ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΤΕΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

1. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1.1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ – ΠΡΑΞΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

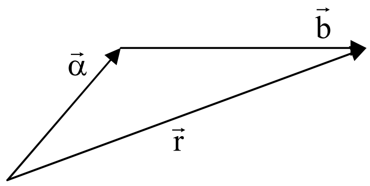
Ένα φυσικό μέγεθος ονομάζεται **διανυσματικό** όταν εκτός απ΄ το μέτρο του απαιτείται και η κατεύθυνση του στο χώρο έτσι ώστε να περιγραφεί (π.χ. η μετατόπιση , η ταχύτητα και η επιτάχυνση).

Κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια των συνιστωσών του και των μοναδιαίων διανυσμάτων ως εξής : $\vec{\alpha} = \alpha_x \hat{x} + \alpha_y \hat{y} + \alpha_z \hat{z}$.

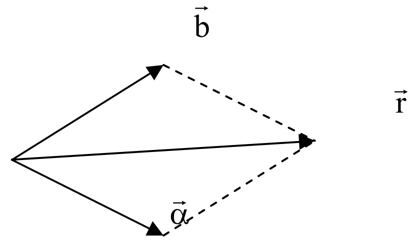
Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ είναι αδιάστατα διανύσματα, που έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα και αντικειμενικός τους σκοπός είναι να περιγράψουν τις κατευθύνσεις στο χώρο.
Συνεπώς σ΄ ένα τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ορίζουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{x}\left(\text{ή } \vec{i}\right)$, που έχει την κατεύθυνση του θετικού άξονα x, ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{y}\left(\text{ή } \vec{j}\right)$, που έχει την κατεύθυνση του θετικού άξονα y και ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}\left(\text{ή } \vec{k}\right)$, που έχει την κατεύθυνση του θετικού άξονα z .

- **Άθροιση διανυσμάτων :**

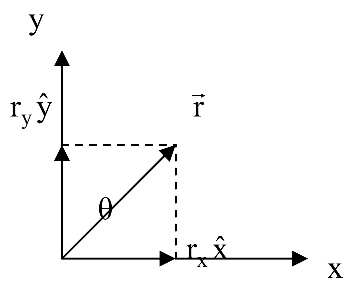
1) **Γεωμετρική μέθοδος :** Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{b}$, το άθροισμα τους είναι το διάνυσμα $\vec{r}$, που κατασκευάζεται με μετατόπιση της αρχής του $\vec{b}$ στο πέρας του $\vec{\alpha}$ και σύνδεση της αρχής του $\vec{\alpha}$ με το πέρας του $\vec{b}$, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα :



ή υπολογίζεται σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου :



2) **Αναλυτική μέθοδος :** Αν $\vec{\alpha} = \alpha_x \hat{x} + \alpha_y \hat{y}$, $\vec{b} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y}$ τότε



$$\vec{r} = \vec{\alpha} + \vec{b} = (\alpha_x + b_x)\hat{x} + (\alpha_y + b_y)\hat{y} =$$

$$= r_x \hat{x} + r_y \hat{y}$$

Μέτρο διανύσματος : $|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$

Γωνία που σχηματίζει το $\vec{r}$ με τον άξονα x : $\tan\theta = \dfrac{r_y}{r_x}$

Ισχύουν η μεταθετική ιδιότητα : $\vec{\alpha} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{\alpha}$

και η προσεταιριστική ιδιότητα : $\vec{\alpha} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{\alpha} + \vec{b}) + \vec{c}$

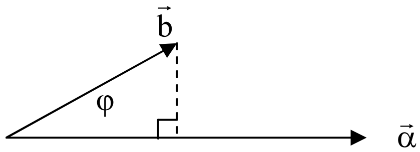
ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

- **Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων :**

Έστω $\vec{\alpha} = \alpha_x \hat{x} + \alpha_y \hat{y}$ και $\vec{b} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y}$, ορίζουμε ως **εσωτερικό γινόμενο** των $\vec{\alpha}, \vec{b}$ το βαθμωτό μέγεθος :.

$$\boxed{\vec{\alpha} \cdot \vec{b} = \alpha_x b_x + \alpha_y b_y}$$

Επίσης είναι : $\vec{\alpha} \cdot \vec{b} = |\vec{\alpha}| |\vec{b}| \cos\phi$, όπου φ η γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{b}$
δηλ. το εσωτερικό γινόμενο είναι ίσο με το μέτρο του ενός διανύσματος επί την προβολή του άλλου πάνω σ΄ αυτό .
Άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{b}$ είναι κάθετα αν και μόνο αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{b} = 0$.



Για ένα διάνυσμα $\vec{\alpha} = \alpha_x \hat{x} + \alpha_y \hat{y} + \alpha_z \hat{z}$ τα **συνημίτονα κατεύθυνσης** είναι τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τους άξονες των συντεταγμένων . Συνεπώς για να υπολογίσουμε τα συνημίτονα κατεύθυνσης ενός διανύσματος παίρνουμε το εσωτερικό του γινόμενο με τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}, \hat{y}$ και $\hat{z}$ αντίστοιχα.

- **Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων :**

Αν $\vec{\alpha} = \alpha_x \hat{x} + \alpha_y \hat{y} + \alpha_z \hat{z}$ και $\vec{b} = b_x \hat{x} + b_y \hat{y} + b_z \hat{z}$ τότε ορίζουμε ως **εξωτερικό γινόμενο** των $\vec{\alpha}, \vec{b}$ και συμβολίζουμε με $\vec{\alpha} \times \vec{b}$ το διάνυσμα :

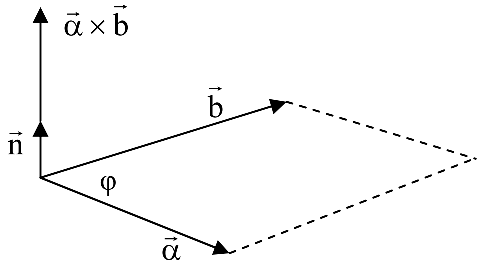
$$\vec{\alpha} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (\alpha_y b_z - \alpha_z b_y)\hat{x} - (\alpha_x b_z - b_x \alpha_z)\hat{y} + (\alpha_x b_y - \alpha_y b_x)\hat{z}$$

Επίσης το εξωτερικό γινόμενο δίνεται και απ΄ τη σχέση :

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΝ... Ι-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

$$\vec{\alpha} \times \vec{b} = \left(|\vec{\alpha}|\,|\vec{b}|\sin\phi\right)\vec{n}$$

όπου φ είναι η γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{b}$ και $\vec{n}$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο επίπεδο που ορίζουν τα $\vec{\alpha}, \vec{b}$ και έχει φορά έτσι ώστε το σύστημα $\vec{\alpha}, \vec{b}, \vec{n}$ να είναι δεξιόστροφο .



1.2 ΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΝΑΔΕΛΤΑ – ΤΕΛΕΣΤΗΣ LAPLACE.

Βαθμωτή λέγεται κάθε συνάρτηση f(x,y,z) που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο του χώρου (x,y,z) ένας αριθμός (π.χ. η θερμοκρασία T(x,y,z) είναι περίπτωση βαθμωτής συνάρτησης).

Διανυσματική λέγεται κάθε συνάρτηση $\vec{F} = \left(F_x, F_y, F_z\right)$ που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο του χώρου (x,y,z) ένα διάνυσμα (π.χ. η ταχύτητα είναι περίπτωση διανυσματικής συνάρτησης).

Ο διαφορικός διανυσματικός τελεστής ανάδελτα $\vec{\nabla}$ είναι σε καρτεσιανές συντεταγμένες :

$$\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Αν F(x,y,z) βαθμωτή συνάρτηση τότε :

$$\boxed{\text{grad F ή } \vec{\nabla}F = \hat{x}\frac{\partial F}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial F}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial F}{\partial z}}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

είναι η **κλίση** της F.

Αν $\vec{F} = [P(x,y,z)\hat{x} + Q(x,y,z)\hat{y} + R(x,y,z)\hat{z}]$ διανυσματική συνάρτηση τότε :

$$\boxed{\text{div } \vec{F} \text{ ή } \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$$

είναι η **απόκλιση** της $\vec{F}$.

$$\text{και} \quad \text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \hat{y}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

είναι ο **στροβιλισμός ή περιστροφή** της $\vec{F}$.

Ως Λαπλασιανή ορίζουμε τον τελεστή ∇^2, ο οποίος σε καρτεσιανές συντεταγμένες γράφεται ως :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Άρα η δράση του τελεστή Laplace σε μια βαθμωτή συναρτηση f(x,y,z) δίνει :

$$\nabla^2 f = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.1 Υπολογίστε τα παρακάτω γινόμενα :

$$\vec{i}\cdot\vec{i} \quad , \quad \vec{i}\cdot\vec{k} \quad , \quad \vec{k}\cdot\vec{j} \;, \quad \vec{j}\cdot\left(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right) \quad , \quad \left(2\vec{i}-\vec{j}\right)\cdot\left(3\vec{i}+\vec{k}\right)$$

1.2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A}=\hat{x}+2\hat{y}+3\hat{z}$, $\vec{B}=-2\hat{x}+\hat{y}+2\hat{z}$.
Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{A}+\vec{B}$ καθώς και το μέτρο $\left|\vec{A}+\vec{B}\right|$.
Να υπολογισθεί η γωνία μεταξύ του $\vec{A}+\vec{B}$ και των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{x},\hat{y}$ και $\hat{z}$.Επίσης να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{C}$ έτσι ώστε $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=O$.

1.3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{A}=3\hat{x}+4\hat{y}-5\hat{z}$, $\vec{B}=-\hat{x}+2\hat{y}+6\hat{z}$.
Υπολογίστε : (i) το μέτρο κάθε διανύσματος ,
(ii) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{A}\cdot\vec{B}$,
(iii) τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{A}$ και $\vec{B}$,
(iv) τα διευθύνοντα συνημίτονα κάθε διανύσματος και
(v) το εξωτερικό γινόμενο $\vec{A}\times\vec{B}$.

1.4. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο τόσο στο $4\hat{x}+3\hat{y}$ όσο και στο $-\hat{x}-3\hat{y}+2\hat{z}$.

1.5. Αν $\phi=x^2yz^3$ και $\vec{A}=xz\vec{i}-y^2\vec{j}+2x^2y\vec{k}$, βρείτε τις
(α) $\vec{\nabla}\phi$, (b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, (c) $\vec{\nabla}\times\vec{A}$.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

1.6. Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{v}\cdot\vec{w}$ και το εξωτερικό γινόμενο $\vec{v}\times\vec{w}$ για τα επόμενα ζεύγη διανυσμάτων :

α) $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{w} = \vec{k}$

β) $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{w} = 3\vec{i} + \vec{j}$

γ) $\vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$

1.7. Υπολογίστε το στροβιλισμό $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ κάθε μιας από τις παρακάτω διανυσματικές συναρτήσεις

α) $\vec{F}(x,y,z)=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$

β) $\vec{F}(x,y,z)= yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$

γ) $\vec{F}(x,y,z)= (x^2+y^2+z^2)\,(3\,\vec{i}+4\,\vec{j}+5\,\vec{k})$

δ) $\vec{F}(x,y,z)=3x^2y\,\vec{i}+(x^3+y^3)\,\vec{j}$.

1.8. Αν $\varphi=2x^2y-xz^3$, βρείτε τις α) $\vec{\nabla}\phi$ και β) $\nabla^2\phi$.

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΕΜΠ - ΑΕΙ - ΕΑΠ - ΤΕΙ