ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

Ο τελεστής της στροφορμής $\hat{\vec{L}}$ έχει βασικό ρόλο στην κβαντική θεωρία και ορίζεται ως:

$$\left.\begin{aligned}\hat{\vec{L}} &= \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} \\ \hat{\vec{p}} &= -i\hbar\vec{\nabla}\end{aligned}\right\} \rightarrow \hat{\vec{L}} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla} \qquad \mathbf{(1)}$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι: $\vec{\nabla}= \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ οπότε η **(1)** δίνει:

$$\hat{\vec{L}} = -i\hbar \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= -i\hbar\left[\vec{\imath}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) - \vec{\jmath}\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]$$

Άρα:

$$\hat{L}_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Ο τελεστής του τετραγώνου του μέτρου της στροφορμής είναι:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

Επίσης ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις αντιμετάθεσης:

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y$$

$$\kappa\alpha\iota \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$$

Δηλαδή δεν είναι δυνατή η ταυτόχρονη μέτρηση δύο προβολών της στροφορμής, αλλά μόνο το μέτρο της στροφορμής και μίας εκ των τριών προβολών (συνήθως εκλέγεται να είναι η L_z).

Σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

οπότε η **(1)** δίνει:

$$\hat{\vec{L}} = -i\hbar r\hat{r} \times \left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{\varphi}\right) =$$

$$= -i\hbar\left[r(\hat{r} \times \hat{r})\frac{\partial}{\partial r} + r\frac{1}{r}(\hat{r} \times \hat{\theta})\frac{\partial}{\partial \theta} + r\frac{1}{rsin\theta}(\hat{r} \times \hat{\varphi})\frac{\partial}{\partial \varphi}\right] \Rightarrow$$

(όπου $\hat{r} \times \hat{r} = 0, \hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi}$ και $\hat{r} \times \hat{\varphi} = -\hat{\theta}$)

$$\Rightarrow \hat{\vec{L}} = -i\hbar\left(\hat{\varphi}\frac{\partial}{\partial \theta} - \hat{\theta}\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

Επειδή $\hat{\theta} = \vec{\imath}cos\theta cos\varphi + \vec{\jmath}cos\theta sin\varphi - \vec{k}sin\theta$, $\hat{\varphi} = -\vec{\imath}sin\varphi + \vec{\jmath}cos\varphi$ η προηγούμενη δίνει:

$$\hat{\vec{L}} = -i\hbar\left[(-\vec{\imath}sin\varphi + \vec{\jmath}cos\varphi)\frac{\partial}{\partial \theta} - (\vec{\imath}cos\theta cos\varphi + \vec{\jmath}cos\theta sin\varphi - \vec{k}sin\theta)\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\vec{L}} = -i\hbar\left[-\vec{i}\left(sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{cos\varphi}{tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \vec{j}\left(cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{sin\varphi}{tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

Άρα οι συνιστώσες του τελεστή είναι:

$$\hat{L}_x = i\hbar\left(sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{cos\varphi}{tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_y = -i\hbar\left(cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{sin\varphi}{tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_z = -\, i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Παρατηρείται ότι οι τελεστές της στροφορμής σε σφαιρικές συντεταγμένες έχουν γωνιακή μόνο εξάρτηση, δηλαδή αποτελούνται από παραγώγους ως προς τις γωνίες θ και φ.

Άρα αν δράσουν σε οποιαδήποτε ακτινική συνάρτηση $f_{(r)}$θα δώσουν μηδενικό αποτέλεσμα.

Έτσι: $\left[L_x, f_{(r)}\right] = \left[L_y, f_{(r)}\right] = \left[L_z, f_{(r)}\right] = 0$

Εξίσωση ιδιοτιμών των τελεστών $\hat{L}^2$ και $\hat{L}_z$

Επειδή όπως είδαμε ο μεταθέτης $[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$ οι τελεστές $\hat{L}^2$ και $\hat{L}_z$ έχουν κοινό σύνολο ιδιοδιανυσμάτων. Οι κοινές αυτές ιδιοσυναρτήσεις ονομάζονται **σφαιρικές αρμονικές** και τις συμβολίζουμε ως $\boldsymbol{Y^m_{l(\theta,\varphi)}}$.
Οι εξισώσεις ιδιοτιμών για τους τελεστές $\hat{L}^2$ και $\hat{L}_z$ που ικανοποιούν οι σφαρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις $Y_l^m(\theta,\varphi)$είναι:

$$\boldsymbol{\hat{L}^2 Y^m_{l(\theta,\varphi)} = l(l+1)\hbar^2 Y^m_{l(\theta,\varphi)}}$$

$$όπου\ l = 0,1,2 \ldots ο\ κβαντικός\ αριθμός\ στροφορμής$$

και

$$\boldsymbol{\hat{L}_z Y^m_{l(\theta,\varphi)} = m\hbar Y^m_{l(\theta,\varphi)}}$$

$$όπου\ m = -l, \ldots -1,0,1 \ldots, l\ ο\ μαγνητικός\ κβαντικός\ αριθμός$$

Δηλαδή οι ιδιοτιμές του $\hat{L}^2$ είναι οι $l(l+1)\hbar^2$, ενώ του $\hat{L}_z$ οι $m\hbar$.

Οι σφαρικές αρμονικές ιδιοσυναρτήσεις $Y_l^m(\theta,\varphi)$ είναι ορθοκανονικοποιη-μένες δηλαδή ισχύουν οι σχέσεις:

α) Κανονικοποίησης:

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} |Y_l^m|^2 sin\theta d\theta d\varphi = 1 \quad ή \quad < Y_l^m|Y_l^m >= 1$$

β) Ορθογωνιότητας:

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} Y_{l'}^{m'^*} Y_l^m sin\theta d\theta d\varphi = 0\ αν\ l \neq l'\ και\ m \neq m' \ ή\ < Y_{l'}^{m'}|Y_l^m >= 0$$

Γενικά:

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} Y_{l'}^{m'^*} Y_l^m sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'} = \begin{cases} 1, & όταν\ l = l' και\ m = m' \\ 0 & όταν\ l \neq l' και\ m \neq m' \end{cases}$$

Κάθε κυματοσυνάρτηση $\Psi_{(\theta,\varphi)}$ μπορεί να εκφραστεί με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των σφαιρικών αρμονικών ιδιοσυναρτήσεων $Y_{l(\theta,\varphi)}^m$. Δηλαδή:

$$\Psi_{(\theta,\varphi)} = \sum_{l,m} C_{lm} Y_l^m$$

Παράδειγμα:

Έστω:

$$\Psi_{(\theta,\varphi)} = \frac{2}{3}Y_2^{-1} + \frac{1}{3}Y_2^0 + \frac{2}{3}Y_1^{+1}$$

α) Ποιες είναι οι πιθανές ιδιοτιμές του L^2 και με ποια πιθανότητα εμφανίζονται;

Οι ιδιοτιμές του L^2 είναι $l(l+1)\hbar^2$ οπότε:

- Για $l = 1$ αντιστοιχεί η ιδιοτιμή $l(l+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$ με πιθανότητα εμφάνισης

$$P_{(l=1)} = \left|\frac{2}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}$$

- Για $l = 2$ αντιστοιχεί η ιδιοτιμή $l(l+1)\hbar^2 = 6\hbar^2$ με πιθανότητα εμφάνισης

$$P_{(l=2)} = \left|\frac{2}{3}\right|^2 + \left|\frac{1}{3}\right|^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

β) Ποιες είναι οι πιθανές ιδιοτιμές του L_z και με ποια πιθανότητα εμφανίζονται;

Οι ιδιοτιμές του L_z είναι $m\hbar$ οπότε:

- Για $m = -1$ αντιστοιχεί η ιδιοτιμή $m\hbar = -\hbar$ με πιθανότητα εμφάνισης

$$P_{(m=-1)} = \left|\frac{2}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}$$

- Για $m = 0$ αντιστοιχεί η ιδιοτιμή $m\hbar = 0$ με πιθανότητα εμφάνισης

$$P_{(m=0)} = \left|\frac{1}{3}\right|^2 = \frac{1}{9}$$

- Για $m = +1$ αντιστοιχεί η ιδιοτιμή $m\hbar = \hbar$ με πιθανότητα εμφάνισης

$$P_{(m=+1)} = \left|\frac{2}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}$$

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας