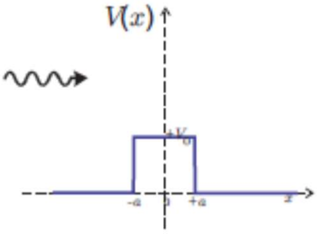
Μεθοδικά, απλά & κατανοητά…

Θέμα



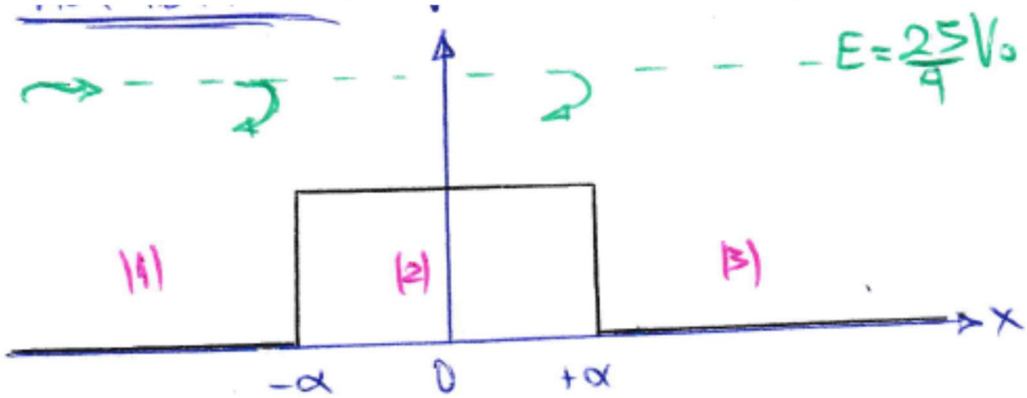
Σωματίδιο μάζας m προσπίπτει από τα αριστερά με ενέργεια $E = \frac{25}{9}V_0$ στο δυναμικό του διπλανού σχήματος

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , x < -a \\ +V_0 & , -a < x < a \\ 0 & , x > a \end{cases}$$

με V_0 γνωστή θετική σταθερά με διαστάσεις ενέργειας που επιλέγεται έτσι ώστε $a\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} = 2\pi$.

(α) Βρείτε την κυματοσυνάρτηση σε όλο το χώρο(με εξαίρεση τη σταθερά κανονικοποίησης).

(β) Υπολογίστε τον συντελεστή διέλευσης και τον συντελεστή ανάκλασης .



α) Περιοχή 1: Για $x<-\alpha$ είναι $V(x)=0$ οπότε η εξίσωση Schrödinger γίνεται:

$$\psi_1'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-\cancel{V(x)})\psi_1 = 0 \rightarrow \psi_1'' + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}E}_{k_1^2>0}\psi_1 = 0$$

Γενική Λύση: $\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$ (1)

όπου $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{25}{9}V_0 \rightarrow k_1 = \sqrt{\frac{25}{9}}\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \rightarrow k_1 = \frac{5}{3}\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{10\pi}{3\alpha}$ (2)

Περιοχή 2: Για $-\alpha < x < \alpha$ είναι $V_{(x)} = V_0$ οπότε:

$$\psi_2'' + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}_{=k_2^2>0}\psi_2 = 0$$

Γενική Λύση: $\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$ (3)

όπου $k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{25}{9}V_0 - V_0\right) = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{16}{9}V_0 \rightarrow k_2 = \sqrt{\frac{16}{9}}\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \rightarrow$

$$\rightarrow k_2 = \frac{4}{3}\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{8\pi}{3\alpha} \quad (4)$$

Περιοχή 3: Για $x>\alpha$ είναι $V_{(x)} = 0$ οπότε:

$$\psi_3'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-\cancelto{0}{V_{(x)}})\psi_3 = 0 \rightarrow \psi_3'' + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{=k_1^2>0}\psi_3 = 0$$

Γενική Λύση: $\psi_3(x) = Fe^{ik_1x} + Ge^{-ik_1x}$

Επειδή δεν υπάρχει αίτιο ανάκλασης στην περιοχή 3 είναι $G=0$ οπότε:

$$\psi_3(x) = Fe^{ik_1x} \quad (5)$$

Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες στα σημεία $x=-\alpha$ και $x=\alpha$:

$x=-\alpha$: $\psi_1(x=-\alpha) = \psi_2(x=-\alpha) \xrightarrow{(1,3)} Ae^{-ik_1\alpha} + Be^{ik_1\alpha} = Ce^{-ik_2\alpha} + De^{ik_2\alpha} \rightarrow$

$$\xrightarrow{(2,4)} A\underbrace{e^{-i\frac{10\pi}{3}}}_{\rightarrow 1} + B\underbrace{e^{i\frac{10\pi}{3}}}_{\rightarrow 1} = C\underbrace{e^{-i\frac{8\pi}{3}}}_{\rightarrow 1} + D\underbrace{e^{i\frac{8\pi}{3}}}_{\rightarrow 1} \rightarrow$$

-5-

$$\rightarrow A + B = C + D \quad (6)$$

$$\psi_1'(x=-\alpha) = \psi_2'(x=-\alpha) \xrightarrow{(1,3)} i k_1 A e^{-ik_1\alpha} - ik_1 B e^{ik_1\alpha} = ik_2 C e^{-ik_2\alpha} - ik_2 D e^{ik_2\alpha} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{(2,4)} \frac{10\pi}{3\alpha} A \underbrace{e^{-i\frac{10}{3}\pi}}_{1} - \frac{10\pi}{3\alpha} B \underbrace{e^{i\frac{10}{3}\pi}}_{1} = \frac{8\pi}{3\alpha} C \underbrace{e^{-i\frac{8\pi}{3}}}_{1} - \frac{8\pi}{3\alpha} D \underbrace{e^{i\frac{8\pi}{3}}}_{1} \rightarrow$$

$$\rightarrow 10A - 10B = 8C - 8D \quad (7)$$

όπου $e^{i\frac{10}{3}\pi} = -(-1)^{1/3} = +1$, $e^{-i\frac{10}{3}\pi} = -\frac{1}{(-1)^{1/3}} = +1$, $e^{i\frac{8}{3}\pi} = (-1)^{2/3} = +1$

$$e^{-i\frac{8}{3}\pi} = \frac{1}{(-1)^{2/3}} = +1 \quad \text{αφού} \quad e^{\pm i\alpha\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^{\pm\alpha} = (-1)^{\pm\alpha}$$

$x=\alpha$: $\psi_2(x=\alpha) = \psi_3(x=\alpha) \xrightarrow{(3,5)} C e^{ik_2\alpha} + D e^{-ik_2\alpha} = F e^{ik_1\alpha} \xrightarrow{(2,4)}$

$$\rightarrow C \underbrace{e^{i\frac{8\pi}{3}}}_{1} + D \underbrace{e^{-i\frac{8\pi}{3}}}_{1} = F \underbrace{e^{i\frac{10}{3}\pi}}_{1} \rightarrow$$

$$\rightarrow C + D = F \quad (8)$$

$$\psi_2'(x=\alpha) = \psi_3'(x=\alpha) \xrightarrow{(3,5)} ik_2 C e^{ik_2\alpha} - ik_2 D e^{-ik_2\alpha} = ik_1 F e^{ik_1\alpha} \xrightarrow{(2,4)}$$

$$\rightarrow \frac{8\pi}{3\alpha} C \underbrace{e^{i\frac{8}{3}\pi}}_{1} - \frac{8\pi}{3\alpha} D \underbrace{e^{-i\frac{8}{3}\pi}}_{1} = \frac{10\pi}{3\alpha} F \underbrace{e^{i\frac{10}{3}\pi}}_{1} \rightarrow$$

$$\rightarrow 8C - 8D = 10F \xrightarrow{(8)} 8C - 8D = 10(C+D) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2C = -18D \rightarrow C = -9D \quad (9)$$

www.pmoiras.weebly.com panmoiras@gmail.com 6932 946778

Οπότε: $(6) \overset{(10)}{\leadsto} A+B=-9D+D \rightarrow A+B=-8D \quad (10)$

$(7) \overset{(10)}{\leadsto} 10A-10B=-72D-8D \rightarrow 10A-10B=-80D \rightarrow$

$\rightarrow A-B=-8D \xrightarrow{(10)} A-B=A+B \rightarrow 2B=0 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{B=0} \quad (11)$

$(10) \overset{(11)}{\leadsto} A=-8D \rightarrow \boxed{D=-\frac{A}{8}} \quad (12)$

$(9) \overset{(12)}{\leadsto} \boxed{C=\frac{9}{8}A} \quad (13)$

$(8) \overset{(12,13)}{\leadsto} F=\frac{9}{8}A-\frac{A}{8} \rightarrow F=\frac{8}{8}A \rightarrow \boxed{F=A} \quad (14)$

Άρα η κυματοσυνάρτηση σε όλο το χώρο με εξαίρεση της σταθεράς κανονικοποίησης A είναι:

$$\psi=\begin{cases} A\,e^{i\frac{10\pi}{3a}x} & \text{για } x<-a \\ \frac{9}{8}A\,e^{i\frac{8\pi}{3a}x}-\frac{A}{8}\,e^{-i\frac{8\pi}{3a}x}, & \text{για } -a<x<a \\ A\,e^{i\frac{10\pi}{3a}x}, & \text{για } x>a. \end{cases}$$

β) Το προσπίπτον και το διαδιδόμενο ρεύμα πιθανότητας είναι:

$$J_I = \frac{\hbar k_1}{m}|A|^2 \quad (15)$$

και $J_T = \frac{\hbar k_1}{m}|F|^2 \overset{(14)}{=} \frac{\hbar k_1}{m}|A|^2 \quad (16)$

Άρα ο συντελεστής διέλευσης είναι:

$$T = \frac{J_T}{J_I} = \frac{\frac{\hbar k_1}{m}|A|^2}{\frac{\hbar k_1}{m}|A|^2} \rightarrow \boxed{T = 1}.$$

Το ανακλώμενο ρεύμα πιθανότητας είναι:

$$J_R = \frac{\hbar k_2}{m}|B|^2 \xrightarrow{(11)} J_R = 0$$

Άρα ο συντελεστής ανάκλασης είναι: $R = \frac{J_R}{J_I} \rightarrow \boxed{R = 0}$

Πράγματι: $R + T = 1$.