g^2}{\ell^2} = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{(3-\sqrt{5})}{2}\frac{g}{\ell} \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = \frac{(3+\sqrt{5})}{2}\frac{g}{\ell}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των ω_1, ω_2 σε μια από τις σχέσεις **(9)** προκύπτει ο λόγος των πλατών:

- Για $\omega = \omega_1$ είναι: $\dfrac{B_1}{A_1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Οπότε $x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$, $x_2(t) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ **1ος τρόπος**

- Για $\omega = \omega_2$ είναι: $\dfrac{B_2}{A_2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Οπότε $x_1(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, $x_2(t) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ **2ος τρόπος**

Άρα γενικά είναι:

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad \textbf{(10)}$$
$$x_2(t) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{1-\sqrt{5}}{2}A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Θεωρώντας ως κανονικές συντεταγμένες τις:

$$\xi_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{και} \quad \xi_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

οι σχέσεις **(10)** και **(11)** δίνουν:

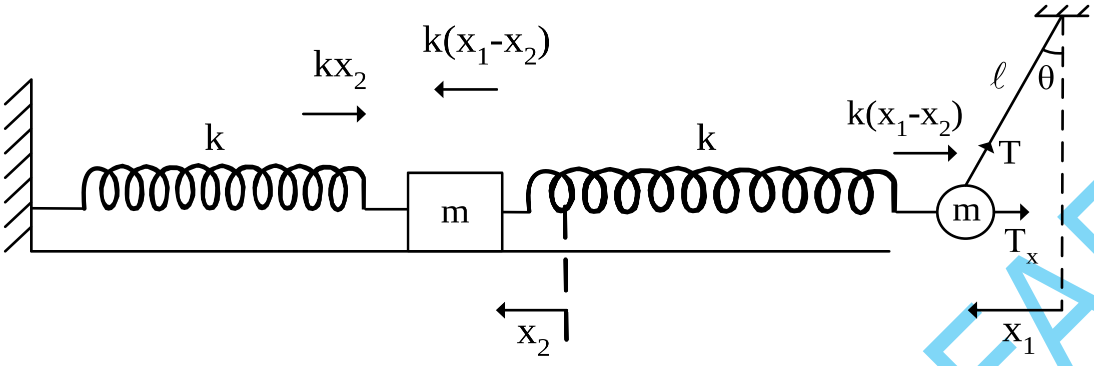
$$x_1 = \xi_1 + \xi_2 \quad \text{και} \quad 2x_2 = (1+\sqrt{5})\xi_1 + (1-\sqrt{5})\xi_2 \qquad \textbf{(12)}$$

Άρα λύοντας το σύστημα των εξισώσεων **(12)** προκύπτουν οι κανονικές συντεταγμένες συναρτήσει των x_1, x_2 ως:

$$\xi_1 = \frac{(\sqrt{5}-1)x_1 + 2x_2}{2\sqrt{5}} \qquad \text{και} \qquad \xi_2 = \frac{(\sqrt{5}+1)x_1 - 2x_2}{2\sqrt{5}}$$

ΘΕΜΑ 11

Όταν το εκκρεμές του συστήματος του σχήματος βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση, τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Να υπολογιστούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.



Λύση

Έστω ότι σε μια τυχαία χρονική στιγμή οι μετατοπίσεις των δύο μαζών από τις θέσεις ισορροπίας τους είναι x_1 και x_2 αντίστοιχα, με $x_1 > x_2$. Τότε και τα δύο ελατήρια είναι συσπειρωμένα και οι δυνάμεις που ασκούν στις μάζες φαίνονται στο σχήμα. Επιπλέον στη μάζα του εκκρεμούς ασκείται και η συνιστώσα T_x της τάσης του νήματος.
Η εξίσωση κίνησης της μάζας του εκκρεμούς προσδιορίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως έγινε στο **Θέμα 10**, και είναι η εξίσωση **(5)**. Δηλαδή:

$$\ddot{x}_1 + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{\ell}\right)x_1 - \frac{k}{m}x_2 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ για την άλλη μάζα ο 2ος νόμος του Newton τώρα δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m_2\vec{\alpha}_2 \Rightarrow k(x_1 - x_2) - kx_2 = m\ddot{x}_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{2k}{m}x_2 = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Θεωρώντας λύσεις της μορφής $x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi),\ x_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$ και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει:

$$\left.\begin{aligned} &-\omega^2 A + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{\ell}\right)A - \frac{k}{m}B = 0 \Rightarrow \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{\ell} - \omega^2\right)A - \frac{k}{m}B = 0 \\ &-\omega^2 B - \frac{k}{m}A + \frac{2k}{m}B = 0 \Rightarrow -\frac{k}{m}A + \left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)B = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(3)}$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(3)** δίνει τις ζητούμενες συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{m}+\frac{g}{\ell}-\omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{k}{m}+\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)\left(\frac{2k}{m}-\omega^2\right)-\frac{k^2}{m^2}=0 \Rightarrow$$

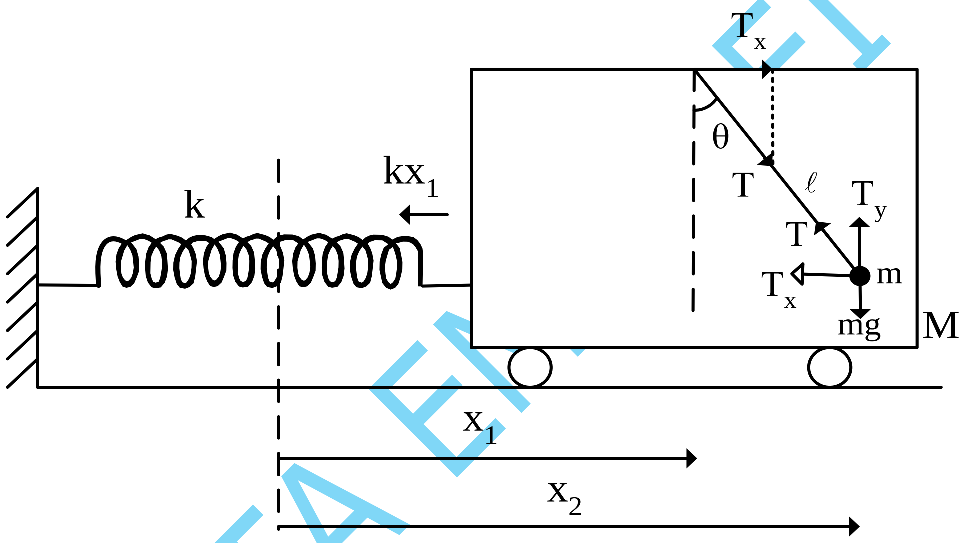
$$\Rightarrow \omega^4-\left(\frac{3k}{m}+\frac{g}{\ell}\right)\omega^2+\frac{k^2}{m^2}+\frac{2kg}{m\ell}=0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2=\frac{\frac{3k}{m}+\frac{g}{\ell}\pm\sqrt{\frac{5k^2}{m^2}+\frac{g^2}{\ell^2}-\frac{2kg}{m\ell}}}{2}$$

ΘΕΜΑ 12

Όχημα μάζας M είναι συνδεδεμένο με ελατήριο σταθεράς k σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχο και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές σε οριζόντιο λείο επίπεδο. Από την οροφή του οχήματος είναι αναρτημένο εκκρεμές που αποτελείται από νήμα μήκους ℓ και αμελητέας

μάζας, στην άκρη του οποίου υπάρχει σημειακή μάζα m και όλο το σύστημα βρίσκεται σε πεδίο βαρύτητας g. Θεωρείστε ότι το σύστημα διαταράσσεται οριζόντια, έτσι ώστε το εκκρεμές να εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους.
α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των μαζών M και m.
β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κανονικό τρόπο ταλάντωσης και βρείτε τη σχέση υπολογισμού των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.
γ) Υποθέστε ότι $g/\ell = k/M = \omega_o^2$ και m=M και υπολογίστε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και τα αντίστοιχα πηλίκα των πλατών ταλάντωσης των μαζών M και m.

Λύση



α) Έστω ότι κάποια χρονική στιγμή οι απομακρύνσεις του κέντρου του οχήματος και της μάζας m του εκκρεμούς από τις θέσεις ισορροπίας τους είναι x_1 και x_2 αντίστοιχα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρείται ότι το εκκρεμές είναι αναρτημένο στο μέσο του οχήματος. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα οχήματος – εκκρεμούς φαίνονται στο σχήμα.
Συνεπώς εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Newton για κάθε μάζα ξεχωριστά προκύπτει:

- Για τη μάζα m του εκκρεμούς:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_2 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m\alpha_2 \Rightarrow -T_x = m\alpha_2 \Rightarrow -T\sin\theta = m\ddot{x}_2 & \textbf{(1)} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y = mg \Rightarrow T\cos\theta = mg \Rightarrow T = \dfrac{mg}{\cos\theta} & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Έτσι η **(1)** λόγω της **(2)** δίνει: $-mg\tan\theta = m\ddot{x}_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 = -g\tan\theta$ **(3)**

Επειδή όμως το εκκρεμές εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους, η γωνία θ είναι μικρή και ισχύει:

$$\tan\theta \cong \sin\theta = \frac{x_2 - x_1}{\ell} \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα η **(3)** λόγω της **(4)** δίνει:

$$\ddot{x}_2 = -\frac{g}{\ell}(x_2 - x_1) \Rightarrow \ddot{x}_2 - \frac{g}{\ell}x_1 + \frac{g}{\ell}x_2 = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

- Για τη μάζα Μ του οχήματος:

$$\Sigma\vec{F} = M\vec{\alpha}_1 \Rightarrow -kx_1 + T\sin\theta = M\ddot{x}_1 \overset{(2)}{\Rightarrow} M\ddot{x}_1 = -kx_1 + mg\tan\theta \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow M\ddot{x}_1 = -kx_1 + \frac{mg}{\ell}(x_2 - x_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 + \left(\frac{k}{M} + \frac{mg}{M\ell}\right)x_1 - \frac{mg}{M\ell}x_2 = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

Οι σχέσεις **(5)** και **(6)** αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

β) Θεωρώντας λύσεις της μορφής :

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi),\; x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$$

και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις **(5)** και **(6)** προκύπτει το σύστημα για τα πλάτη:

$$-\omega^2 A + \left(\frac{k}{M} + \frac{mg}{M\ell}\right)A - \frac{mg}{M\ell}B = 0 \Rightarrow \left(\frac{k}{M} + \frac{mg}{M\ell} - \omega^2\right)A - \frac{mg}{M\ell}B = 0$$

$$\textbf{(7)}$$

$$-\omega^2 B - \frac{g}{\ell}A + \frac{g}{\ell}B = 0 \Rightarrow -\frac{g}{\ell}A + \left(\frac{g}{\ell} - \omega^2\right)B = 0$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(7)** δίνει τη σχέση υπολογισμού των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{M}+\frac{mg}{M\ell}-\omega^2 & -\frac{mg}{M\ell} \\ -\frac{g}{\ell} & \frac{g}{\ell}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{k}{M}+\frac{mg}{M\ell}-\omega^2\right)\left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)-\frac{mg^2}{M\ell^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^4-\left(\frac{k}{M}+\frac{mg}{M\ell}+\frac{g}{\ell}\right)\omega^2+\frac{kg}{m\ell}=0\Rightarrow M\ell\omega^4-(k\ell+mg+Mg)\omega^2+kg=0$$

Οι λύσεις της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:

$$\omega_{1,2}^2=\frac{k\ell+(m+M)g\pm\sqrt{(k\ell+mg+Mg)^2-4M\ell kg}}{2M\ell} \qquad \textbf{(8)}$$

γ) Για $g/\ell=k/M\Rightarrow Mg=k\ell$ και $m=M$ η **(8)** γίνεται:

$$\omega_{1,2}^2=\frac{3Mg\pm\sqrt{(3Mg)^2-4M^2g^2}}{2M\ell}=\frac{3Mg\pm\sqrt{5}Mg}{2M\ell}=\frac{(3\pm\sqrt{5})}{2}\frac{g}{\ell}$$

Δηλαδή: $\omega_1^2=\frac{(3-\sqrt{5})}{2}\frac{g}{\ell}$ και $\omega_2^2=\frac{(3+\sqrt{5})}{2}\frac{g}{\ell}$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των ω_1,ω_2 στη δεύτερη των σχέσεων **(7)** προκύπτουν οι λόγοι των πλατών ταλάντωσης:

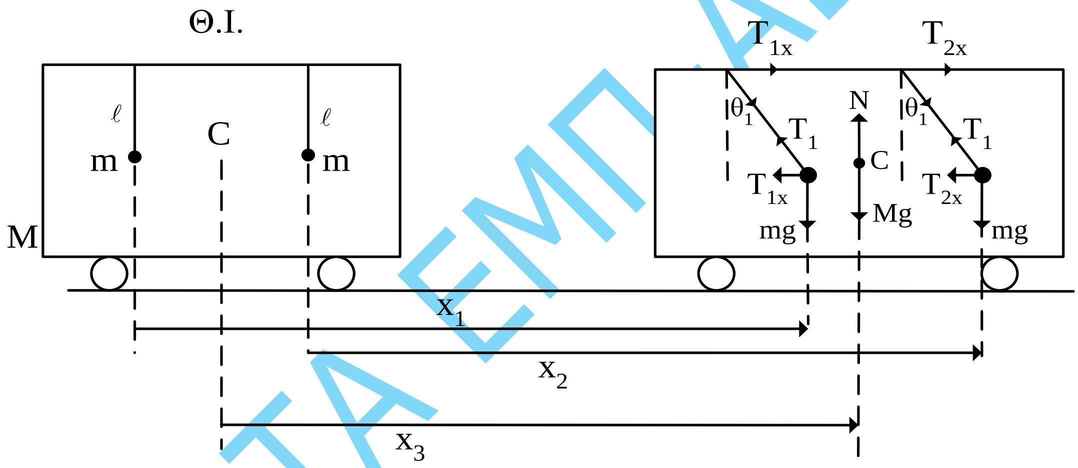
- Για $\omega_1^2=\frac{(3-\sqrt{5})}{2}\frac{g}{\ell}$ είναι: $\frac{A}{B}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

- Για $\omega_2^2=\frac{(3+\sqrt{5})}{2}\frac{g}{\ell}$ είναι: $\frac{A}{B}=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$

ΘΕΜΑ 13

Δύο ιδανικά εκκρεμή μάζας m και μήκους ℓ το καθένα, κρέμονται από δύο διαφορετικά σημεία της οροφής μικρού οχήματος μάζας M, το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα, χωρίς τριβές, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας g. Τα δύο εκκρεμή εκτρέπονται κατά μικρές γωνίες από την κατακόρυφο, έτσι ώστε να κάνουν μικρές ταλαντώσεις, μένοντας στο κατακόρυφο επίπεδο που περνάει από τα σημεία ανάρτησης.
α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για κάθε ένα από τα τρία σώματα (m, m, M).
β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κίνηση σε κανονικό τρόπο ταλάντωσης και διατυπώστε τη συνθήκη υπολογισμού των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.
γ) Επιλύσετε τη χαρακτηριστική εξίσωση για την περίπτωση m=M και προσδιορίστε τις συχνότητες και το λόγο των πλατών των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

Λύση



α) Έστω ότι σε μια τυχαία χρονική στιγμή οι απομακρύνσεις των δύο μαζών από τις αρχικές θέσεις ισορροπίας τους είναι x_1 και x_2 αντίστοιχα, ενώ η μετατόπιση του κέντρου του οχήματος από τη θέση ισορροπίας είναι x_3.
Σε κάθε εκκρεμές ασκείται η τάση του νήματος και το βάρος του, ενώ στο όχημα ασκούνται οι τάσεις του νήματος από τα δύο εκκρεμή, το βάρος του και η κάθετη αντίδραση, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Επομένως εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Newton για κάθε μάζα ξεχωριστά προκύπτει:

- Για το πρώτο εκκρεμές:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_1 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m\alpha_1 \Rightarrow -T_{1x} = m\alpha_1 \Rightarrow -T_1 \sin\theta_1 = m\ddot{x}_1 & \textbf{(1)} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{1y} = mg \Rightarrow T_1 \cos\theta_1 = mg \Rightarrow T_1 = \dfrac{mg}{\cos\theta_1} & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Οπότε η **(1)** λόγω της **(2)** δίνει:

$$-mg\tan\theta_1 = m\ddot{x}_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 = -g\tan\theta_1 \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά επειδή εκτελούνται μικρές ταλαντώσεις οι γωνίες είναι μικρές και από το σχήμα εύκολα φαίνεται ότι:

$$\tan\theta_1 \cong \sin\theta_1 = \frac{x_1 - x_3}{\ell} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\tan\theta_2 \cong \sin\theta_2 = \frac{x_2 - x_3}{\ell} \qquad \textbf{(5)}$$

Δηλαδή η **(3)** λόγω της **(4)** γράφεται:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{g}{\ell}(x_1 - x_3) \Rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{g}{\ell}(x_1 - x_3) = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

- Για το δεύτερο εκκρεμές:

Αντίστοιχα με τα προηγούμενα προκύπτει:

$$\ddot{x}_2 = -g\tan\theta_2 \overset{(5)}{\Rightarrow} \ddot{x}_2 = -\frac{g}{\ell}(x_2 - x_3) \Rightarrow \ddot{x}_2 + \frac{g}{\ell}(x_2 - x_3) = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

- Για το όχημα:

$$\Sigma\vec{F} = M\vec{\alpha} \Rightarrow T_{1x} + T_{2x} = M\alpha \Rightarrow T_1\sin\theta_1 + T_2\sin\theta_2 = M\ddot{x}_3 \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} mg\tan\theta_1 + mg\tan\theta_2 = M\ddot{x}_3 \overset{(4),(5)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{\ell}(x_1 - x_3 + x_2 - x_3) = M\ddot{x}_3 \Rightarrow \ddot{x}_3 - \frac{mg}{M\ell}(x_1 + x_2 - 2x_3) = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Οι σχέσεις **(6)**, **(7)**, και **(8)** αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

β) Θεωρώντας λύσεις της μορφής :

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi),\ x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi),\ x_3(t) = \Gamma\cos(\omega t + \varphi)$$

και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις **(6)**, **(7)**, **(8)** προκύπτει:

$$-\omega^2 A+\frac{g}{\ell}(A-\Gamma)=0 \Rightarrow \left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)A-\frac{g}{\ell}\Gamma=0$$

$$-\omega^2 B-\frac{g}{\ell}(B-\Gamma)=0 \Rightarrow \left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)B-\frac{g}{\ell}\Gamma=0 \qquad \textbf{(9)}$$

$$-\omega^2\Gamma-\frac{mg}{M\ell}(A+B-2\Gamma)=0 \Rightarrow -\frac{mg}{M\ell}A-\frac{mg}{M\ell}B+\left(\frac{2mg}{M\ell}-\omega^2\right)\Gamma=0$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(9)** δίνει τη συνθήκη υπολογισμού των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{\ell}-\omega^2 & 0 & -\frac{g}{\ell} \\ 0 & \frac{g}{\ell}-\omega^2 & -\frac{g}{\ell} \\ -\frac{mg}{M\ell} & -\frac{mg}{M\ell} & \frac{2mg}{M\ell}-\omega^2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)\left[\left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)\left(\frac{2mg}{M\ell}-\omega^2\right)-\frac{mg^2}{M\ell^2}\right]-\frac{mg^2}{M\ell^2}\left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)\left[\left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)\left(\frac{2mg}{M\ell}-\omega^2\right)-\frac{2mg^2}{M\ell^2}\right]=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)\left[\omega^4-\left(\frac{2mg}{M\ell}+\frac{g}{\ell}\right)\omega^2\right]=0 \qquad \textbf{(10)}$$

γ) Για m=M η **(10)** γίνεται:

$$\left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)\left(\omega^4-\frac{3g}{\ell}\omega^2\right)=0 \Rightarrow \omega_1^2=\frac{g}{\ell} \quad \text{και} \quad \omega_2^2=\frac{3g}{\ell}$$

Με αντικατάσταση των τιμών των ω_1, ω_2 στις σχέσεις **(9)** προκύπτει ο λόγος των πλατών.

- Για $\omega_1^2 = \frac{g}{\ell}$ είναι: $\Gamma=0$ και $\frac{B}{A} = -1$ **1ος τρόπος**

Δηλαδή αντιστοιχεί στην περίπτωση που το όχημα είναι ακίνητο και τα δύο εκκρεμή έχουν αντίθετες αποκλίσεις για όλους τους χρόνους (δηλ. $\theta_1 = -\theta_2$).

- Για $\omega_2^2 = \frac{3g}{\ell}$ είναι: $\frac{B}{A} = 1$ και $\frac{\Gamma}{A} = \frac{\Gamma}{B} = -2$ **2ος τρόπος**

Δηλαδή αντιστοιχεί στην περίπτωση που τα εκκρεμή είναι ανά πάσα στιγμή παράλληλα (δηλ. $\theta_1 = \theta_2$), ενώ το όχημα ταλαντώνεται σε φάση ως προς τα εκκρεμή.

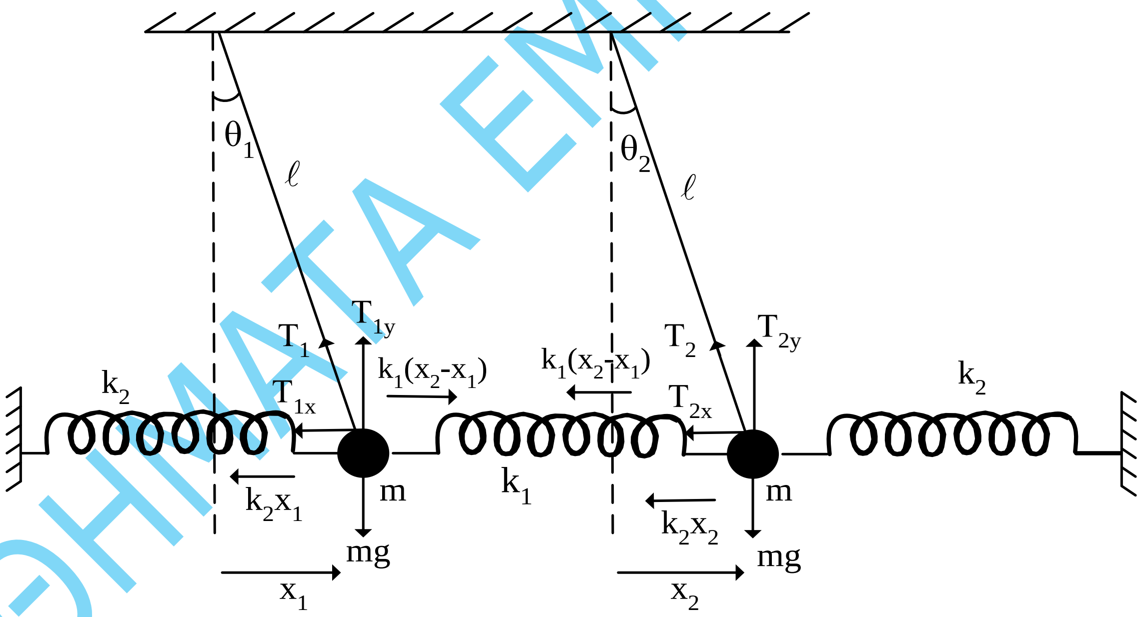
ΘΕΜΑ 14

Δύο εκκρεμή ίδιου μήκους νήματος ℓ και ίσων μαζών m κρέμονται από μια οροφή. Οι δύο μάζες είναι συνδεδεμένες με ελατήριο σταθεράς k_1 και φυσικού μήκους όσο και η απόσταση των σημείων ανάρτησής τους. Κατά μήκος της ευθείας που ορίζουν οι δύο μάζες και εξωτερικά ως προς αυτές, οι μάζες συνδέονται με ακλόνητα σημεία μέσω ελατηρίων σταθεράς k_2, τα οποία έχουν το φυσικό τους μήκος όταν τα εκκρεμή είναι κατακόρυφα. Απομακρύνουμε λίγο τις δύο μάζες από την κατάσταση ισορροπίας, μετατοπίζοντάς τις οριζόντια, έτσι ώστε να παραμείνουν στο αρχικό κατακόρυφο επίπεδό τους.

α) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών.

β) Να υπολογιστούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, καθώς και ο λόγος των πλατών ταλάντωσης για καθένα από τους δύο τρόπους.

Λύση



α) Έστω ότι κάποια χρονική στιγμή οι μάζες των εκκρεμών έχουν μετατοπιστεί από τις θέσεις ισορροπίας τους κατά x_1 και x_2 ($x_2 > x_1$) αντίστοιχα. Επειδή $x_2 > x_1$ το μεσαίο ελατήριο έχει επιμηκυνθεί και ασκεί στις δύο μάζες δυνάμεις $k_1(x_2 - x_1)$ που κατευθύνονται προς αυτό, ενώ το αριστερό ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά x_1 και ασκεί στην αριστερή μάζα δύναμη $k_2 x_1$ προς τα αριστερά και το δεξιό ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά x_2 και ασκεί στη δεξιά μάζα δύναμη $k_2 x_2$ προς τα αριστερά. Επιπλέον στις δύο μάζες ασκούνται οι οριζόντιες συνιστώσες T_{1x}, T_{2x} των τάσεων των νημάτων.

Άρα σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton οι εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών είναι:

- Για το αριστερό εκκρεμές:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_1 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m\alpha_1 \Rightarrow -T_{1x} - k_2 x_1 + k_1(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_1 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow m\ddot{x}_1 = -T_1 \sin\theta_1 - k_2 x_1 + k_1(x_2 - x_1) \quad \textbf{(1)} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{1y} = mg \Rightarrow T_1 \cos\theta_1 = mg \Rightarrow T_1 = \dfrac{mg}{\cos\theta_1} \quad \textbf{(2)} \end{cases}$$

Οπότε η **(1)** λόγω της **(2)** δίνει:

$$m\ddot{x}_1 = -mg\tan\theta_1 - k_2 x_1 + k_1(x_2 - x_1) \qquad \textbf{(3)}$$

Επειδή όμως εκτελούνται μικρές ταλαντώσεις η γωνία θ_1 είναι μικρή και ισχύει $\tan\theta_1 \cong \sin\theta_1 = \dfrac{x_1}{\ell}$, οπότε η **(3)** γράφεται:

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{\ell}x_1 - k_2 x_1 + k_1(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_1 + \left(\frac{mg}{\ell} + k_1 + k_2\right)x_1 - k_1 x_2 = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

- Για το δεξιό εκκρεμές:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_2 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m\alpha_2 \Rightarrow -T_{2x} - k_2 x_2 - k_1(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_2 \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow m\ddot{x}_2 = -T_2 \sin\theta_2 - k_2 x_2 - k_1(x_2 - x_1) \quad \textbf{(5)} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{2y} = mg \Rightarrow T_2 \cos\theta_2 = mg \Rightarrow T_2 = \dfrac{mg}{\cos\theta_2} \quad \textbf{(6)} \end{cases}$$

Έτσι η **(5)** λόγω της **(6)** δίνει:

$$m\ddot{x}_2 = -mg\tan\theta_2 - k_2 x_2 - k_1(x_2 - x_1) \qquad \textbf{(7)}$$

Λόγω όμως των μικρών ταλαντώσεων η γωνία είναι θ_2 είναι μικρή και ισχύει $\tan\theta_2 \cong \sin\theta_2 = \frac{x_2}{\ell}$, και η **(7)** γράφεται:

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{mg}{\ell}x_2 - k_2 x_2 - k_1(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_2 - k_1 x_1 + \left(\frac{mg}{\ell} + k_1 + k_2\right)x_2 = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Οι σχέσεις **(4)** και **(8)** αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης των μαζών του συστήματος.

β) Θεωρώντας λύσεις της μορφής :

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi),\ x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$$

και αντικαθιστώντας στις σχέσεις **(4)** και **(8)** προκύπτει:

$$-m\omega^2 A + \left(\frac{mg}{\ell} + k_1 + k_2\right)A - k_1 B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{mg}{\ell} + k_1 + k_2 - m\omega^2\right)A - k_1 B = 0$$

$$\textbf{(9)}$$

$$-m\omega^2 B - k_1 A + \left(\frac{mg}{\ell} + k_1 + k_2\right)B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -k_1 A + \left(\frac{mg}{\ell} + k_1 + k_2 - m\omega^2\right)B = 0$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(9)** δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} \frac{mg}{\ell} + k_1 + k_2 - m\omega^2 & -k_1 \\ -k_1 & \frac{mg}{\ell} + k_1 + k_2 - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{mg}{\ell}+k_1+k_2-m\omega^2\right)^2-k_1^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{mg}{\ell}+k_1+k_2-m\omega^2\right)^2=k_1^2\Rightarrow\frac{mg}{\ell}+k_1+k_2-m\omega^2=\pm k_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\omega_1^2=\frac{g}{\ell}+\frac{k_2}{m}\qquad\text{και}\qquad\omega_2^2=\frac{g}{\ell}+\frac{2k_1+k_2}{m}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των ω_1,ω_2 σε μια από τις σχέσεις **(9)** προκύπτουν οι λόγοι των πλατών ταλάντωσης:

- Για $\omega_1^2=\frac{g}{\ell}+\frac{k_2}{m}$ είναι: $\frac{B}{A}=1$ **1ος τρόπος**

- Για $\omega_2^2=\frac{g}{\ell}+\frac{2k_1+k_2}{m}$ είναι: $\frac{B}{A}=-1$ **2ος τρόπος**

ΘΕΜΑ 15

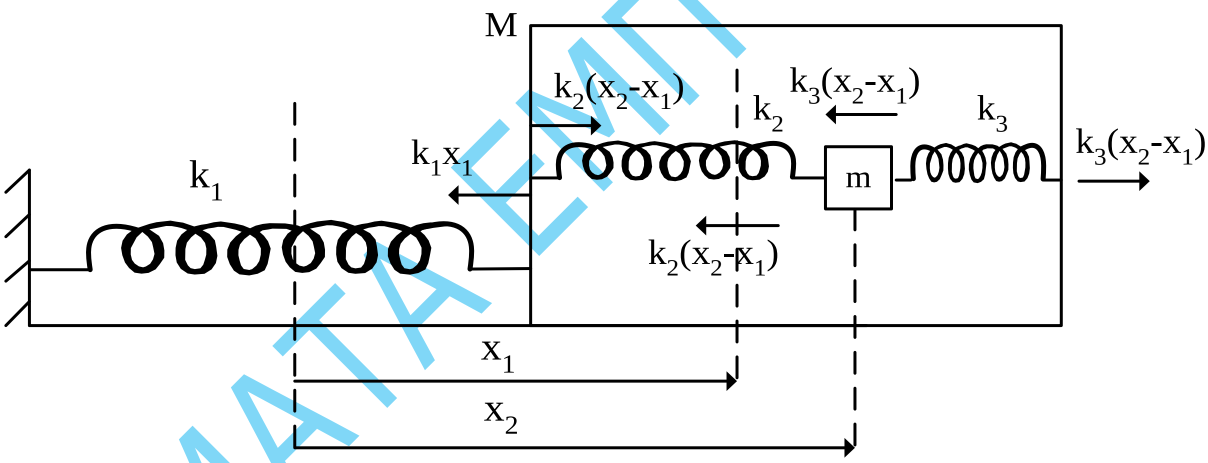
Κιβώτιο μάζας Μ βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, χωρίς τριβές και είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχο με ελατήριο σταθεράς k_1. Στο εσωτερικό του κιβωτίου βρίσκεται σώμα μάζας m συνδεδεμένο με τις απέναντι πλευρές του κιβωτίου μέσω ελατηρίων με σταθερές k_2 και k_3, όπως στο σχήμα.

α) Υποθέτοντας μικρή οριζόντια διαταραχή του συστήματος από την κατάσταση ισορροπίας, να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης για κάθε σώμα.

β) Να υπολογίσετε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης για την περίπτωση που Μ=3m/2 και $k_1 = k_2 + k_3$.

γ) Να υπολογίστε το λόγο των πλατών ταλάντωσης των δύο σωμάτων για καθένα από τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Λύση



α) Θεωρείται ότι αρχικά στη θέση ισορροπίας του συστήματος, το σώμα μάζας m βρίσκεται στο κέντρο του κιβωτίου. Έστω ότι κάποια μεταγενέστερη χρονική στιγμή το κέντρο του κιβωτίου και η μάζα m έχουν μετατοπιστεί κατά x_1 και x_2 αντίστοιχα από τη θέση ισορροπίας τους. Τότε το ελατήριο σταθεράς k_1 είναι επιμηκυνμένο κατά x_1 και ασκεί δύναμη $k_1 x_1$ στο κιβώτιο, ενώ το ελατήριο σταθεράς k_2 είναι επιμηκυνμένο κατά $x_2 - x_1$ και ασκεί δύναμη $k_2(x_2 - x_1)$ στο σώμα μάζας m και στην αριστερή πλευρά του κιβωτίου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επίσης το ελατήριο σταθεράς k_3 είναι συσπειρωμένο κατά $x_2 - x_1$, και ασκεί δύναμη $k_3(x_2 - x_1)$ στη μάζα m και στη δεξιά πλευρά του κιβωτίου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Συνεπώς εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Newton για κάθε σώμα ξεχωριστά προκύπτει:

- Για το κιβώτιο:

$$M\ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2 + k_3)x_1 - (k_2 + k_3)x_2 = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

- Για το σώμα μάζας m:

$$m\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_2 - (k_2 + k_3)x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

β) Για M=3m/2 και $k_1 = k_2 + k_3$ οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος **(1)**, **(2)** γίνονται:

$$\frac{3m}{2}\ddot{x}_1 + 2k_1 x_1 - k_1 x_2 = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$m\ddot{x}_2 - k_1 x_1 + k_1 x_2 = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Θεωρώντας λύσεις τις μορφής $x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$ και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις **(3)** και **(4)** προκύπτει:

$$-\frac{3m}{2}\omega^2 A + 2k_1 A - k_1 B = 0 \Rightarrow \left(2k_1 - \frac{3m}{2}\omega^2\right)A - k_1 B = 0$$

$$\textbf{(5)}$$

$$-m\omega^2 B - k_1 A + k_1 B = 0 \Rightarrow -k_1 A + (k_1 - m\omega^2)B = 0$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(5)** δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} 2k_1 - \frac{3m}{2}\omega^2 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(2k_1 - \frac{3m}{2}\omega^2\right)(k_1 - m\omega^2)^2 - k_1^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3m^2}{2}\omega^4 - \frac{7mk_1}{2}\omega^2 + k_1^2 = 0$$

Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας αυτής εξίσωσης ως προς ω^2 είναι:

$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{3m} \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = \frac{2k_1}{m}$$

γ) Αντικαθιστώντας τις τιμές των ω_1, ω_2 σε μια από τις σχέσεις **(5)** προκύπτει ο λόγος των πλατών ταλάντωσης:

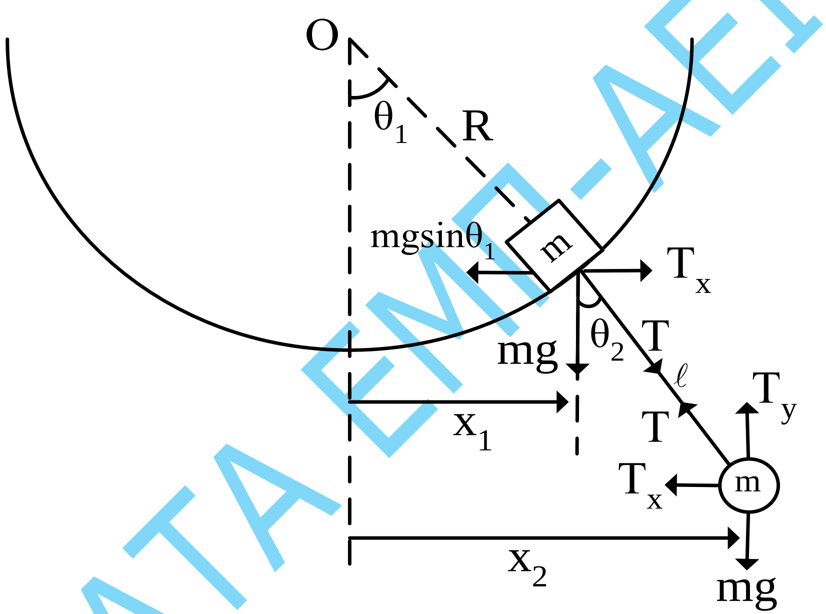
- Για $\omega_1^2 = \frac{k_1}{3m}$ είναι: $\frac{B}{A} = \frac{3}{2}$ **1ος τρόπος**

- Για $\omega_2^2 = \frac{2k_1}{m}$ είναι: $\frac{B}{A} = -1$ **2ος τρόπος**

ΘΕΜΑ 16

Σώμα μάζας m ολισθαίνει χωρίς τριβές στο εσωτερικό κυκλικής τροχιάς ακτίνας R. Στο σώμα είναι προσαρτημένο εκκρεμές μήκους $\ell = 3R/4$, που φέρει στο άκρο του μάζα m επίσης. Αν το σύστημα των δύο σωμάτων αφεθεί να εκτελέσει μικρές ταλαντώσεις από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας του να υπολογιστούν οι συχνότητες και οι λόγοι των πλατών των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

Λύση



Έστω ότι κάποια τυχαία χρονική στιγμή, οι απομακρύνσεις των δύο μαζών από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας τους είναι x_1 και x_2 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Οι δυνάμεις που ασκούνται στις δύο μάζες φαίνονται στο σχήμα κι επομένως εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Newton για κάθε μάζα ξεχωριστά προκύπτει:

- Για τη μάζα του εκκρεμούς:
-

$$\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow m\ddot{x}_2 = -T_x \Rightarrow m\ddot{x}_2 = -T\sin\theta_2 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y = mg \Rightarrow T\cos\theta_2 = mg \Rightarrow T = mg/\cos\theta_2 \qquad \textbf{(2)}$$

Οπότε η **(1)** λόγω της **(2)** δίνει:

$$m\ddot{x}_2 = -mg\tan\theta_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 = -g\tan\theta_2 \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά λόγω των μικρών ταλαντώσεων η γωνία θ_2 είναι μικρή και ισχύει :

$$\tan\theta_2 \cong \sin\theta_2 = \frac{x_2 - x_1}{\ell} \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα η **(3)** λόγω της **(4)** για $\ell = 3R/4$ δίνει:

$$\ddot{x}_2 = -\frac{g}{\ell}(x_2 - x_1) \Rightarrow \ddot{x}_2 + \frac{g}{\ell}(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow \ddot{x}_2 + \frac{4g}{3R}(x_2 - x_1) = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

- Για το σώμα μάζας m:

$$\Sigma F_x = m\alpha \Rightarrow T_x - mg\sin\theta_1 = m\ddot{x}_1 \Rightarrow T\sin\theta_2 - mg\sin\theta_1 = m\ddot{x}_1 \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} mg\tan\theta_2 - mg\sin\theta_1 = m\ddot{x}_1 \overset{(4)}{\Rightarrow} \ddot{x}_1 = \frac{g}{\ell}(x_2 - x_1) - g\sin\theta_1 \qquad \textbf{(6)}$$

Αλλά από το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι: $\sin\theta_1 = x_1/R$ και επειδή $\ell = 3R/4$, η **(6)** τελικά γράφεται:

$$\ddot{x}_1 = \frac{4g}{3R}(x_2 - x_1) - \frac{g}{R}x_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{7g}{3R}x_1 - \frac{4g}{3R}x_2 = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

Θεωρώντας λύσεις της μορφής $x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$ και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης **(7)** και **(5)** προκύπτει:

$$-\omega^2 A + \frac{7g}{3R}A - \frac{4g}{3R}B = 0 \Rightarrow \left(\frac{7g}{3R} - \omega^2\right)A - \frac{4g}{3R}B = 0$$

$$\textbf{(8)}$$

$$-\omega^2 B - \frac{4g}{3R}A + \frac{4g}{3R}B = 0 \Rightarrow -\frac{4g}{3R}A + \left(\frac{4g}{3R} - \omega^2\right)B = 0$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(8)** δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix} \frac{7g}{3R}-\omega^2 & -\frac{4g}{3R} \\ -\frac{4g}{3R} & \frac{4g}{3R}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{7g}{3R}-\omega^2\right)\left(\frac{4g}{3R}-\omega^2\right) - \frac{16g^2}{9R^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^4 - \frac{11g}{3R}\omega^2 + \frac{12}{9}\frac{g^2}{R^2} = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{(11-\sqrt{73})}{6}\frac{g}{R} \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = \frac{(11+\sqrt{73})}{6}\frac{g}{R}$$

Τελικά αντικαθιστώντας τις τιμές των ω_1, ω_2 σε μια από τις σχέσεις **(8)** προκύπτει ο λόγος των πλατών ταλάντωσης:

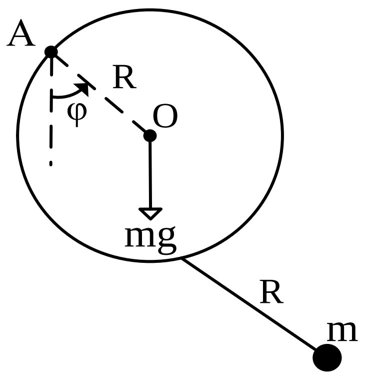
- Για $\omega_1^2 = \frac{(11-\sqrt{73})}{6}\frac{g}{R}$ είναι: $\frac{B}{A} = \frac{3+\sqrt{73}}{8}$ **1^ος^ τρόπος**

- Για $\omega_2^2 = \frac{(11+\sqrt{73})}{6}\frac{g}{R}$ είναι: $\frac{B}{A} = \frac{3-\sqrt{73}}{8}$ **2^ος^ τρόπος**

ΘΕΜΑ 17

Εκκρεμές μήκους R και μάζας m είναι δεμένο στην περιφέρεια ομογενούς δακτυλίου ακτίνας R και μάζας m. Ο δακτύλιος είναι ελεύθερος να περιστρέφεται χωρίς τριβές ως προς ένα περιφερειακό σημείο ανάρτησης, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Αν το σύστημα των δύο σωμάτων αφεθεί να εκτελέσει μικρές ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας του, να υπολογιστούν οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης. Δίνεται η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς το σημείο στήριξης: $I = 2mR^2$.

Λύση



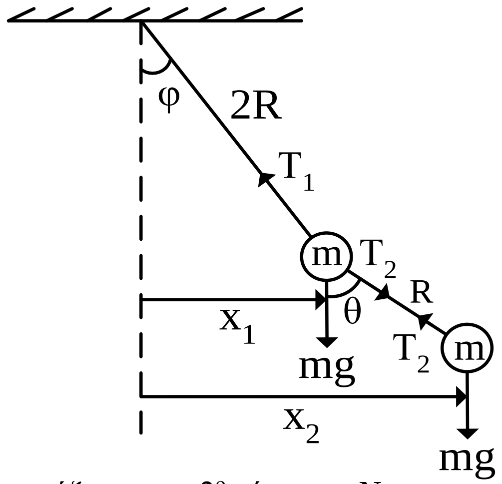
Εξετάζοντας αρχικά την ταλάντωση μόνο του δακτυλίου σε μια τυχαία θέση, καθώς έχει περιστραφεί κατά γωνία φ από τη θέση ισορροπίας του, με εφαρμογή του θεμελιώδη νόμου της περιστροφικής κίνησης προκύπτει:

$$\Sigma\vec{\tau}_A = I_A\dot{\vec{\omega}} \Rightarrow -mgR\sin\varphi = 2mR^2\ddot{\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{2R}\sin\varphi = 0$$

Αλλά για μικρές ταλαντώσεις η γωνία φ είναι μικρή και ισχύει: $\sin\varphi \cong \varphi$
Άρα η εξίσωση κίνησης ενός δακτυλίου είναι:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{2R}\varphi = 0 \qquad \textbf{(1)}$$



Παρατηρείται ότι η εξίσωση **(1)** ισοδυναμεί με εξίσωση απλού εκκρεμούς μήκους $\ell = 2R$. Άρα το ισοδύναμο σύστημα του δακτυλίου – εκκρεμούς είναι το διπλό εκκρεμές του απέναντι σχήματος.

Έστω ότι μια τυχαία χρονική στιγμή οι απομακρύνσεις των μαζών του συστήματος από τη θέση ισορροπίας τους είναι x_1 και x_2 αντίστοιχα.

Οι δυνάμεις που ασκούνται στις μάζες είναι οι τάσεις από τα νήματα και τα βάρη τους, όπως φαίνονται στο σχήμα.

Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Newton για κάθε μάζα ξεχωριστά προκύπτει:

• Για την κάτω μάζα:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_2 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m\alpha_2 \Rightarrow -T_{2x} = m\alpha_2 \Rightarrow -T_2 \sin\theta = m\ddot{x}_2 & \textbf{(2)} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{2y} = mg \Rightarrow T_2 \cos\theta = mg \Rightarrow T_2 = \dfrac{mg}{\cos\theta} & \textbf{(3)} \end{cases}$$

Οπότε η **(2)** λόγω της **(3)** δίνει:

$$m\ddot{x}_2 = -mg\tan\theta \Rightarrow \ddot{x}_2 = -g\tan\theta \qquad \textbf{(4)}$$

Αλλά λόγω των μικρών ταλαντώσεων είναι:

$$\tan\theta \cong \sin\theta = \frac{x_2 - x_1}{R} \qquad \textbf{(5)}$$

Άρα η **(4)** λόγω της **(5)** γράφεται:

$$\ddot{x}_2 = -\frac{g}{R}(x_2 - x_1) \Rightarrow \ddot{x}_2 + \frac{g}{R}(x_2 - x_1) = 0 \qquad \textbf{(6)}$$

• Για την πάνω μάζα:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_1 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m\alpha_1 \Rightarrow -T_{1x} + T_{2x} = m\alpha_1 \Rightarrow -T_1 \sin\varphi + T_2 \sin\theta = m\ddot{x}_1 & \textbf{(7)} \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{1y} = mg + T_{2y} \Rightarrow T_1 \cos\varphi = mg + T_2 \cos\theta \overset{(3)}{\Rightarrow} & \\ \qquad \Rightarrow T_1 \cos\varphi = 2mg \Rightarrow T_1 = 2mg/\cos\varphi & \textbf{(6)} \end{cases}$$

Οπότε η **(7)** λόγω των **(8)** και **(3)** γίνεται:

$$m\ddot{x}_1 = -2mg\tan\varphi + mg\tan\theta \Rightarrow \ddot{x}_1 = -2g\tan\varphi + g\tan\theta \qquad \textbf{(9)}$$

Επίσης λόγω μικρών ταλαντώσεων είναι:

$$\tan\varphi \cong \sin\varphi = \frac{x_1}{2R} \qquad \textbf{(10)}$$

Άρα η **(9)** λόγω των **(10)** και **(5)** γράφεται:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{2g}{2R}x_1 + \frac{g}{R}(x_2 - x_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{2g}{R}x_1 - \frac{g}{R}x_2 = 0 \qquad \textbf{(11)}$$

Οι σχέσεις **(6)** και **(11)** αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος.
Θεωρώντας λύσεις της μορφής $x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$ και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης **(6)**, **(11)** προκύπτει:

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2 A + \frac{2g}{R}A - \frac{g}{R}B = 0 \Rightarrow \left(\frac{2g}{R} - \omega^2\right)A - \frac{g}{R}B = 0 \\ -\omega^2 B + \frac{g}{R}(B - A) = 0 \Rightarrow -\frac{g}{R}A + \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)B = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(12)}$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(12)** δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

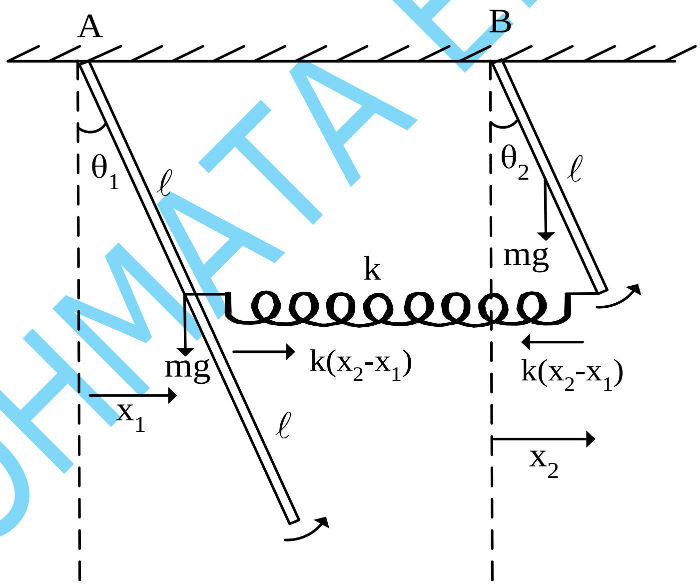
$$\begin{vmatrix} \frac{2g}{R} - \omega^2 & -\frac{g}{R} \\ -\frac{g}{R} & \frac{g}{R} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\frac{2g}{R} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right) - \frac{g^2}{R^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^4 - \frac{3g}{R}\omega^2 + \frac{g^2}{R^2} = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{(3 - \sqrt{5})}{2}\frac{g}{R} \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = \frac{(3 + \sqrt{5})}{2}\frac{g}{R}$$

ΘΕΜΑ 18

Δύο ομοιόμορφες λεπτές ράβδοι μάζας m η κάθε μία και μήκους 2ℓ και ℓ αντίστοιχα κρέμονται από την οροφή και ενώνονται μεταξύ τους με ένα ελατήριο σταθεράς k όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα μετατοπίζεται λίγο από τη θέση ισορροπίας του και αφήνεται ελεύθερο. Να υπολογιστούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος. (Δίνεται ροπή αδράνειας ράβδου μάζας m και μήκους ℓ ως προς το άκρο της: $I = m\ell^2/3$).

Λύση



Έστω ότι μια τυχαία χρονική στιγμή οι απομακρύνσεις των δύο ραβδών από τις θέσεις ισορροπίας τους είναι θ_1 και θ_2 αντίστοιχα (με $\theta_1 < \theta_2$), οι οποίες αντιστοιχούν σε απομακρύνσεις x_1, x_2 των σημείων τους σύνδεσης με το ελατήριο από τη θέση ισορροπίας του (με $x_1 < x_2$).

Έτσι το ελατήριο είναι επιμηκυνμένο κατά (x_2-x_1) και ασκεί δυνάμεις k(x_2-x_1) στα σημεία σύνδεσής του με τις ράβδους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επίσης σε κάθε ράβδο ασκείται στο μέσο της το βάρος της mg.
Συνεπώς εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης σε κάθε ράβδο ως προς το σημείο ανάρτησής της προκύπτει:

- Για την αριστερή ράβδο:

$$\Sigma\vec{\tau}_A = I_A\vec{\dot{\omega}}_1 \Rightarrow -mg\ell\sin\theta_1 + \ell k(x_2 - x_1)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \frac{1}{3}m(2\ell)^2\ddot{\theta}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -mg\ell\sin\theta_1 + \ell k(x_2 - x_1)\cos\theta_1 = \frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta}_1 \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά λόγω των μικρών ταλαντώσεων του συστήματος οι γωνίες θ_1, θ_2 είναι μικρές και ισχύουν: $\sin\theta_1 \cong \theta_1$, $\cos\theta_1 \cong 1$, $x_1 = \ell\theta_1$ και $x_2 = \ell\theta_2$, οπότε η **(1)** γράφεται:

$$\frac{4}{3}m\ell^2\ddot{\theta}_1 = -mg\ell\theta_1 + \ell k(\ell\theta_2 - \ell\theta_1) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\frac{3g}{4\ell}\theta_1 + \frac{3k}{4m}(\theta_2 - \theta_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_1 + \left(\frac{3g}{4\ell} + \frac{3k}{4m}\right)\theta_1 - \frac{3k}{4m}\theta_2 = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

- Για τη δεξιά ράβδο:

$$\Sigma\vec{\tau}_B = I_B\vec{\dot{\omega}}_2 \Rightarrow -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta_2 - \ell k(x_2 - x_1)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) = \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta_2 - \ell k(x_2 - x_1)\cos\theta_2 = \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta}_2 \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά επειδή οι γωνίες θ_1, θ_2 είναι μικρές ισχύουν:

$$\sin\theta_2 \cong \theta_2,\ \cos\theta_2 \cong 1,\ x_1 = \ell\theta_1, x_2 = \ell\theta_2$$

Οπότε η **(3)** γίνεται:

$$\frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta}_2 = -mg\frac{\ell}{2}\theta_2 - \ell k(\ell\theta_2 - \ell\theta_1) \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = -\frac{3g}{2\ell}\theta_2 - \frac{3k}{m}(\theta_2 - \theta_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}_2 - \frac{3k}{m}\theta_1 + \left(\frac{3g}{2\ell} + \frac{3k}{m}\right)\theta_2 = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Θεωρώντας λύσεις της μορφής $\theta_1(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$, $\theta_2(t)=B\cos(\omega t+\varphi)$ και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις **(2)** και **(4)** προκύπτει:

$$-\omega^2 A+\left(\frac{3g}{4\ell}+\frac{3k}{4m}\right)A-\frac{3k}{4m}B=0\Rightarrow\left(\frac{3g}{4\ell}+\frac{3k}{4m}-\omega^2\right)A-\frac{3k}{4m}B=0$$

$$-\omega^2 B-\frac{3k}{m}A+\left(\frac{3g}{2\ell}+\frac{3k}{m}\right)B=0\Rightarrow-\frac{3k}{m}A+\left(\frac{3g}{2\ell}+\frac{3k}{m}-\omega^2\right)B=0 \qquad \textbf{(5)}$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος **(5)** δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$\begin{vmatrix}\frac{3g}{4\ell}+\frac{3k}{4m}-\omega^2 & -\frac{3k}{4m}\\ -\frac{3k}{m} & \frac{3g}{2\ell}+\frac{3k}{m}-\omega^2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{3g}{4\ell}+\frac{3k}{4m}-\omega^2\right)\left(\frac{3g}{2\ell}+\frac{3k}{m}-\omega^2\right)-\frac{9k^2}{4m^2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\omega^4-\left(\frac{9g}{4\ell}+\frac{15k}{4m}\right)\omega^2+\frac{27kg}{4m\ell}+\frac{9g^2}{8\ell^2}=0$$

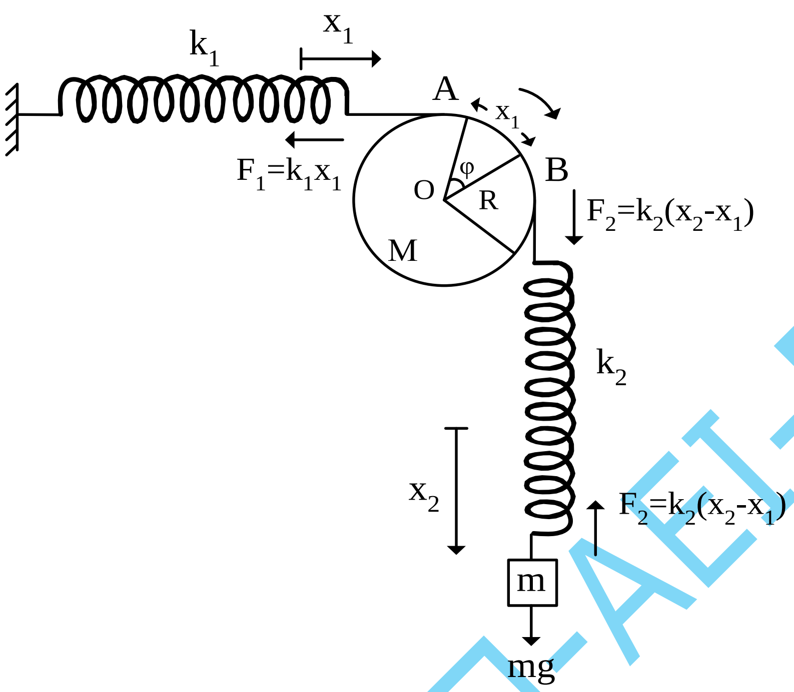
Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι:

$$\omega_{1,2}^2=\frac{9g}{2\ell}+\frac{15k}{2m}\pm\sqrt{\frac{63g^2}{4\ell^2}+\frac{225k^2}{4m^2}-\frac{27kg}{m\ell}}$$

ΘΕΜΑ 19

Κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R (ροπή αδράνειας περί τον άξονα συμμετρίας του $I = MR^2/2$), είναι στερεωμένος σε οριζόντιο άξονα περί τον οποίο μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές. Δύο ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2 είναι στερεωμένα σε δύο σημεία A και B της περιφέρειας του κυλίνδρου, όπως στο σχήμα. Το άλλο άκρο του ελατηρίου k_1 είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχο, ενώ από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου k_2 κρέμεται σώμα μάζας m.
α) Να γραφούν οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος για μικρές απομακρύνσεις από την κατάσταση ισορροπίας.
β) Να υπολογιστούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος αν $k_1 = k_2 = k$ και M=4m.

Λύση



α) Έστω ότι κάποια χρονική στιγμή οι επιμηκύνσεις των δύο ελατηρίων από τη θέση ισορροπίας τους, όπου έχουν τα φυσικά τους μήκη, είναι x_1 και x_2 αντίστοιχα ($x_1<x_2$). Στη θέση αυτή το ελατήριο σταθεράς k_1 είναι επιμηκυνμένο κατά x_1, ενώ το ελατήριο σταθεράς k_2 είναι επιμηκυνμένο κατά x_2-x_1 και οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα φαίνονται στο σχήμα.
Συνεπώς μελετώντας την κίνηση του κάθε σώματος του συστήματος κυλίνδρου – μάζας m ξεχωριστά προκύπτει:
Για την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου ο θεμελιώδης νόμος της περιστροφικής κίνησης δίνει:

$$\Sigma\vec{\tau}_o = I_o\dot{\vec{\omega}} \Rightarrow F_2R - F_1R = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} \Rightarrow k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 = \frac{MR}{2}\dot{\omega} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά επειδή τα ελατήρια δεν γλιστρούν στον κύλινδρο, δηλαδή τα σημεία Α και Β είναι στιγμιαία ακίνητα ισχύει η σχέση:

$$x_1 = \varphi R \Rightarrow \ddot{x}_1 = \dot{\omega}R \Rightarrow \dot{\omega} = \ddot{x}_1 / R \qquad \textbf{(2)}$$

Οπότε η **(1)** λόγω της **(2)** γίνεται:

$$k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 = \frac{M}{2}\ddot{x}_1 \Rightarrow M\ddot{x}_1 + 2(k_1 + k_2)x_1 - 2k_2x_2 = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Για τη μεταφορική κίνηση του σώματος m ο 2ος νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow mg - k_2(x_2 - x_1) = m\ddot{x}_2 \Rightarrow m\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = mg \qquad \textbf{(4)}$$

β) Για $k_1 = k_2 = k$ και M=4m οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος γίνονται:

$$4m\ddot{x}_1 + 4kx_1 - 2kx_2 = 0 \qquad \textbf{(5)}$$

$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = mg \qquad \textbf{(6)}$$

Για την εύρεση των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος ενδιαφέρει το ομογενές κομμάτι του συστήματος των εξισώσεων **(5)** και **(6)**. Δηλαδή:

$$4m\ddot{x}_1 + 4kx_1 - 2kx_2 = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

Συνεπώς θεωρώντας λύσεις της μορφής :

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \ x_2(t) = B\cos(\omega t + \varphi)$$

και αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης **(7)** και **(8)** με την απαίτηση να ισχύουν για κάθε t προκύπτει:

$$-4m\omega^2 A + 4kA - 2kB = 0 \Rightarrow (4k - 4m\omega^2)A - 2kB = 0$$

$$-m\omega^2 B - kA + kB = 0 \Rightarrow -kA + (k - m\omega^2)B = 0$$

Ο μηδενισμός της ορίζουσας των συντελεστών του ομογενούς συστήματος δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Δηλαδή:

$$\begin{vmatrix} 4k - 4m\omega^2 & -2k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4k - 4m\omega^2)(k - m\omega^2) - 2k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(k - m\omega^2)^2 - 2k^2 = 0 \Rightarrow m^2\omega^4 - 8km\omega^2 + 2k^2 = 0$$

Οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης είναι:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{8km \pm \sqrt{64k^2m^2 - 8k^2m^2}}{2m^2} = \frac{(8 \pm 2\sqrt{14})}{2}\frac{k}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = (4 - \sqrt{14})\frac{k}{m} \quad \text{και} \quad \omega_2^2 = (4 + \sqrt{14})\frac{k}{m}$$