ΦΥΣΙΚΗ Ι
ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

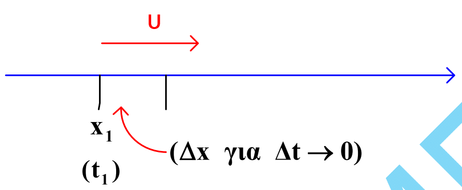
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

1.1 Ευθύγραμμη κίνηση

Γνωρίζοντας από τα εισαγωγικά μαθήματα τις έννοιες της μέσης ταχύτητας και της μέσης επιτάχυνσης διαπιστώνουμε ότι τα μεγέθη αυτά μας παρέχουν έναν «μέσο όρο» της ταχύτητας και της επιτάχυνσης κατά τη διάρκεια όλης της κίνησης. Για παράδειγμα αν ένα σώμα ξεκινά από την ηρεμία και κινείται επιταχυνόμενο είναι προφανές ότι η ταχύτητά του συνεχώς θα αυξάνεται με το χρόνο, πράγμα το οποίο δεν δείχνει η μέση ταχύτητα. Συνεπώς αν θέλουμε να έχουμε ακριβή πληροφορία της κίνησης, δηλαδή να γνωρίζουμε την ταχύτητα του σε κάθε χρονική στιγμή και κάθε θέση θα πρέπει να ορίσουμε τη **<u>στιγμιαία ταχύτητα.</u>**



Έτσι αν το σώμα τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στη θέση x_1 τότε μετά από πολύ μικρό χρόνο $\Delta t \to 0$ έχει μετατοπιστεί κατά ένα πολύ μικρό διάστημα Δx και η ταχύτητά του τότε θα είναι:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon = \frac{dx}{dt}}$$

(αφού το όριο αυτό αποτελεί τον ορισμό της παραγώγου).

Δηλαδή γνωρίζοντας τη θέση του σώματος συναρτήσει του χρόνου $x(t)$ και παραγωγίζοντας την ως προς το χρόνο προκύπτει η ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου $\upsilon(t)$ (στιγμιαία ταχύτητα).

Ομοίως αν το σώμα μετά από πολύ μικρό χρόνο $\Delta t \to 0$ μεταβάλλει την ταχύτητά του κατά μια πολύ μικρή ποσότητα $\Delta\upsilon$, τότε η επιτάχυνση του είναι:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{d\upsilon}{dt}}$$

Δηλαδή η χρονική παράγωγος της ταχύτητας δίνει τη στιγμιαία επιτάχυνση του σώματος.

Παράδειγμα:

Αν ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και η θέση του μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$$x(t) = 2t^2 - 3t + 10$$

να βρεθεί η στιγμιαία ταχύτητα και επιτάχυνσή του.

Λύση: Παρατηρούμε ότι:

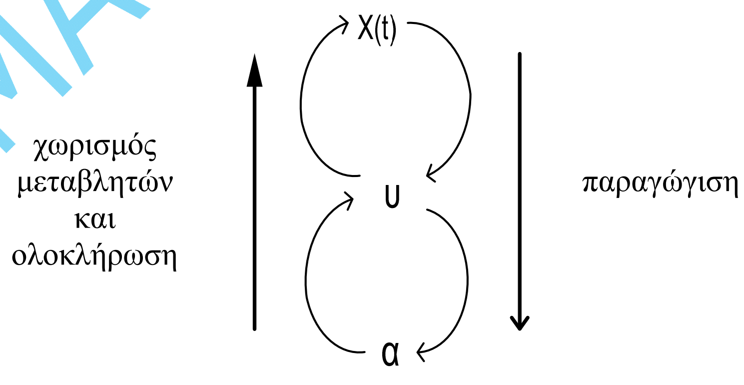
$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t^2 - 3t + 10\right) = 4t - 3 \quad (m/sec)$$

και

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(4t - 3) = 4 \quad \left(m/sec^2\right)$$

Σημείωση: Με τους ορισμούς των στιγμιαίων μεγεθών ταχύτητας και επιτάχυνσης γίνεται φανερή η εφαρμογή του διαφορικού και ολοκληρωτικού (στη συνέχεια) λογισμού στη Φυσική. Δηλαδή γνωρίζοντας τη θέση $x(t)$ ενός κινητού, παραγωγίζοντας την διαδοχικά ως προς το χρόνο μπορεί να υπολογιστεί η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του, ενώ αντίθετα γνωρίζοντας τη συνάρτηση της επιτάχυνσης α και ολοκληρώνοντάς την διαδοχικά μπορεί να υπολογιστεί η ταχύτητα και η θέση του.

Σχηματικά η διαδικασία αυτή φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:



Εφαρμογές:

α. Αν η επιτάχυνση ενός σώματος είναι $\alpha = 2t^2$ και για $t=0$ είναι $\upsilon_o = 0$ και $x_o = 0$ να βρεθούν οι συναρτήσεις $\upsilon(t)$ και $x(t)$.

Λύση: Επειδή από την επιτάχυνση ζητάμε την ταχύτητα, ξεκινάμε από τον ορισμό της στιγμιαίας επιτάχυνσης, αντικαθιστούμε τη δοθείσα συνάρτηση της επιτάχυνσης και χωρίζοντας μεταβλητές και ολοκληρώνοντας θα βρούμε την ταχύτητα. Δηλαδή:

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad 2t^2 = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\upsilon = 2t^2 dt \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^{\upsilon} d\upsilon = 2\int_0^{t} t^2 dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_{(t)} = \frac{2}{3}t^3}$$

Τα κάτω όρια είναι πάντα σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία από τον ορισμό της ταχύτητας προκύπτει η θέση $x(t)$ ως:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}t^3 = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{x} dx = \frac{2}{3}\int_0^{t} t^3 dt \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}\cdot\frac{t^4}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{t^4}{6}}$$

β. Η επιτάχυνση σώματος είναι $\alpha(\upsilon) = 2\sqrt{\upsilon}$ και για $t=0$ είναι $\upsilon_o = 0$ και $x_o = 0$, να βρεθούν οι $\upsilon(t)$, $x(t)$ και $\upsilon(x)$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι:

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{\upsilon} = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\sqrt{\upsilon}} = 2\int_0^{t} dt \quad \Rightarrow$$

$$2\sqrt{\upsilon} = 2t \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\upsilon} = t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t) = t^2}$$

και

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{x} dx = \int_0^{t} t^2 dt \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t)=\frac{t^3}{3}}$$

Για τον προσδιορισμό της συνάρτησης $\upsilon(x)$ θα εφαρμοστεί ο <u>κανόνας της αλυσιδωτής παραγώγισης</u> στον ορισμό της επιτάχυνσης έτσι ώστε οι μεταβλητές να είναι η υ και η x. Δηλαδή:

$$\alpha=\frac{d\upsilon}{dt} \quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{\upsilon}=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{dx}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\upsilon}$$

$$\Rightarrow\quad 2\sqrt{\upsilon}=\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \quad\Rightarrow\quad 2=\frac{d\upsilon}{dx}\sqrt{\upsilon} \quad\Rightarrow$$

$$\int_0^{\upsilon}\sqrt{\upsilon}d\upsilon=2\int_0^{x}dx \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3}\upsilon^{\frac{3}{2}}=2x \quad\Rightarrow\quad \upsilon^{\frac{3}{2}}=3x \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(x)=(3x)^{\frac{2}{3}}}$$

γ. Η επιτάχυνση σώματος είναι $\alpha(x)=4x$ και για $t=0$ είναι $\upsilon_o=2m/sec$ και $x_o=1m$, να βρεθούν οι $\alpha(t)$, $\upsilon(t)$ και $x(t)$.

<u>**Λύση:**</u> Από τον ορισμό της επιτάχυνσης έχουμε:

$$\alpha=\frac{d\upsilon}{dt} \quad\Rightarrow\quad 4x=\frac{d\upsilon}{dt} \quad\Rightarrow$$

$$4x=\frac{d\upsilon}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \quad\Rightarrow\quad 4x=\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \quad\Rightarrow$$

κι επειδή έχουμε τρεις μεταβλητές (x,υ,t) είμαστε αναγκασμένοι να εφαρμόσουμε τον κανόνα της αλυσίδας.

$$\int_2^{\upsilon}\upsilon d\upsilon=4\int_1^{x}xdx \quad\Rightarrow\quad \left.\frac{\upsilon^2}{2}\right|_2^{\upsilon}=4\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^{x} \quad\Rightarrow$$

$$\upsilon^2-4=4\left(x^2-1\right) \quad\Rightarrow$$

$$\upsilon^2-4=4x^2-4 \quad\Rightarrow\quad \upsilon^2=4x^2 \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(x)=2x}$$

Υπολογίσαμε την $\upsilon(x)$ και όχι την $\upsilon(t)$ που ζητούσε. Συνεχίζουμε βρίσκοντας την $x(t)$ και παραγωγίζοντας την θα βρούμε την $\upsilon(t)$. Δηλαδή:

$$\upsilon=\frac{dx}{dt} \quad\Rightarrow\quad 2x=\frac{dx}{dt} \quad\Rightarrow\quad \int_1^{x}\frac{dx}{x}=2\int_0^{t}dt \quad\Rightarrow$$

$$\ell n\, x\Big|_1^x = 2t \quad \Rightarrow \quad \ell nx - \ell n1 = 2t \quad \Rightarrow \quad \ell nx = 2t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\ell n1 = 0}$$

$$\boxed{x(t) = e^{2t}}$$

Άρα:

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = 2e^{2t}$$

και

$$\alpha(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = 4e^{2t}$$

Παρατήρηση: Τον κανόνα της αλυσίδας τον εφαρμόζουμε σε δυο περιπτώσεις:

1. Όταν μας δίνεται η $\alpha(\upsilon)$ και μας ζητείται η $\upsilon(x)$.
2. Όταν μας δίνεται η $\alpha(x)$ είμαστε αναγκασμένοι να βρούμε πρώτα την $\upsilon(x)$ με εφαρμογή του κανόνα αλυσίδας.

1.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1η

Η επιτάχυνση μιας βενζινακάτου ως συνάρτηση του χρόνου δίνεται από την εξίσωση:

$$\alpha = B\cdot t - C\cdot t^2$$

όπου οι μονάδες της α είναι m/sec^2.

α. Ποιες είναι οι μονάδες των B και C;

β. Ποια είναι η ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου αν η βενζινάκατος ξεκινάει από την ακινησία;

γ. Σε ποιο χρόνο t_1 η επιτάχυνση είναι μηδέν;

δ. Ποια είναι η ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_1;

Λύση:

α. Οι μονάδες των σταθερών B, C είναι τέτοιες ώστε η δοθείσα συνάρτηση της επιτάχυνσης να έχει μονάδες m/sec^2. Δηλαδή το $B\cdot t$ έχει μονάδες m/sec^2 και επειδή το t έχει μονάδες sec το B πρέπει να έχει μονάδες m/sec^3, ενώ για να έχει το $C\cdot t^2$ μονάδες m/sec^2 πρέπει το C να έχει μονάδες m/sec^4.

β. Αρχική συνθήκη: Για $t=0$ είναι $\upsilon_o = 0$. Επομένως:

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} \quad\Rightarrow\quad B\cdot t - C\cdot t^2 = \frac{d\upsilon}{dt} \quad\Rightarrow\quad \int_0^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^{t}\left(B\cdot t - C\cdot t^2\right)dt \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t) = \frac{B\cdot t^2}{2} - \frac{C\cdot t^3}{3}} \quad (1)$$

γ. Η επιτάχυνση γίνεται μηδέν όταν:

$$\alpha = 0 \quad\Rightarrow\quad B\cdot t - C\cdot t^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad t\left(B - C\cdot t\right) = 0 \quad\Rightarrow$$

$$t = 0 \quad \text{και} \quad \boxed{t_1 = \frac{B}{C}} \quad (2)$$

δ. Λόγω των (1) και (2) η ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\upsilon(t_1) = \frac{B}{2}\cdot\frac{B^2}{C^2} - \frac{C}{3}\cdot\frac{B^3}{C^3} = \frac{B^3}{2C^2} - \frac{B^3}{3C^2} \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t_1) = \frac{B^3}{6C^2}}$$

Άσκηση 2η

Ένα σωμάτιο κινείται πάνω στον άξονα x. Η ταχύτητά του ως συνάρτηση του χρόνου δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = 5 + 10t$$

όπου το υ είναι σε m/sec.
Η θέση του σωματίου για $t = 0$ είναι $20m$. Να βρείτε:

α. Την επιτάχυνση ως συνάρτηση του χρόνου.
β. Τη θέση ως συνάρτηση του χρόνου.
γ. Την ταχύτητα του σωματίου κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Λύση:

α. Είναι:

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 10t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 10m/sec^2}$$

β. Από τον ορισμό της ταχύτητας:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad 5 + 10t = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{20}^{x} dx = \int_{0}^{t} (5 + 10t)\,dt \quad \Rightarrow$$

$$x - 20 = 5t + \frac{10t^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = 5t^2 + 5t + 20}$$

γ. Η ταχύτητα του σωματίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι:

$$\upsilon(t = 0) = 5 + 10 \cdot 0 = 5m/sec$$

Άσκηση 3η

Σώμα κινείται μονοδιάστατα με επιτάχυνση $\alpha = b - c\upsilon$, όπου υ η ταχύτητα και b, c σταθερές. Αν για $t = 0$ είναι $\upsilon_o = 0$ και $x_o = 0$, να υπολογιστεί η ταχύτητα και η θέση του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου.

Λύση:

Από τον ορισμό της επιτάχυνσης προκύπτει:

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad b - c\upsilon = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{b - c\upsilon} = \int_{0}^{t} dt \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{c}\ell n(b - c\upsilon)\Big|_{0}^{\upsilon} = t \quad \Rightarrow 0$$

$$\ell n(b - c\upsilon) - \ell nb = -ct \quad \Rightarrow \quad \ell n\left(\frac{b - c\upsilon}{b}\right) = -ct \quad \Rightarrow \quad \frac{b - c\upsilon}{b} = e^{-ct}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{c}{b}\upsilon = e^{-ct} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{b}\upsilon = 1-e^{-ct} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon(t) = \frac{b}{c}\left(1-e^{-ct}\right)}$$

Επίσης:

$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{c}\left(1-e^{-ct}\right) = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x dx = \frac{b}{c}\int_0^t \left(1-e^{-ct}\right)dt \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{b}{c}\left[t-\frac{e^{-ct}}{-c}\right]_0^t = \frac{b}{c}\left[t+c\left(e^{-ct}-e^{o}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{b}{c}\left[t+c\left(e^{-ct}-1\right)\right]}$$

Άσκηση 4η

Σώμα κινείται μονοδιάστατα με επιτάχυνση $\alpha = k+\upsilon$, όπου υ η ταχύτητα και k σταθερά. Αν για $t=0$ είναι $\upsilon_o = 0$ και $x_o = 0$ να υπολογιστεί η θέση ως συνάρτηση της ταχύτητας, δηλαδή η συνάρτηση $x(\upsilon)$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι:

υ

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad k+\upsilon = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad k+\upsilon = \frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\upsilon d\upsilon}{k+\upsilon} = dx \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^{\upsilon} \frac{\upsilon d\upsilon}{k+\upsilon} = \int_0^x dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\upsilon} \frac{\upsilon+k-k}{k+\upsilon}d\upsilon = \int_0^x dx \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^{\upsilon}\left(1-\frac{k}{k+\upsilon}\right)d\upsilon = \int_0^x dx \quad \Rightarrow$$

$$\left[\upsilon - k\ell n\left(k+\upsilon\right)\right]_0^{\upsilon} = x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon - k\ell n\left(\frac{k+\upsilon}{k}\right) = x(\upsilon)}$$

Σημείωση: Υπολογισμός ολοκληρώματος:

$$\int \frac{xdx}{x+\alpha} = \int \frac{x+\alpha-\alpha}{x+\alpha}dx = \int\left(1-\frac{\alpha}{x+\alpha}\right)dx = x-\alpha\ell n\left(x+\alpha\right)$$

προσθαφαιρούμε την σταθερά του παρανομαστή στον αριθμητή έτσι ώστε να σπάσει το κλάσμα.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

2.1 Δυναμική της ευθύγραμμης κίνησης

Η Δυναμική περιγράφει τα αίτια της κίνησης (δηλαδή τις δυνάμεις που ασκούνται σε σώμα) μέσω του γνωστού $2^{ου}$ νόμου Newton:

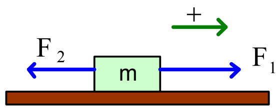
$$\boxed{\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}}$$

Ο $2^{ος}$ νόμος του Newton μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίζουμε τα κινηματικά μεγέθη (επιτάχυνση, ταχύτητα, θέση) από τις δυνάμεις και αντίστροφα. Δηλαδή ισχύει η αμφίδρομη σχέση:

$$F \Leftrightarrow \alpha,\ \upsilon,\ x$$

Σχόλιο: Όπως θα δειχθεί και στα ακόλουθα παραδείγματα, χρησιμοποιώντας τη μαθηματική λογική της προηγούμενης παραγράφου μπορεί να προσδιορίζεται από τη δύναμη η επιτάχυνση, η ταχύτητα και η θέση.

Προσοχή: Κατά την εφαρμογή σε ένα σώμα του $2^{ου}$ νόμου του Newton, όπου σε αυτό ασκούνται περισσότερες από μια δυνάμεις θα επιλέγεται πάντα σα θετική φορά των δυνάμεων η <u>φορά της κίνησης</u> του σώματος, χωρίς να μας ενδιαφέρει αν κινείται απιταχυνόμενα ή επιβραδυνόμενα. Δηλαδή στο ακόλουθο σχήμα το σώμα κινείται προς τα δεξιά με την επίδραση των δυνάμεων F_1 και F_2.



Είναι:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad F_1 - F_2 = m\alpha$$

Δηλαδή:

αν $F_1 > F_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha > 0$ (επιτάχυνση)

ενώ αν $F_1 < F_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha < 0$ (επιβράδυνση)

<u>2.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

<u>Άσκηση 1η</u>

Ένα σώμα μάζας $m = 10kgr$ υφίσταται μια δύναμη μέτρου $F = (120t + 40)$ Nt και κινείται σε ευθεία γραμμή. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σώμα βρίσκεται στη θέση $x_o = 5m$ και έχει ταχύτητα $\upsilon_o = 6m/sec$. Βρείτε την ταχύτητα και τη θέση του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου t.

<u>Λύση:</u>

Σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton είναι:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad 120t + 40 = 10\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 12t + 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon}{dt} = 12t + 4 \quad \Rightarrow$$

$$\int_6^{\upsilon} d\upsilon = \int_0^t (12t + 4)dt \quad \Rightarrow \quad \upsilon - 6 = 12\frac{t^2}{2} + 4t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t) = 6t^2 + 4t + 6}$$

Ενώ από τον ορισμό της ταχύτητας είναι:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 6t^2 + 4t + 6 \Rightarrow \int_5^x dx = \int_0^t \left(6t^2 + 4t + 6\right)dt \Rightarrow$$

$$x - 5 = 6\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} + 6t \Rightarrow \boxed{x(t) = 2t^3 + 2t^2 + 6t + 5}$$

Άσκηση 2η

Σωματίδιο μάζας m βάλλεται κατά μήκος οριζόντιας επιφάνειας με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_o. Το σωματίδιο υπόκειται σε αντίσταση μέτρου $mk\upsilon$, όπου υ το μέτρο της ταχύτητας του και k θετική σταθερά.

α. Υπολογίστε την ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου.

β. Υπολογίστε την απόσταση s που διανύει το σωματίδιο μέχρις ότου ηρεμήσει.

γ. Υπολογίστε το χρόνο $t_{1/2}$ (χρόνος υποδιπλασιασμού), που απαιτείται ώστε η ταχύτητα του σωματιδίου να γίνει $\upsilon_o/2$.

Λύση:

α. Επειδή η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι δύναμη αντίστασης, είναι αντίθετη της κίνησης και ο $2^{ος}$ νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow -mk\upsilon = m\alpha \Rightarrow \alpha = -k\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon \Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_o}^{\upsilon} \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -k\int_0^t dt \Rightarrow \ell n\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_o}\right) = -kt \Rightarrow \frac{\upsilon}{\upsilon_o} = e^{-kt} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t) = \upsilon_o e^{-kt}} \quad (1)$$

β. Από το 2^o νόμο του Newton και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow -mk\upsilon = m\alpha \Rightarrow -k\upsilon = \alpha \Rightarrow -k\upsilon = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon}$$

$$-k\upsilon = \frac{d\upsilon}{dx}\cdot\upsilon \Rightarrow \int_{\upsilon_o}^{0} d\upsilon = -k\int_0^s dx \Rightarrow -\upsilon_o = -ks \Rightarrow$$

$$\boxed{s = \frac{\upsilon_o}{k}}$$

γ. Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) για $t = t_{1/2}$ που είναι $\upsilon_{(t)} = \upsilon_o/2$ προκύπτει:

$$\frac{\upsilon_o}{2} = \upsilon_o e^{-kt_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-kt_{1/2}} \Rightarrow \ell n\left(\frac{1}{2}\right) = \ell n e^{-kt_{1/2}} \Rightarrow$$

$$\ell n\left(\frac{1}{2}\right) = -kt_{1/2} \quad \Rightarrow \quad \ell n1 - \ell n2 = -kt_{1/2} \quad \Rightarrow \quad \ell n2 = kt_{1/2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ell n2}{k}}$$

$$\boxed{\ell n1 = 0}$$

Άσκηση 3η

Η ταχύτητα ενός βλήματος μάζας m που κινείται οριζόντια και επιβραδύνεται εξαιτίας της τριβής του αέρα δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση:

$$\upsilon(t) = \upsilon_o e^{-\lambda t}$$

όπου υ_o και λ θετικές σταθερές και t ο χρόνος. Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα και να δειχθεί ότι είναι ανάλογη και αντίθετη της ταχύτητας.

Λύση:

Σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton η δύναμη της τριβής είναι:

$$F = m\alpha = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\upsilon_o e^{-\lambda t}\right) = m\upsilon_o(-\lambda)e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad F_{(t)} = -m\upsilon_o \lambda e^{-\lambda t}$$

Επειδή $\upsilon(t) = \upsilon_o e^{-\lambda t}$ τελικά προκύπτει:

$$F_{(t)} = -m\lambda\upsilon(t)$$

Άσκηση 4η

Ένα αυτοκίνητο μάζας m κινείται ευθύγραμμα με σταθερή ταχύτητα υ_o όταν κάποια στιγμή σβήνει η μηχανή του και αρχίζει να επιβραδύνεται υπό την επίδραση δύναμης αντίστασης που υπακούει στη σχέση:

$$F = -c\upsilon^2$$

όπου c θετική σταθερά και υ το μέτρο της ταχύτητας. Να υπολογιστούν:

α. Η ταχύτητα του αυτοκινήτου ως συνάρτηση του χρόνου και

β. ως συνάρτηση του διαστήματος s που έχει διανύσει το αυτοκίνητο από τη στιγμή που σβήνει η μηχανή του $(t = 0)$, καθώς και

γ. το διάστημα s ως συνάρτηση του χρόνου.

Λύση:

α. Παρατηρούμε ότι:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad -c\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{c}{m}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\upsilon}\Big|_{\upsilon_o}^{\upsilon} = -\frac{c}{m}t \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\upsilon} - \frac{1}{\upsilon_o} = \frac{c}{m}t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon_o} + \frac{c}{m}t = \frac{m + c\upsilon_o t}{m\upsilon_o} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t) = \frac{m\upsilon_o}{m + c\upsilon_o t}} \quad (1)$$

β. Με εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας προκύπτει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad -c\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d\upsilon}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad -c\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{ds}\upsilon \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{c}{m}\int_0^s ds \quad \Rightarrow \quad \ell n\frac{\upsilon}{\upsilon_o} = -\frac{c}{m}s \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon}{\upsilon_o} = e^{-\frac{c}{m}s} \quad \Rightarrow$$

γ. Από τον ορισμό της ταχύτητας προκύπτει:

$$\upsilon(t) = \frac{ds}{dt} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{m\upsilon_o}{m + c\upsilon_o t} = \frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^s ds = m\upsilon_o\int_0^t \frac{dt}{m + c\upsilon_o t} \quad \Rightarrow$$

$$s = \frac{m\upsilon_o}{c\upsilon_o}\ell n(m + c\upsilon_o t)\Big|_0^t = \frac{m}{c}\ell n\left(\frac{m + c\upsilon_o t}{m}\right) \quad \Rightarrow \quad s(t) = \frac{m}{c}\ell n\left(1 + \frac{c\upsilon_o t}{m}\right)$$

Άσκηση 5η

Μια σφαίρα μάζας m προσκρούει κάθετα σε ακλόνητα στερεωμένη ξύλινη δοκό πάχους d με ταχύτητα υ_o και τη διαπερνά. Αν η δύναμη τριβής στο εσωτερικό της δοκού είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, δηλαδή $F = -k\upsilon^2$, να υπολογιστούν:

α. Η ταχύτητα της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου t και

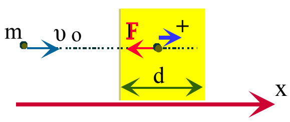
β. ως συνάρτηση της απόστασης x

γ. η θέση του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου

δ. ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται η σφαίρα να περάσει μέσα από τη δοκό και η ταχύτητα της σφαίρας στην έξοδο.

Λύση:

α. Κατά την κίνηση της σφαίρας στο εσωτερικό της δοκού, ο 2ος νόμος του Newton δίνει:



$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad -k\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\upsilon}\Big|_{\upsilon_o}^{\upsilon} = -\frac{k}{m}t \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\upsilon} - \frac{1}{\upsilon_o} = \frac{k}{m}t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon_o} + \frac{k}{m}t = \frac{m + k\upsilon_o t}{m\upsilon_o} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(t) = \frac{m\upsilon_o}{m + k\upsilon_o t}} \quad (1)$$

β. Παρατηρούμε ότι:

$$\boxed{\upsilon}$$

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad -k\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad -k\upsilon^2 = m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{k}{m}\int_0^x dx \quad \Rightarrow \quad \ell n\frac{\upsilon}{\upsilon_o} = -\frac{k}{m}x \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon}{\upsilon_o} = e^{-\frac{k}{m}x} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon(x)=\upsilon_o e^{-\frac{k}{m}x}} \qquad (2)$$

γ. Παρατηρούμε ότι:

$$\upsilon(t)=\frac{dx}{dt} \overset{(1)}{\Rightarrow} \int_0^x dx = m\upsilon_o\int_0^t \frac{dt}{m+k\upsilon_o t} \Rightarrow x=\frac{m\upsilon_o}{k\upsilon_o}\ell n\left(m+k\upsilon_o t\right)\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t)=\frac{m}{k}\ell n\left(\frac{m+k\upsilon_o t}{m}\right)} \qquad (3)$$

δ. Η σχέση (3) για $x=d$ δίνει τον ολικό χρόνο κίνησης $t_{ολ}$ ως:

$$d=\frac{m}{k}\ell n\left(\frac{m+k\upsilon_o t_{ολ}}{m}\right) \Rightarrow \ell n\left(1+\frac{k\upsilon_o}{m}t_{ολ}\right)=\frac{k}{m}d \Rightarrow 1+\frac{k\upsilon_o}{m}t_{ολ}=e^{\frac{k}{m}d} \Rightarrow$$

$$\boxed{t_{ολ}=\frac{m}{k\upsilon_o}\left(e^{\frac{k}{m}d}-1\right)}$$

Ενώ η (2) για $x=d$ δίνει την ταχύτητα εξόδου ως:

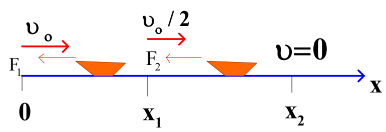
$$\boxed{\upsilon_{εξ}=\upsilon_o e^{-\frac{k}{m}d}}$$

Άσκηση 6η

Μια βενζινάκατος μάζας m κινείται σε ευθεία γραμμή με ταχύτητα υ_o. Κάποια στιγμή η μηχανή σβήνει. Αρχικά η δύναμη αντίστασης του νερού είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας, δηλαδή $F_1=-k\upsilon^2$. Όταν η ταχύτητα μειωθεί κάτω από $\upsilon_0/2$, τότε η δύναμη αντίστασης του νερού γίνεται ανάλογη της ταχύτητας, δηλαδή $F_2=-\lambda\upsilon$. Να υπολογιστεί το συνολικό διάστημα που θα διανύσει η βενζινάκατος μέσα στο νερό ώσπου να σταματήσει.

Λύση:

Το διάστημα x_1 που διανύει η βενζινάκατος μέχρι να υποδιπλασιαστεί η ταχύτητα της είναι:



$$F_1=m\alpha \Rightarrow -k\upsilon^2=m\frac{d\upsilon}{dt}=m\frac{d\upsilon}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$-k\upsilon^2=m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \Rightarrow \int_0^{x_1}dx=-\frac{m}{k}\int_{\upsilon_o}^{\upsilon_o/2}\frac{d\upsilon}{\upsilon} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ell n1=0}$$

$$x_1=-\frac{m}{k}\ell n\upsilon\Big|_{\upsilon_o}^{\upsilon_o/2}=-\frac{m}{k}\ell n\left(\frac{\upsilon_o/2}{\upsilon_o}\right)=-\frac{m}{k}\ell n\frac{1}{2}=-\frac{m}{k}(\ell n1-\ell n2) \Rightarrow$$

$$\boxed{x_1=\frac{m}{k}\ell n2} \qquad (1)$$

Ενώ το ολικό διάστημα x_2 που διανύει η βενζινάκατος μέχρι να σταματήσει είναι:

$$F_2 = m\alpha \quad \Rightarrow \quad -\lambda\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d\upsilon}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\lambda\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \quad \Rightarrow$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = -\frac{m}{\lambda}\int_{\upsilon_o/2}^{0} d\upsilon \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 = -\frac{m}{\lambda}\left(-\frac{\upsilon_o}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1 + \frac{m\upsilon_o}{2\lambda} \quad \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

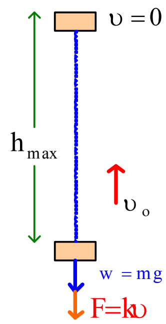
$$\boxed{x_2 = \frac{m}{k}\ell n2 + \frac{m\upsilon_o}{2\lambda}}$$

Άσκηση 7η

Ένα αντικείμενο βάρους w εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα υ_o. Αν θεωρήσουμε ότι η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας και η σταθερά αναλογίας είναι k, να υπολογίσετε σε πόσο χρόνο θα φτάσει στο μέγιστο ύψος.

(Εξετάσεις ΦΥΕ 14 Ιούλιος 2004)

Λύση:



Στο μέγιστο ύψος h_{max} το σώμα σταματά ακαριαία $(\upsilon = 0)$ και ο $2^{ος}$ νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad -mg - k\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad dt = m\frac{d\upsilon}{-mg - k\upsilon} \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^t dt = -m\int_{\upsilon_o}^{0}\frac{d\upsilon}{mg + k\upsilon} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{m}{k}\ell n(mg + k\upsilon)\Big|_{\upsilon_o}^{0} = -\frac{m}{k}\ell n\left(\frac{mg}{mg + k\upsilon_o}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{m}{k}\ell n\left(\frac{mg + k\upsilon_o}{mg}\right)}$$

3.1 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΡΙΒΗΣ

Η τριβή διακρίνεται σε:

- Κινητική τριβή: $T_k = n_k N$
- Στατική τριβή: $0 \le T_s \le n_s N$

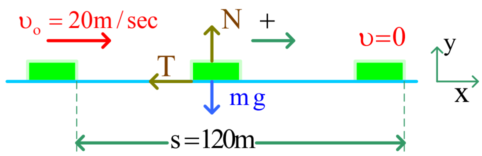
Βλέπε: ΦΥΣΙΚΗ Ι – ΜΗΧΑΝΙΚΗ Π.Φ. ΜΟΙΡΑ σελ. 61

3.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1$^{\eta}$

Σε μια παγωμένη λίμνη κάποιος χτυπά ένα δίσκο και του δίνει αρχική ταχύτητα $20\text{m}/\sec$. Βρείτε τον συντελεστή ολισθήσεως ανάμεσα στο δίσκο και στον πάγο αν ξέρετε ότι ο δίσκος ολίσθησε συνολικά 120m προτού σταματήσει. Δίνεται: $g = 9,8\text{m}/\sec^2$.

Λύση: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο είναι το βάρος του mg, η κάθετη αντίδραση N και η τριβή T, η οποία τον επιβραδύνει.



Λόγω ισορροπίας στον άξονα y ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \quad (1)$$

Άρα η τριβή είναι:

$$T = \mu N \overset{(1)}{\Rightarrow} T = \mu mg \quad (2)$$

Ο 2^{ος} νόμος του Newton στον άξονα της κίνησης x δίνει:

$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad -T = m\alpha \overset{(2)}{\Rightarrow} -\mu mg = m\frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$-\mu g = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \quad \boxed{\upsilon} \quad \Rightarrow$$

$$-\mu g = \frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \quad \Rightarrow \quad \int_{\upsilon_o}^{0} \upsilon d\upsilon = -\mu g \int_0^s dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{\upsilon_o^2}{2} = -\mu g s \quad \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{\upsilon_o^2}{2gs} \quad \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{20^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 120} = \frac{400}{2352} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = 0,17}$$

Άσκηση 2η

Σώμα εκτοξεύεται ως προς την κλίση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας $\phi = 45^o$ και με ταχύτητα $\upsilon_o = 15 m/sec$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu = 0,8$ να υπολογιστούν:

α. Το διάστημα s, που θα διανύσει το σώμα ανεβαίνοντας.

β. Το μέτρο της ταχύτητας υ με την οποία θα διέλθει το σώμα από το σημείο βολής.

Δίνονται: $g = 10 m/sec^2$ και ο συντελεστής στατικής τριβής $\mu_s = 0,9$.

Λύση:

α. Κατά την ανάβαση του σώματος οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό φαίνονται στο σχήμα. Λόγω ισορροπίας στον άξονα y ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - mg\cos\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\phi \quad (1)$$

Οπότε η τριβή είναι:

$$T = \mu N \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad T = \mu mg\cos\phi \quad (2)$$

Ενώ ο 2ος του Newton στον άξονα x δίνει:

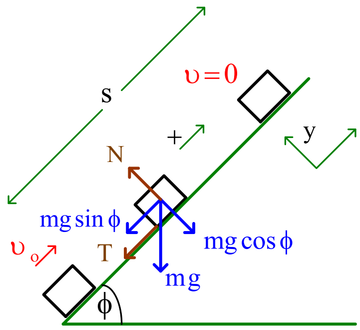
$$\Sigma \vec{F}_x = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad -mg\sin\phi - T = m\alpha \quad \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$-mg\sin\phi - \mu mg\cos\phi = m\frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$-g\sin\phi - \mu g\cos\phi = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$-10\cdot\sin 45^o - 0,8\cdot 10\cdot\cos 45^o = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$-10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad -18\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow$$

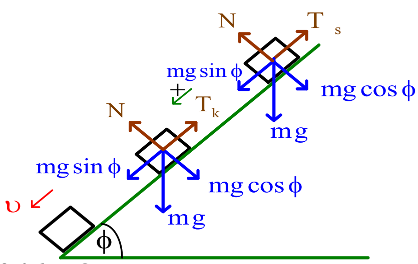


$$-9\sqrt{2} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon}$$

$$\int_{\upsilon_o}^{0} \upsilon d\upsilon = -9\sqrt{2}\int_0^s dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{\upsilon_o^{\ 2}}{2} = -9\sqrt{2}\cdot s \quad \Rightarrow$$

$$s = \frac{\upsilon_o^{\ 2}}{18\sqrt{2}} = \frac{15^2}{18\sqrt{2}} = \frac{225}{18\sqrt{2}} = \frac{12,5}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = 8,86\ m}$$

β. Όταν το σώμα έχει φτάσει στο ανώτατο σημείο και έχει σταματήσει, οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό είναι το βάρος του mg (αναλύεται στις γνωστές κάθετες συνιστώσες $mg\sin\phi$ και $mg\cos\phi$), η κάθετη αντίδραση N και η δύναμη



στατικής τριβής T_s. Επομένως θα πρέπει να εξεταστεί αν το σώμα τελικά θα κινηθεί προς τα κάτω και αυτό γίνεται συγκρίνοντας τις δυνάμεις στον άξονα x. Δηλαδή αν $mg\sin\phi > T_s$ τότε το σώμα θα κινηθεί προς τα κάτω, ειδάλλως θα ακινητεί. Είναι:

$$mg\sin\phi = m10\frac{\sqrt{2}}{2} = 5m\sqrt{2}$$

και

$$T_s = \mu_s N = \mu_s mg\cdot\cos\phi = 0{,}9\cdot m\cdot 10\frac{\sqrt{2}}{2} = 4{,}5\cdot m\sqrt{2}$$

Άρα $T_s < mg\cdot\sin\phi$ και επομένως το σώμα κινείται προς τα κάτω. Κατά τη διάρκεια της κίνησης η τριβή ανάγεται σε κινητική τριβή και ο $2^{ος}$ νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha} \quad\Rightarrow\quad mg\cdot\sin\phi - T_k = m\alpha \quad\Rightarrow$$

$$mg\cdot\sin\phi - \mu mg\cdot\cos\phi = m\alpha \quad\Rightarrow$$

$$10\frac{\sqrt{2}}{2} - 8\frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha \quad\Rightarrow\quad \sqrt{2} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} \quad\Rightarrow$$

υ

$$\int_0^{\upsilon}\upsilon d\upsilon = \sqrt{2}\int_0^{s}dx \quad\Rightarrow\quad \frac{\upsilon^2}{2} = \sqrt{2}\cdot s \quad\Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = 2\sqrt{2}\cdot s = 2\sqrt{2}\cdot 8{,}86 \approx 25 \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = 5m/\sec}$$

Άσκηση $3^η$

Σώμα μάζας $m = 11kgr$ κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή που το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_1 = 10m/\sec$, κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ πιέζει το σώμα προς τα κάτω. Το μέτρο της $\vec{F}$ μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $F = 10 - 5t$. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $n = 0{,}2$ να βρείτε την ταχύτητα που θα έχει το σώμα τη χρονική στιγμή που μηδενίζεται η δύναμη. Δίνεται $g = 10m/\sec^2$.

Λύση: Η δύναμη F μηδενίζεται τη χρονική στιγμή:

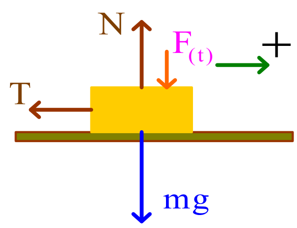
$$F = 0 \quad\Rightarrow\quad 10 - 5t = 0 \quad\Rightarrow\quad t = 2\sec$$

Λόγω ισορροπίας στον άξονα y ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad\Rightarrow\quad N - F_{(t)} - mg = 0 \quad\Rightarrow$$

$$N = F_{(t)} + mg = 10 - 5t + 11\cdot 10 \quad\Rightarrow$$

$$N = 120 - 5t \quad (1)$$



Οπότε το μέτρο της τριβής είναι:

$$T = nN \overset{(1)}{\Rightarrow} T = 0,2\cdot(120-5t) \Rightarrow T = 24 - t \quad (2)$$

Άρα μελετώντας την κίνηση του σώματος στο χρονικό διάστημα από $t=0$ έως $t = 2\,\text{sec}$, ο $2^{ος}$ νόμος του Newton στον άξονα κίνησης x δίνει:

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha} \Rightarrow -T = m\frac{d\upsilon}{dt} \overset{(2)}{\Rightarrow} -(24-t) = 11\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow$$

$$-\int_0^2 (24-t)dt = 11\int_{\upsilon_1=10m/sec}^{\upsilon} d\upsilon \Rightarrow -\left[24t - \frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 11(\upsilon - 10) \Rightarrow$$

$$-48 + \frac{4}{2} = 11(\upsilon-10) \Rightarrow -46 = 11(\upsilon - 10) \Rightarrow$$

$$\upsilon = 10 - \frac{46}{11} = 10 - 4,18 \Rightarrow$$

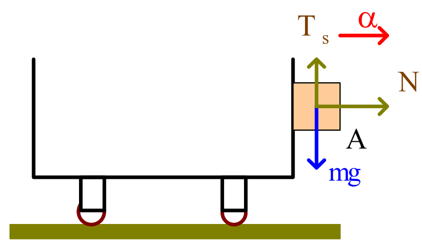
$$\boxed{\upsilon = 5,82\,m/sec}$$

Άσκηση 4η

Ποια είναι η ελάχιστη επιτάχυνση με την οποία πρέπει να κινείται το καροτσάκι του σχήματος έτσι ώστε το σώμα Α να παραμένει προσκολλημένο στη μπροστινή επιφάνεια του;

Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ επιφάνειας καροτσιού και σώματος είναι n.

Λύση:



Για την κίνηση του σώματος Α προς τα δεξιά ο $2^{ος}$ νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{\alpha} \Rightarrow N = m\alpha \quad (1)$$

Για να παραμένει προσκολλημένο το σώμα στη μπροστινή επιφάνεια του καροτσιού πρέπει να ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_s = mg \quad (2)$$

Αλλά:

$$T_s \le nN \overset{(1)}{\Rightarrow} T_s \le n\cdot m\cdot\alpha \overset{(2)}{\Rightarrow} mg \le n\cdot m\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha \ge \frac{g}{n}}$$

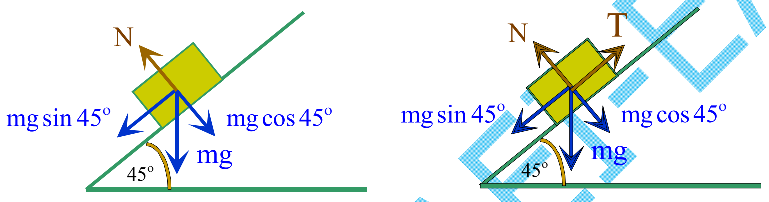
Δηλαδή:

$$\boxed{\alpha_{min} = \frac{g}{n}}$$

Άσκηση 5η

Ένα σώμα χρειάζεται διπλάσια ώρα για να ολισθήσει πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας 45^{o} παρά σε ένα εντελώς λείο κεκλιμένο επίπεδο της ίδιας γωνίας. Ποιος είναι ο συντελεστής κινητικής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου;

Λύση:



Χωρί τριβή   Με τριβή

Έστω ότι ℓ είναι το ολικό μήκος του κεκλιμένου επιπέδου. Θα υπολογιστούν οι χρόνοι t και t_1 που κάνει το σώμα να διανύσει το μήκος αυτό χωρίς και με τριβή αντίστοιχα.

➡ Χωρίς τριβή:

$$\Sigma F_x = m\alpha \quad \Rightarrow \quad mg\sin 45^o = m\frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad 5\sqrt{2} = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^{\upsilon} d\upsilon = 5\sqrt{2}\int_0^{t} dt \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 5\sqrt{2}t$$

και

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad 5\sqrt{2}\cdot t = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\ell} dx = 5\sqrt{2}\int_0^{t} tdt \quad \Rightarrow$$

$$\ell = 5\sqrt{2}\frac{t^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2\ell}{5\sqrt{2}}}}$$

⬅ Με τριβή:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma F_x = m\alpha \quad \Rightarrow \quad mg\sin 45^o - T = m\alpha \\ &\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos 45^o \quad \text{οπότε} \quad T = \mu N \quad \Rightarrow \quad T = \mu mg\cos 45^o \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow$$

$$mg\sin 45^o - \mu mg\cos 45^o = m\frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad 5\sqrt{2} - \mu 5\sqrt{2} = \frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^{\upsilon} d\upsilon = 5\sqrt{2}(1-\mu)\int_0^{t} dt \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 5\sqrt{2}(1-\mu)t$$

και

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad 5\sqrt{2}(1-\mu)t = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\ell} dx = 5\sqrt{2}(1-\mu)\int_0^{t_1} tdt \quad \Rightarrow$$

$$\ell = 5\sqrt{2}(1-\mu)\frac{t_1^{\,2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2\ell}{5\sqrt{2}(1-\mu)}}}$$

Αλλά είναι:

$$t_1 = 2t \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2\ell}{5\sqrt{2}(1-\mu)}} = 2\sqrt{\frac{2\ell}{5\sqrt{2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\ell}{5\sqrt{2}(1-\mu)} = 4\frac{2\ell}{5\sqrt{2}} \quad \Rightarrow$$

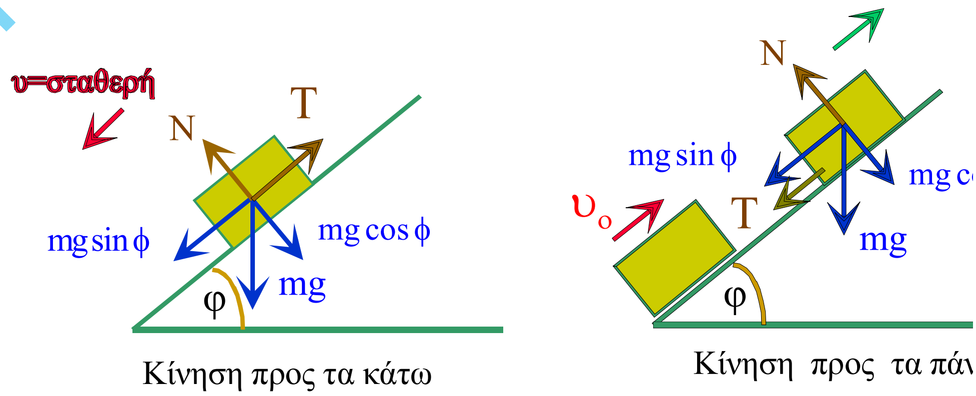
$$\frac{1}{1-\mu} = 4 \quad \Rightarrow \quad 1 = 4(1-\mu) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = 1-\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = 1-\frac{1}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mu = \frac{3}{4} = 0,75}$$

<u>Άσκηση 6η</u>

Ένας κύβος ολισθαίνει προς τα κάτω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης ϕ με σταθερή ταχύτητα. Ακολούθως εκτοξεύεται προς τα πάνω, στο ίδιο κεκλιμένο επίπεδο, με αρχική ταχύτητα υ_o. Πόσο πάνω θα ανέβει πριν ηρεμήσει; Θα ολισθήσει προς τα κάτω ξανά;

<u>Λύση:</u>



↓ Κίνηση προς τα κάτω:

Επειδή ο κύβος κινείται ισοταχώς (με σταθερή ταχύτητα) προς τα κάτω, η επιτάχυνση του είναι μηδέν, οπότε ο $2^{ος}$ νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma F_x = m\underbrace{\alpha}_{\boxed{\alpha = 0}} \quad \Rightarrow \quad mg\sin\phi - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = mg\sin\phi \qquad (1)$$

↑ Κίνηση προς τα πάνω:

Σύμφωνα με το $2^{ο}$ νόμο του Newton για την κίνηση του κύβου προς τα πάνω έχουμε:

$$\Sigma F_x = m\alpha \quad \Rightarrow \quad -mg\sin\phi - T = m\alpha \quad \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$-mg\sin\phi - mg\sin\phi = m\frac{d\upsilon}{dt} \quad \Rightarrow \quad -2g\sin\phi = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_o}^{0} \upsilon d\upsilon = -2g\sin\phi \int_0^x dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{\upsilon_o^{\ 2}}{2} = -2g\sin\phi\cdot x \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{\upsilon_o^{\ 2}}{4g\sin\phi}}$$

Για να εξεταστεί αν το σώμα ολισθήσει προς τα κάτω ξανά, θα πρέπει να συγκριθούν οι δυνάμεις που ασκούνται στο σημείο ηρεμίας του. Όπως έχει υπολογιστεί παραπάνω είναι:

$$T = mg\sin\phi \quad \Rightarrow \quad \Sigma F_x = 0$$

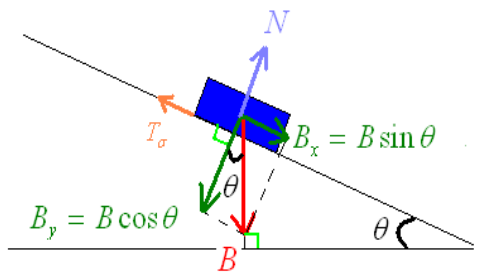
και επομένως ο κύβος θα ισορροπεί και δε θα ολισθήσει προς τα κάτω.

<u>Άσκηση 7η</u>

Υπολογείστε την μέγιστη γωνία θ κεκλιμένου επιπέδου πάνω στο οποίο μπορεί να ισορροπεί σώμα μάζας m. Ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μ_σ.

<u>Λύση:</u>

Αναλύουμε τις δυνάμεις σε άξονα παράλληλο (x) προς το κεκλιμένο επίπεδο και σε κάθετο σε αυτόν (y).



Ισορροπία στην y-διεύθυνση:

$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = N \Rightarrow N = mg\cos\theta$ (1)

Ισορροπία στην x-διεύθυνση:

$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x = F_T \Rightarrow mg\sin\theta = T_\sigma \le \mu_\sigma N$

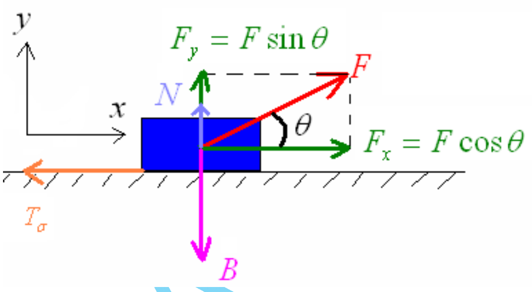
$\overset{(1)}{\Rightarrow} mg\sin\theta \le \mu_\sigma mg\cos\theta \Rightarrow \tan\theta \le \mu_\sigma$

Άρα: $\tan\theta_{max} = \mu_\sigma \Rightarrow \theta_{max} = \tan^{-1}\mu_\sigma$

Άσκηση 8η

Υπολογείστε το μέγιστο μέτρο της δύναμης F που μπορούμε να ασκήσουμε υπό συγκεκριμένη γωνία θ σε ένα σώμα μάζας m, ώστε αυτό να συνεχίσει να ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο που παρουσιάζει συντελεστή τριβής μ_σ με το σώμα.

Λύση:



Ισορροπία στην y-διεύθυνση:

$F_y + N = B \Rightarrow N = mg - F\sin\theta$

(1)

Ισορροπία στην x-διεύθυνση:

$F_x = T_\sigma \Rightarrow F\cos\theta = T_\sigma \le \mu_\sigma N$

$\overset{(1)}{\Rightarrow} F\cos\theta \le \mu_\sigma mg - \mu_\sigma F\sin\theta \Rightarrow$

$F\cos\theta + \mu_\sigma F\sin\theta \le \mu_\sigma mg \Rightarrow$

$$F \le \frac{\mu_\sigma mg}{\cos\theta + \mu_\sigma \sin\theta}$$

Άρα: $F_{max} = \dfrac{\mu_\sigma mg}{\cos\theta + \mu_\sigma \sin\theta}$

4.1 ΕΠΙΠΕΔΗ – ΧΩΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

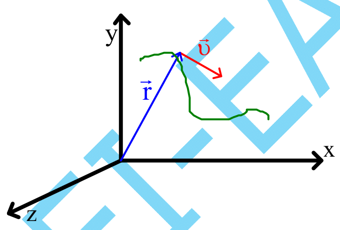
Για τον καθορισμό της θέσης ενός υλικού σημείου, όπως μάθαμε στα εισαγωγικά, χρησιμοποιούμε ένα ορθογώνιο (x, y) ή τρισορθογώνιο (x, y, z) σύστημα αναφοράς αν πρόκειται για επίπεδη ή χωρική κίνηση αντίστοιχα.

Δηλαδή η θέση του υλικού σημείου προσδιορίζεται από το **διάνυσμα θέσης:**

$$\vec{r} = x\cdot\hat{x} + y\cdot\hat{y} + z\cdot\hat{z}$$

Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} = \upsilon_x\hat{x} + \upsilon_y\hat{y} + \upsilon_z\hat{z}$$



και η επιτάχυνση του είναι:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\hat{x} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\hat{y} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\hat{z} = \alpha_x\hat{x} + \alpha_y\hat{y} + \alpha_z\hat{z}$$

Μέτρο ταχύτητας:

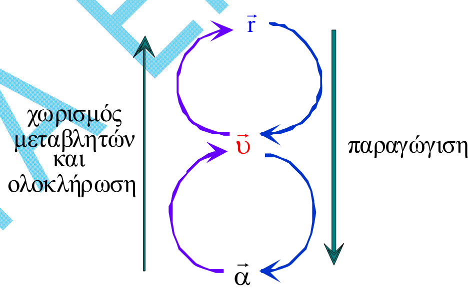
$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^{\ 2} + \upsilon_y^{\ 2} + \upsilon_z^{\ 2}}$$

Μέτρο επιτάχυνσης:

$$\alpha = |\vec{\alpha}| = \sqrt{\alpha_x^{\ 2} + \alpha_y^{\ 2} + \alpha_z^{\ 2}}$$

Αντίστοιχα, όπως έγινε και στην ευθύγραμμη κίνηση, μπορούμε από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ μέσω παραγώγισης να υπολογίσουμε διαδοχικά τα διανύσματα ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ και επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$. Ενώ αντίστροφα από το διάνυσμα επιτάχυνσης, μέσω ολοκλήρωσης μπορούμε να υπολογίσουμε τα διανύσματα ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ και θέσης $\vec{r}$.

Σχηματικά η διαδικασία αυτή είναι:



Παράδειγμα 1:

Έστω:

$$\vec{r}_{(t)} = 2(t-1)^2\hat{x} + 2\cos 3t\hat{y} - 2e^{-4t}\hat{z}$$

Είναι:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4(t-1)\hat{x} - 6\sin 3t\hat{y} + 8e^{-4t}\hat{z}$$

και

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 4\hat{x} - 18\cos 3t\hat{y} - 32e^{-4t}\hat{z}$$

Προσοχή!!!: Να μην ξεχνιούνται τα μοναδιαία διανύσματα, δεν παραγωγίζονται αφού είναι σταθερά, αλλά υποδηλώνουν το διανυσματικό χαρακτήρα των μεγεθών.

Παράδειγμα 2:

Η επιτάχυνση ενός σώματος είναι:

$$\vec{\alpha} = 2t^2\hat{x} - 5\hat{y} + 6(t+1)\hat{z}$$

Αν για $t=0$ είναι $\vec{r}_o = 0$ και $\vec{\upsilon}_o = 0$ να βρεθούν τα διανύσματα ταχύτητας και θέσης.

Λύση:

Είναι:

$$\alpha_x = 2t^2, \quad \alpha_y = -5, \quad \alpha_z = 6(t+1)$$

Οπότε:

$$\alpha_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\upsilon_x} d\upsilon_x = 2\int_0^t t^2 dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_x = \frac{2}{3}t^3}$$

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x dx = \frac{2}{3}\int_0^t t^3 dt \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}\cdot\frac{t^4}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{t^4}{6}}$$

$$\alpha_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\upsilon_y} d\upsilon_y = -5\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_y = -5t}$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^y dy = -5\int_0^t t dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{5}{2}t^2}$$

$$\alpha_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\upsilon_z} d\upsilon_z = 6\int_0^t (t+1)dt \quad \Rightarrow \quad \upsilon_z = 6\left(\frac{t^2}{2} + t\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_z = 3t^2 + 6t}$$

$$\upsilon_z = \frac{dz}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^z dz = \int_0^t (3t^2 + 6t)dt \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3t^3}{3} + \frac{6t^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{z = t^3 + 3t^2}$$

Άρα:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\hat{x} + \upsilon_y\hat{y} + \upsilon_z\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon} = \frac{2}{3}t^3\hat{x} - 5t\hat{y} + (3t^2 + 6t)\hat{z}$$

και

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \frac{t^4}{6}\hat{x} - \frac{5}{2}t^2\hat{y} + (t^3 + 3t^2)\hat{z}$$

4.2 Εξίσωση τροχιάς

Όταν ένα σωματίδιο κινείται στο επίπεδο μπορεί να μας ζητηθεί να βρούμε την εξίσωση τροχιάς του, δηλαδή τη μορφή της καμπύλης πάνω στην οποία κινείται. Επειδή από τα μαθηματικά γνωρίζουμε ότι κάθε καμπύλη στο επίπεδο είναι μια συνάρτηση της μορφής $y = y(x)$ [π.χ. $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$: παραβολή, $x^2 + y^2 = R^2$: κύκλος, $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$: έλλειψη κ.λ.π.], για την εξαγωγή της εξίσωσης τροχιάς αρκεί να βρεθεί η συνάρτηση $y = y(x)$. Αυτό γίνεται από τις εξισώσεις συντεταγμένων θέσης – χρόνου με απαλοιφή του χρόνου.

➤ **Παράδειγμα 1:**

Έστω $\vec{r} = 2t\hat{x} - 5t^2\hat{y}$ το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου. Να βρεθεί η εξίσωση τροχιάς του.

Λύση: Είναι:

$$x = 2t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$y = -5t^2 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad y = -5\left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{5}{4}x^2}$$

παραβολή με τα κοίλα προς τα κάτω (αφού $\alpha = -\frac{5}{4} < 0$)

➤ **Παράδειγμα 2:**

Έστω $\vec{r} = 2\cos 3t\hat{x} + 5\sin 3t\hat{y}$ το διάνυσμα θέσης υλικού σημείου. Να βρεθεί η εξίσωση τροχιάς του.

Λύση: Είναι:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\cos 3t \quad \Rightarrow \quad \cos 3t = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 3t = \frac{x^2}{4} \\ y = 5\sin 3t \quad \Rightarrow \quad \sin 3t = \frac{y}{5} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 3t = \frac{y^2}{25} \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$$\cos^2 3t + \sin^2 3t = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1} \quad \text{έλλειψη}$$

Δηλαδή εδώ εκμεταλλευτήκαμε τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

4.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1η

Οι εξισώσεις των συντεταγμένων θέσης – χρόνου ενός σημείου είναι:

$$x = t^2 \quad \text{και} \quad y = t^4 - 2t^2 - 3$$

Να βρεθεί:

α. Η εξίσωση της τροχιάς.

β. Η ταχύτητα και η επιτάχυνσή του τη χρονική στιγμή $t = 1,5\,\text{sec}$

Λύση:

α. Απαλείφοντας το χρόνο από την $y(t)$ προκύπτει εύκολα η εξίσωση τροχιάς:

$$y = t^4 - 2t^2 - 3 \overset{x=t^2}{\Rightarrow} \boxed{y = x^2 - 2x - 3} \quad \text{παραβολή}$$

β. Είναι:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon}(t) = 2t\hat{x} + \left(4t^3 - 4t\right)\hat{y}$$

και

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha}(t) = 2\hat{x} + \left(12t^2 - 4\right)\hat{y}$$

Άρα για $t = 1,5\,\text{sec}$ είναι:

$$\vec{\upsilon}_{(t=1,5\text{sec})} = 2\cdot 1,5\hat{x} + \left(4\cdot 1,5^3 - 4\cdot 1,5\right)\hat{y} = 3\hat{x} + 7,5\hat{y}$$

και

$$\vec{\alpha}_{(t=1,5\text{sec})} = 2\hat{x} + \left(12\cdot 1,5^2 - 4\right)\hat{y} = 2\hat{x} + 23\hat{y}$$

Άσκηση 2η

Ένα σωμάτιο αρχικά βρίσκεται στην αρχή και έχει επιτάχυνση $\vec{\alpha} = 3\vec{j}\ \text{m/sec}^2$ και αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o = 5\vec{i}\ \text{m/sec}$. Βρείτε:

α. Το διάνυσμα θέσης και την ταχύτητα σε οποιοδήποτε χρόνο t.

β. Τις συντεταγμένες και την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 2\,\text{sec}$.

(Εξετάσεις ΦΥΕ 14 Ιούλιος 2004)

Λύση:

α. Είναι:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 3\vec{j} \Rightarrow \int_{\vec{\upsilon}_o=5\vec{i}}^{\vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon} = 3\vec{j}\int_0^t dt \Rightarrow \vec{\upsilon} - 5\vec{i} = 3t\vec{j} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\upsilon}_{(t)} = 5\vec{i} + 3t\vec{j}}$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \int_0^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \left(5\vec{i} + 3t\vec{j}\right)dt \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{r}_{(t)} = 5t\vec{i} + \frac{3}{2}t^2\vec{j}}$$

β. Για $t = 2\,sec$ είναι:

$$x = 10m \quad \text{και} \quad y = 6m$$

και

$$\vec{\upsilon} = 5\vec{i} + 6\vec{j}\ m/sec$$

Άσκηση 3η

Ένα ψάρι κολυμπάει σε οριζόντιο επίπεδο και αρχικά $(\text{για } t = 0)$ έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o = \left(4\vec{i} + \vec{j}\right)\ m/sec$ σε ένα σημείο του ωκεανού του οποίου η απόσταση από έναν ορισμένο βράχο είναι $\vec{r}_o = \left(10\vec{i} - 4\vec{j}\right)\ m$. Αφού κολυμπήσει με σταθερή επιτάχυνση για $20\,sec$, η ταχύτητα του γίνεται $\vec{\upsilon} = \left(20\vec{i} - 5\vec{j}\right)\ m/sec$. Κατόπιν, για τα επόμενα 5 δευτερόλεπτα κινείται χωρίς επιτάχυνση.

α. Ποιες είναι οι συνιστώσες της επιτάχυνσης κατά τη διάρκεια των πρώτων 20 δευτερολέπτων;

β. Ποια είναι η κατεύθυνση αυτής της επιτάχυνσης σε σχέση με το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{i}$;

γ. Που βρίσκεται το ψάρι στο χρόνο $t = 25\,sec$;

(Εξετάσεις ΦΥΕ 14 Αύγουστος 2004)

Λύση:

α. Η σταθερή επιτάχυνση του ψαριού στα 20 πρώτα sec βρίσκεται από τον ορισμό της επιτάχυνσης, αφού γνωρίζουμε τα όρια της ταχύτητάς του και του χρόνου του. Δηλαδή:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{\vec{\upsilon}_o = 4\vec{i}+\vec{j}}^{\vec{\upsilon}=20\vec{i}-5\vec{j}} d\vec{\upsilon} = \vec{\alpha}\int_0^{t=20sec} dt \quad \Rightarrow \quad 20\vec{i} - 5\vec{j} - \left(4\vec{i} + \vec{j}\right) = 20\vec{\alpha} \quad \Rightarrow$$

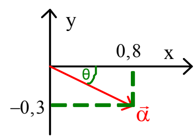
$$20\vec{\alpha} = 16\vec{i} - 6\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{\alpha} = \frac{16}{20}\vec{i} - \frac{6}{20}\vec{j} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\alpha} = 0,8\vec{i} - 0,3\vec{j}\ \left(m/sec^2\right)}$$

Άρα:

$$\alpha_x = 0,8\ m/sec^2 \quad \text{και} \quad \alpha_y = 0,3\ m/sec^2$$

β. Η κατεύθυνση του διανύσματος της επιτάχυνσης με τον άξονα x, δηλαδή η γωνία θ του σχήματος προσδιορίζεται τριγωνομετρικά ως:



$$\tan\theta = \frac{\alpha_y}{\alpha_x} = \frac{0,3}{0,8} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = 0,375 \quad \Rightarrow$$

$$\theta = \tan^{-1}(0,375) \quad \Rightarrow$$

$$\theta = 20,5^o$$

γ. Για να υπολογιστεί η θέση $\vec{r}$ του ψαριού τη χρονική στιγμή $t = 20\,sec$ πρέπει να βρούμε τη συνάρτηση της ταχύτητάς του στο χρονικό διάστημα από 0 έως $20\,sec$. Δηλαδή:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{\vec{\upsilon}_o = 4\vec{i}+\vec{j}}^{\vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon} = \int_0^t \left(0,8\vec{i} - 0,3\vec{j}\right)dt \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon} - \left(4\vec{i} + \vec{j}\right) = 0,8t\vec{i} - 0,3t\vec{j} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\upsilon}(t)=(4+0,8t)\vec{i}+(1-0,3t)\vec{j}}$$

Οπότε η θέση του συναρτήσει του χρόνου είναι:

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}\quad\Rightarrow\quad\int_{\vec{r}_o=10\vec{i}-4\vec{j}}^{\vec{r}}d\vec{r}=\int_0^t\left[(4+0,8t)\vec{i}+(1-0,3t)\vec{j}\right]dt\quad\Rightarrow$$

$$\vec{r}-\left(10\vec{i}-4\vec{j}\right)=\left(4t+0,8\frac{t^2}{2}\right)\vec{i}+\left(t-0,3\frac{t^2}{2}\right)\vec{j}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{r}(t)=\left(0,4t^2+4t+10\right)\vec{i}+\left(t-0,15t^2-4\right)\vec{j}}$$

Συνεπώς για $t=20\,sec$ είναι:

$$\vec{r}_{(t=20sec)}=(160+80+10)\vec{i}+(20-60-4)\vec{j}=250\vec{i}-44\vec{j}$$

Επειδή στα επόμενα $5\,sec$ το ψάρι κινείται χωρίς επιτάχυνση είναι:

$$\vec{\alpha}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=0\quad\Rightarrow\quad\vec{\upsilon}=\sigma\tau\alpha\theta.=\vec{\upsilon}_{(t=20sec)}\quad\Rightarrow\quad\vec{\upsilon}=20\vec{i}-5\vec{j}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

Άρα:

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt}\quad\Rightarrow\quad\int_{\vec{r}_{(t=20sec)}}^{\vec{r}_{(t=25sec)}}d\vec{r}=\left(20\vec{i}-5\vec{j}\right)\int_0^{5sec}dt\quad\Rightarrow$$

$$\vec{r}_{(t=25sec)}-\vec{r}_{(t=20sec)}=\left(20\vec{i}-5\vec{j}\right)\cdot5\quad\Rightarrow\quad\vec{r}_{(t=25sec)}-\left(250\vec{i}-44\vec{j}\right)=100\vec{i}-25\vec{j}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{r}_{(t=25sec)}=350\vec{i}-69\vec{j}\ \ m}$$

Άσκηση 4η

Μια μέλισσα βρίσκεται σε $t=0$ στην αρχή ενός συστήματος συντεταγμένων και πετάει με ταχύτητα $\vec{\upsilon}=(3,0,0)\ m/sec$ όταν βλέπει ένα λουλούδι στη θέση $\vec{r}=(1,0,2)\ m$ και θέλει να το φτάσει σε $2\,sec$. Υποθέτοντας ότι πετάει με σταθερή επιτάχυνση στο χρονικό διάστημα των $2\,sec$, πόση πρέπει να είναι η επιτάχυνσή της για να το φτάσει;

Λύση:

Επειδή η επιτάχυνση της μέλισσας είναι σταθερή, η ταχύτητα της θα είναι:

$$\vec{\alpha}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\quad\Rightarrow\quad\int_{\vec{\upsilon}_o=3\hat{x}}^{\vec{\upsilon}}d\vec{\upsilon}=\vec{\alpha}\int_0^t dt\quad\Rightarrow\quad\vec{\upsilon}-3\hat{x}=\vec{\alpha}t\quad\Rightarrow\quad\vec{\upsilon}_{(t)}=3\hat{x}+\vec{\alpha}t\quad(1)$$

οπότε από τον ορισμό της ταχύτητας προκύπτει:

$$\vec{\upsilon}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt} \overset{(1)}{\Rightarrow} 3\hat{x}+\vec{\alpha}t=\frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \int_{\vec{r}_o=0}^{\vec{r}=\hat{x}+2\hat{z}} d\vec{r}=\int_0^{t=2\sec}(3\hat{x}+\vec{\alpha}t)dt \Rightarrow$$

$$\hat{x}+2\hat{z}=3t\hat{x}+\vec{\alpha}\frac{t^2}{2}\Big|_0^2 \Rightarrow \hat{x}+2\hat{z}=6\hat{x}+2\vec{\alpha} \Rightarrow 2\vec{\alpha}=-5\hat{x}+2\hat{z} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\alpha}=-\frac{5}{2}\hat{x}+\hat{z}\ \ m/\sec^2}$$

Άσκηση 5η

Ένα σώμα κινείται πάνω στο επίπεδο xy και η επιτάχυνσή του έχει μόνο συνιστώσα x, την $\alpha_x=4m/\sec^2$. Τη στιγμή $t=0$ το σώμα ξεκινά από την αρχή των συντεταγμένων με αρχική ταχύτητα της οποίας η συνιστώσα x είναι $20m/\sec$ και η y συνιστώσα $-15m/\sec$.

α. Προσδιορίστε τις συνιστώσες της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, καθώς και το διάνυσμα της ταχύτητας για κάθε χρονική στιγμή.

β. Υπολογίστε την ταχύτητα του σώματος και το μέτρο της τη χρονική στιγμή $t=5\sec$.

γ. Προσδιορίστε τις συντεταγμένες x και y, για κάθε χρονική στιγμή t και το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης.

Λύση:

α. Είναι:

$$\alpha_x=\frac{d\upsilon_x}{dt} \Rightarrow \int_{20m/\sec}^{\upsilon_x} d\upsilon_x=4\int_0^t dt \Rightarrow \upsilon_x-20=4t \Rightarrow \upsilon_x=20+4t\ \ m/\sec$$

$$\alpha_y=\frac{d\upsilon_y}{dt} \Rightarrow 0=\frac{d\upsilon_y}{dt} \Rightarrow \int_{-15}^{\upsilon_y} d\upsilon_y=\int_0^t 0dt \Rightarrow \upsilon_y+15=0 \Rightarrow$$

$$\upsilon_y=-15\ \ m/\sec$$

Άρα το διάνυσμα της ταχύτητας είναι:

$$\vec{\upsilon}=\upsilon_x\hat{x}+\upsilon_y\hat{y} \Rightarrow \vec{\upsilon}_{(t)}=(20+4t)\hat{x}-15\hat{y}\ \ m/\sec \quad (1)$$

β. Για $t=5\sec$ η (1) δίνει:

$$\vec{\upsilon}_{(t=5\sec)}=(20+4\cdot5)\hat{x}-15\hat{y}=40\hat{x}-15\hat{y}$$

και το μέτρο της είναι:

$$\left|\vec{\upsilon}_{(t=5\sec)}\right|=\sqrt{40^2+(-15)^2}=\sqrt{1600+225}=\sqrt{1825}=42,72\ \ m/\sec$$

γ. Από τις συνιστώσες της ταχύτητας προκύπτει:

$$\upsilon_x=\frac{dx}{dt} \Rightarrow 20+4t=\frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx=\int_0^t(20+4t)dt \Rightarrow$$

$$x=20t+4\frac{t^2}{2} \Rightarrow x=20t+2t^2$$

και

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad -15 = \frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^y dy = -15\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad y = -15t$$

Άρα το διάνυσμα θέσης είναι:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \left(20t + 2t^2\right)\hat{x} - 15t\hat{y}$$

Άσκηση 6η

Το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου μεταβάλλεται χρονικά σύμφωνα με τη σχέση: $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j}$. Ποια είναι η εξίσωση τροχιάς του υλικού σημείου; Προσδιορίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του ως συναρτήσεις του χρόνου, καθώς επίσης τα μέτρα και τις αντίστοιχες διευθύνσεις τους.

Λύση:

Οι συνιστώσες της θέσης του σώματος γράφονται:

$x = t$ (1)

$y = t^2$ (2)

Απαλοίφοντας το χρόνο από τις (1) και (2) παίρνουμε την εξίσωση τροχιάς. Αντικαθιστούμε την (1) στη (2) και αμέσως έχουμε:

$y = x^2$, δηλαδή το υλικό σημείο ακολουθεί παραβολική τροχιά.

Παραγωγίζοντας χρονικά τις (1) και (2) παίρνουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας:

$\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt} = 1$ και $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt} = 2t$ ή διανυσματικά: $\vec{\upsilon}(t) = \hat{i} + 2t\hat{j}$

και παραγωγίζοντας χρονικά ξανά παίρνουμε τις συνιστώσες της επιτάχυνσης:

$a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = 0$ και $a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = 2$ ή διανυσματικά: $\vec{a}(t) = 2\hat{j}$

Το μέτρο της ταχύτητας είναι: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^{\ 2} + \upsilon_y^{\ 2}} = \sqrt{1^2 + (2t)^2} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{1 + 4t^2}$

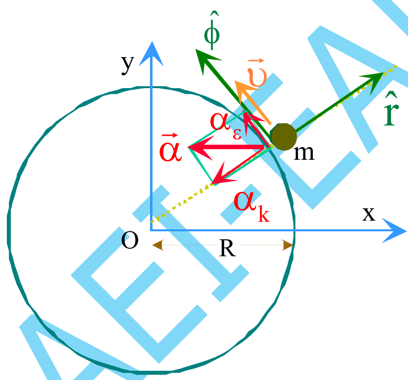
και η διεύθυνσή της δίνεται από τη γωνία: $\tan\theta = \dfrac{\upsilon_y}{\upsilon_x} = 2t \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2t)$

Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι: $a = \left|2\hat{j}\right| = 2$ και η κατεύθυνσή της ομόρροπη προς τον θετικό ημιάξονα των y.

5.1 ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Η κυκλική κίνηση είναι μια επίπεδη κίνηση, η εξίσωση τροχιάς της οποίας είναι κύκλος $\left(x^2+y^2=R^2\right)$.

Έστω ένα σώμα μάζας m, το οποίο κινείται στην κυκλική τροχιά του σχήματος. Τα κινητικά μεγέθη της ταχύτητας και της επιτάχυνσης φαίνονται στο σχήμα. Δηλαδή η ταχύτητα είναι εφαπτομενική στην τροχιά, ενώ η επιτάχυνση μπορεί να κείται, οπουδήποτε, στο εσωτερικό του κύκλου.



Τα δυο αυτά διανύσματα μπορούν να αναλυθούν ως προς το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y), αλλά δεν δίνουν περαιτέρω πληροφορίες. Για τον λόγο αυτό σε κάθε κυκλική κίνηση μας συμφέρει να αναλύουμε τα διανύσματα αυτά ως προς το πολικό σύστημα συντεταγμένων $\left(\hat{r},\hat{\phi}\right)$, όπου $\hat{r}$ η **ακτίνα διεύθυνσης** με θετική φορά προς τα έξω από τα κοίλα του κύκλου και $\hat{\phi}$ η **εφαπτομενική διεύθυνση** με θετική φορά τη φορά της ταχύτητας (όπως φαίνονται στο σχήμα).

Επομένως παρατηρείται ότι το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ βρίσκεται πάντα πάνω στην εφαπτομενική διεύθυνση, ενώ το διάνυσμα της επιτάχυνσης αναλύεται σε δυο συνιστώσες:

Την **κεντρομόλο επιτάχυνση** α_k στην ακτινική διεύθυνση και

την **επιτρόχιο επιτάχυνση** α_ε στην εφαπτομενική διεύθυνση.

Αποδεικνύεται ότι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι:

$$\boxed{\alpha_k=\frac{\upsilon^2}{R}}$$

Η φυσική της σημασία είναι ότι περιγράφει τη μεταβολή της διεύθυνσης (μόνο) της ταχύτητας, ενώ το μέτρο της επιτροχίου επιτάχυνσης είναι:

$$\boxed{\alpha_\varepsilon=\frac{d\upsilon}{dt}}$$

όπου $\upsilon=\left|\vec{\upsilon}\right|$ το μέτρο της ταχύτητας !! και η φυσική της σημασία είναι ότι περιγράφει τη μεταβολή του μέτρου (μόνο) της ταχύτητας.

▶ **Σημείωση:**

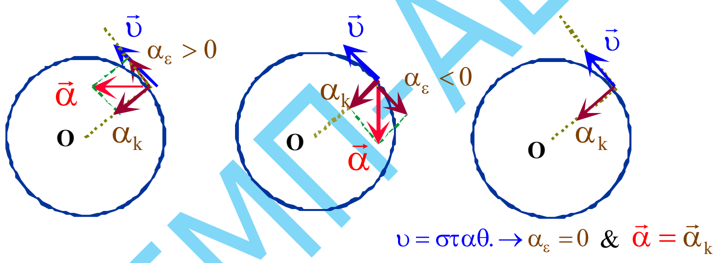
Το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ περιγράφει τη μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας, δηλαδή τη μεταβολή του μέτρου και της διεύθυνσης της ταχύτητας.

Άρα, όπως εύκολα γίνεται αντιληπτό, κάθε συνιστώσα της στο πολικό σύστημα $(\alpha_k, \alpha_\varepsilon)$ περιγράφει μια από τις μεταβολές.

▶ **Παρατήρηση:**

Επειδή σε κάθε κυκλική κίνηση η ταχύτητα αλλάζει διεύθυνση, θα υπάρχει πάντα η κεντρομόλος επιτάχυνση.

Ενώ αν το μέτρο της ταχύτητας αυξάνει είναι $\alpha_\varepsilon > 0$ (επιταχυνόμενη κίνηση) (σχήμα 1), αν το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται είναι $\alpha_\varepsilon < 0$ (επιβραδυνόμενη κίνηση) (σχήμα 2) και τέλος αν το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό, είναι $\alpha_\varepsilon = 0$ (ομαλή κυκλική κίνηση) (σχήμα 3).



Σχήμα 1 Σχήμα 2 Σχήμα 3

Υπενθυμίζουμε τις σχέσεις:

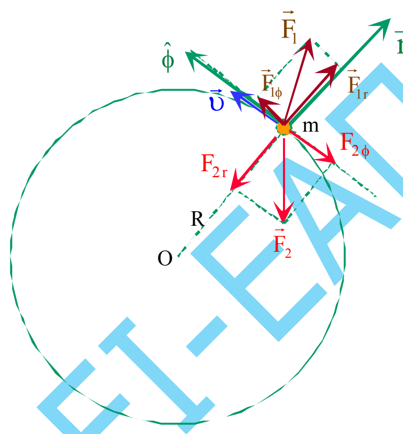
$$\upsilon = \omega R, \qquad \omega = 2\pi\nu, \qquad \nu = \frac{1}{T}$$

όπου ω η γωνιακή ταχύτητα, ν η συχνότητα και Τ η περίοδος. Η γωνιακή ταχύτητα ορίζεται ως:

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{z}}$$

όπου θ η γωνία της επιβατικής ακτίνας.

Δυναμική της κυκλικής κίνησης



Όπως κάθε κινούμενο σώμα, έτσι και ένα σώμα που εκτελεί κυκλική κίνηση υπόκειται στο 2^o νόμο του Newton. Αλλά επειδή στην κυκλική κίνηση η επιτάχυνση αναλύεται στο πολικό σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_k + \vec{\alpha}_\varepsilon$$

θα πρέπει να αναλυθούν και οι εφαρμοζόμενες δυνάμεις στο σώμα στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

Για παράδειγμα έστω ότι στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ του σχήματος. Τότε αυτές αναλυόμενες στο πολικό σύστημα έχουν τις συντεταγμένες F_{1r}, $F_{1\phi}$, F_{2r} και $F_{2\phi}$ (όπως φαίνεται στο σχήμα) και ο $2^{ος}$ νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{r}: & \Sigma F_r = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad F_{2r} - F_{1r} = m\dfrac{\upsilon^2}{R} \\ \hat{\phi}: & \Sigma F_\phi = m\alpha_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad F_{1\phi} - F_{2\phi} = m\dfrac{d\upsilon}{dt} \end{cases} \quad \hat{\phi}$$

Παρατήρηση: Η συνισταμένη των δυνάμεων στην ακτινική διεύθυνση λέγεται **κεντρομόλος δύναμη F_k** και προσέξτε ότι δεν είναι ένα νέο είδος δύναμης αλλά κάποιες δυνάμεις ή συνιστώσες τους, παίζουν το ρόλο αυτής σε κάποιο σώμα το οποίο κινείται κυκλικά. Επίσης προσέξτε ότι ως θετική φορά των ακτινικών δυνάμεων επιλέγεται αυτή που διευθύνεται προς το κέντρο, δηλαδή η διεύθυνση της κεντρομόλου επιτάχυνσης.

Η φυσική σημασία της F_k είναι όμοια με αυτή της α_k, δηλαδή περιγράφει τη μεταβολή της διεύθυνσης της ταχύτητας, γι' αυτό και είναι απαραίτητη πάντα η ύπαρξή της σε μια οποιαδήποτε κυκλική κίνηση. Αντίστοιχα για τις εφαπτομενικές συνιστώσες των δυνάμεων ως θετική φορά επιλέγεται η φορά της κίνησης (δηλαδή της ταχύτητας) και αυτές περιγράφουν τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας, όπως και η επιτρόχιος επιτάχυνση.

Σε μια ομαλή κυκλική κίνηση είναι $\alpha_\varepsilon = 0$ οπότε και οι εφαπτομενικές δυνάμεις μηδενίζονται.

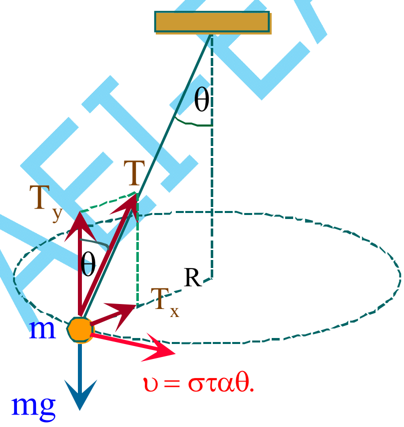
Μεθοδολογία: Σε κάθε άσκηση κυκλικής κίνησης θα πρέπει να γίνεται ανάλυση των δυνάμεων στο πολικό σύστημα συντεταγμένων και εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου Newton σε αυτό. Συνήθως εμείς θα χρησιμοποιούμε μόνο την κεντρομόλο δύναμη, αφού θα αναφερόμαστε σε προβλήματα ομαλής κυκλικής κίνησης.

5.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1η

Ένα μικρό σώμα μάζας m περιστρέφεται πάνω σε ένα οριζόντιο κύκλο με σταθερή ταχύτητα στο άκρο ενός νήματος μήκους ℓ. Καθώς το σώμα κινείται το νήμα διαγράφει την επιφάνεια κώνου (κωνικό εκκρεμές). Βρείτε το χρόνο μιας πλήρους περιστροφής, συναρτήσει των ℓ και θ.

Λύση: Το σώμα κινείται υπό την επίδραση του βάρους του mg και της τάσης του νήματος T, η οποία αναλύεται στις συνιστώσες $T_x = T\sin\theta$ και $T_y = T\cos\theta$. Ο χρόνος μιας πλήρους περιστροφής ισούται με την περίοδο του σώματος και είναι:



$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1)$$

Λόγω ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα y ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_y - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos\theta = mg \quad (2)$$

Ενώ η συνιστώσα T_x παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης της κυκλικής τροχιάς του σώματος, δηλαδή:

$$T_x = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad T\cdot\sin\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R \quad (3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (3) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\omega^2 R}{g} \quad (4)$$

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο είναι:

$$\sin\theta = \frac{R}{\ell} \quad \Rightarrow \quad R = \ell\sin\theta$$

οπότε η (4) δίνει:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\omega^2}{g}\ell\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\theta}} \quad (5)$$

Άρα η (1) λόγω της (5) δίνει:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\theta}{g}}}$$

Άσκηση 2η

Ένα μικρό σώμα μάζας $m = 0,2kgr$ είναι δεμένο στο άκρο ενός αβαρούς νήματος μήκους $\ell = 1m$ και εξαναγκάζεται να διαγράφει έναν κατακόρυφο κύκλο.

α. Να υπολογιστεί η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του έτσι ώστε να κάνει ανακύκλωση, δηλαδή να διαγράφει έναν πλήρη κύκλο.

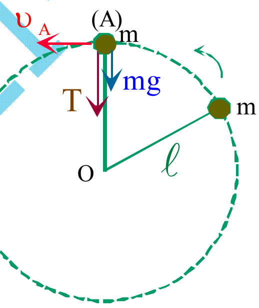
β. Να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του έτσι ώστε να μην κοπεί το νήμα, αν το όριο θραύσης του νήματος είναι:

$$T_{\theta\rho\alpha\acute{\upsilon}\sigma\eta\varsigma} = 10Nt$$

Δίνεται $g = 10\ m/sec^2$.

Λύση:

α. Στο ανώτατο σημείο της τροχιάς Α, οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος του mg και η τάση του νήματος T.



Όπως φαίνεται και στο σχήμα στο συγκεκριμένο σημείο οι δυο αυτές δυνάμεις παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή ισχύει:

$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad mg + T = m\frac{\upsilon_A^{\,2}}{\ell} \quad \Rightarrow$$

$$T = m\frac{\upsilon_A^{\,2}}{\ell} - mg \quad (1)$$

Αλλά πρέπει να ισχύει:

$$T \geq 0 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad m\frac{\upsilon_A^{\,2}}{\ell} - mg \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$m\frac{\upsilon_A^{\,2}}{\ell} \geq mg \quad \Rightarrow$$

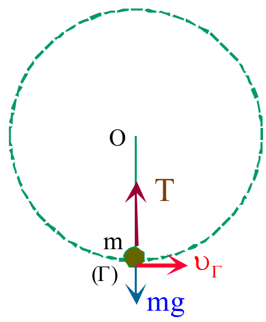
$$\upsilon_A^{\,2} \geq g\ell \quad \Rightarrow \quad \upsilon_A \geq \sqrt{g\ell} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_A \geq \sqrt{10}m/sec$$

Άρα:

$$\upsilon_{A_{min}} = \sqrt{g\ell}$$

και όπως φαίνεται από τα προηγούμενα αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου $T = 0$ στο σημείο Α.

β. Στο κατώτερο σημείο της τροχιάς Γ στο σώμα ασκείται το βάρος mg και η τάση του νήματος, όπως φαίνονται στο σχήμα. Η συνισταμένη τους παίζει πάλι το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Επομένως:



$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad T - mg = m\frac{\upsilon_\Gamma^{\,2}}{\ell} \quad \Rightarrow$$

$$T = m\frac{\upsilon_\Gamma^{\,2}}{\ell} + mg \quad (2)$$

Αλλά για να μην κοπεί το νήμα πρέπει να ισχύει:

$$T \leq T_{\theta\rho\alpha\acute{\upsilon}\sigma\eta\varsigma} \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad m\frac{\upsilon_\Gamma^{\,2}}{\ell} + mg \leq 10 \quad \Rightarrow$$

$$m\frac{\upsilon_\Gamma^{\,2}}{\ell} \leq 10 - mg \quad \Rightarrow$$

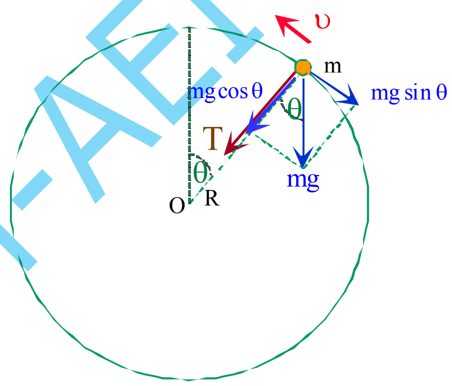
$$\upsilon_\Gamma^{\,2} \le \frac{10\ell}{m} - g\ell \quad \Rightarrow \quad \upsilon_\Gamma \le \sqrt{\frac{10\ell}{m} - g\ell} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_\Gamma \le \sqrt{\frac{10\cdot 1}{0,2} - 10\cdot 1} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_\Gamma \le \sqrt{50-10} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_\Gamma \le \sqrt{40}\,\mathrm{m/sec}$$

Άρα: $\upsilon_{\Gamma_{max}} = \sqrt{40}\,\mathrm{m/sec}$

Άσκηση 3η

Μια μικρή πέτρα μάζας m είναι δεμένη με νήμα μήκους R και περιστρέφεται κυκλικά σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ένα σταθερό σημείο O. Προσδιορίστε την τάση του νήματος τη στιγμή που το μέτρο της ταχύτητας της πέτρας είναι υ και το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο. Για ποια γωνία η τάση του νήματος είναι μέγιστη και για ποια ελάχιστη.



Λύση: Στη θέση αυτή της μάζας οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτή είναι η τάση του νήματος και το βάρος της mg, που αναλύεται στην ακτινική συνιστώσα $mg\cos\theta$ και την εφαπτομενική συνιστώσα $mg\sin\theta$. Παρατηρείται ότι η T και η $mg\cos\theta$ παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή:

$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad T + mg\cos\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow$$

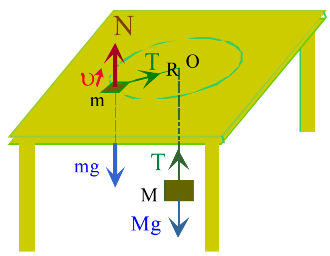
$$\boxed{T = m\frac{\upsilon^2}{R} - mg\cos\theta}$$

Όπως παρατηρείται από την τελευταία σχέση η τάση του νήματος γίνεται μέγιστη όταν $\cos\theta = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 180^o$, ενώ αυτή γίνεται ελάχιστη όταν $\cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0^o$ (επειδή $-1 \le \cos\theta \le 1$).

Άρα γίνεται μέγιστη η τάση στο κατώτερο σημείο της τροχιάς $\left(\theta = 180^o\right)$ ενώ γίνεται ελάχιστη στο ανώτερο σημείο της τροχιάς $\left(\theta = 0^o\right)$.

Άσκηση 4η

Μια μάζα m κινείται κυκλικά (ακτίνα R) σε λείο οριζόντιο τραπέζι και συνδέεται με νήμα με μια μάζα M, όπως στο σχήμα. Να προσδιοριστεί η ταχύτητα υ με την οποία πρέπει να περιστρέφεται η m έτσι ώστε η M να παραμένει ακίνητη.



Λύση: Στο σώμα M ασκείται το βάρος του Mg και η τάση του νήματος T. Επειδή αυτό ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = Mg \quad (1)$$

Στο σώμα m ασκείται το βάρος του mg, η κάθετη αντίδραση N από το τραπέζι και η τάση του νήματος T. Η T όμως παίζει το ρόλο της απαραίτητης κεντρομόλου δύναμης για την κυκλική κίνηση και ισχύει:

$$F_k = m\alpha_k \Rightarrow T = m\frac{\upsilon^2}{R} \overset{(1)}{\Rightarrow} Mg = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{MgR}{m} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{MgR}{m}}}$$

Άσκηση 5η

Ένα σώμα μάζας $m = 0,8kgr$ περιστρέφεται γύρω από μια κάθετη ράβδο με τη βοήθεια δυο νημάτων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα νήματα συνδέονται με τη ράβδο μέσω συνδέσμων χωρίς τριβές. Το μήκος κάθε νήματος είναι $\ell = 5m$, ενώ η απόσταση των δυο συνδέσμων είναι $d = 8m$. Αν η τάση του επάνω νήματος είναι $T_1 = 15Nt$ να βρείτε:

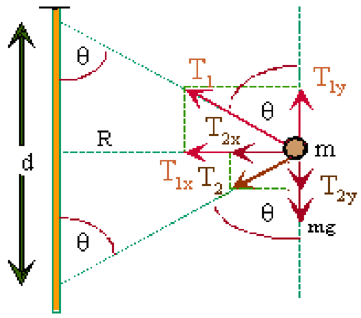
α. Τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος.

β. Τη τάση στο κάτω νήμα.

(Εξετάσεις ΦΥΕ 14 30-7-2005)

Λύση: Από την τριγωνομετρία του σχήματος είναι:

$$\sin\theta = \frac{R}{\ell} = \frac{\sqrt{\ell^2 - d^2/4}}{d} \Rightarrow \sin\theta = \frac{3}{5}$$



όπου:

$$R = \sqrt{\ell^2 - d^2/4} = \sqrt{5^2 - 8^2/4} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} \Rightarrow \boxed{R = 3m}$$

και

$$\cos\theta = \frac{d/2}{\ell} = \frac{8/2}{5} \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$$

Λόγω ισορροπίας στον άξονα y ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{1y} - T_{2y} - mg = 0 \Rightarrow T_1\cos\theta - T_2\cos\theta - mg = 0 \Rightarrow$$

$$T_2\cos\theta = T_1\cos\theta - mg \Rightarrow T_2 = T_1 - \frac{mg}{\cos\theta} = 15 - \frac{0,8\cdot 10}{4/5} = 15 - \frac{8\cdot 5}{4} = 15 - 10 \Rightarrow$$

$$\boxed{T_2 = 5Nt}$$

Ενώ οι συνιστώσες των τάσεων T_{1x} και T_{2x} παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, οπότε:

$$F_k = m\alpha_k \Rightarrow T_{1x} + T_{2x} = m\omega^2 R \Rightarrow T_1\sin\theta + T_2\sin\theta = m\omega^2 R \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(T_1 + T_2)\sin\theta}{mR}} = \sqrt{\frac{(15+5)\frac{3}{5}}{0,8\cdot 3}} = \sqrt{\frac{12}{2,4}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{5}\ \text{rad/sec}}$$

Άσκηση 6η

Σφαιρίδιο μάζας m είναι δεμένο με δυο νήματα από έναν κατακόρυφο άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όλο το σύστημα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα.

α. Υποθέτοντας ότι η ω είναι αρκετά μεγάλη για να κρατάει και τα δυο νήματα τεντωμένα, βρείτε τη δύναμη που ασκεί κάθε νήμα στο σφαιρίδιο σαν συνάρτηση των ω, m, g, R και θ.

β. Βρείτε την ελάχιστη γωνιακή ταχύτητα ω_{min} για την οποία το κάτω νήμα μόλις να παραμένει τεντωμένο.

Λύση:

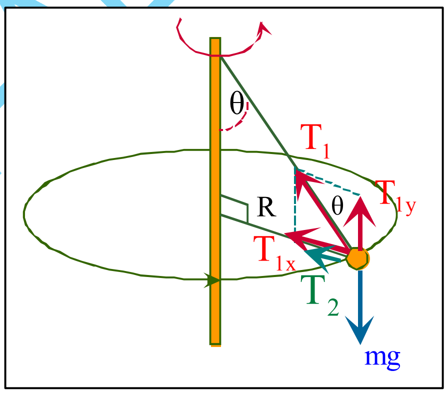
α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σφαιρίδιο είναι το βάρος του mg και οι τάσεις T_1 και T_2 από τα δυο νήματα.

Λόγω ισορροπίας στον άξονα y είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{1y} - mg = 0 \Rightarrow$$

$$T_1 \cos\theta = mg \Rightarrow$$

$$\boxed{T_1 = \frac{mg}{\cos\theta}} \quad (1)$$



Επίσης η T_{1x} και η T_2 παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου, οπότε:

$$F_k = m\alpha_k \Rightarrow T_{1x} + T_2 = m\omega^2 R \Rightarrow T_1 \sin\theta + T_2 = m\omega^2 R \Rightarrow$$

$$T_2 = m\omega^2 R - T_1 \sin\theta \overset{(1)}{\Rightarrow} T_2 = m\omega^2 R - \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{T_2 = m\omega^2 R - mg\tan\theta} \quad (2)$$

β. Για να παραμένει το κάτω νήμα τεντωμένο πρέπει να ισχύει:

$$T_2 \geq 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} m\omega^2 R - mg\tan\theta \geq 0 \Rightarrow m\omega^2 R \geq mg\tan\theta \Rightarrow$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g\tan\theta}{R}}$$

Άρα:

$$\boxed{\omega_{min} = \sqrt{\frac{g\tan\theta}{R}}}$$

Άσκηση 7η

Σώμα μάζας $m = 12kgr$ βρίσκεται πάνω σε λεία κωνική επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχήμα, η οποία περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 1rad/sec$. Υπολογίστε:

α. Τη γραμμική ταχύτητα του σώματος.
β. Την αντίδραση της επιφάνειας πάνω στο σώμα.
γ. Την τάση του νήματος.
δ. Τη γωνιακή ταχύτητα που απαιτείται για να γίνει η αντίδραση της επιφάνειας μηδέν.

Λύση:

α. Το σώμα, καθώς περιστρέφεται ο κώνος, εκτελεί κυκλική κίνηση με ακτίνα R και κέντρο Ο. Άρα η γραμμική ταχύτητα του σώματος σύμφωνα με τη σχέση της κυκλικής κίνησης είναι:

$$\upsilon = \omega R$$

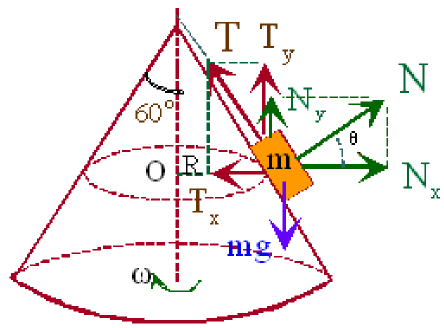
όπου από το σχήμα είναι:

$$\sin\theta = \frac{R}{\ell} \Rightarrow R = \ell\sin\theta = 1,5\sin 60^o = 1,5\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = 1,3m$$

Άρα:

$$\upsilon = 1\cdot 1,3\ m/sec \Rightarrow \boxed{\upsilon = 1,3\ m/sec}$$

β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος του mg, η τάση του νήματος T και η κάθετη αντίδραση N.



Αναλύοντας την τάση στις δυο κάθετες συνιστώσες της:

$$T_x = T\sin\theta,\ T_y = T\cos\theta$$

και την κάθετη αντίδραση στις:

$$N_x = N\cos\theta \text{ και } N_y = N\sin\theta$$

η συνθήκη ισορροπίας στον άξονα y δίνει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y + N_y - mg = 0$$

$$\Rightarrow T\cos\theta + N\sin\theta = mg \quad (1)$$

Ενώ η συνισταμένη των T_x και N_x παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή:

$$F_k = m\alpha_k \Rightarrow T_x - N_x = m\omega^2 R \Rightarrow T\sin\theta - N\cos\theta = m\omega^2 R \Rightarrow$$

$$T\sin 60^o = N\cos 60^o + 12\cdot 1^2\cdot 1,3 \Rightarrow T\frac{\sqrt{3}}{2} = N\frac{1}{2} + 15,6 \Rightarrow$$

$$T\sqrt{3} = N + 31,2 \Rightarrow T = \frac{N}{\sqrt{3}} + \frac{31,2}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Άρα η (1) λόγω της (2) δίνει:

$$\left(\frac{N}{\sqrt{3}} + \frac{31,2}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{2} + N\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\cdot 10 \Rightarrow \frac{N}{\sqrt{3}} + \frac{31,2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}N = 240 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)\cdot N = 240 - \frac{31,2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1+3}{\sqrt{3}}N = 240 - \frac{31,2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$4N = 240\sqrt{3} - 31,2 \quad \Rightarrow \quad 4N = 240\cdot 1,73 - 31,2 = 384,5 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{N = 96,1\ \text{Nt}}$$

γ. Άρα η (2) δίνει:

$$T = \frac{96,1+31,2}{1,732} = \frac{127,3}{1,732} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 73,5\ \text{Nt}}$$

δ. Για να γίνει η αντίδραση της επιφάνειας μηδέν $(N=0)$ η γωνιακή ταχύτητα θα είναι τέτοια ώστε η T_x μόνο να παίζει το ρόλο της κεντρομόλου. Δηλαδή:

$$T_x = m\omega^2 R \quad \Rightarrow \quad T\sin\theta = m\omega^2 R \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{T\sin\theta}{mR}}$$

και η (1) τώρα δίνει:

$$T\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad T = 240\ \text{Nt}$$

οπότε:

$$\omega = \sqrt{\frac{240\cdot 0,866}{12\cdot 1,3}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = 3,65\ \text{rad/sec}}$$

<u>Άσκηση 8η</u>

Σε ένα λούνα πάρκ υπάρχει ένας μεγάλος κατακόρυφος κύλινδρος ο οποίος περιστρέφεται αρκετά γρήγορα γύρω από τον άξονα του έτσι ώστε κάθε άτομο στο εσωτερικό του να στηρίζεται χωρίς να γλιστρά στο κυλινδρικό μέρος όταν το πάτωμα εξαφανίζεται. Βρείτε τη μέγιστη περίοδο περιστροφής ώστε ο άνθρωπος να μην πέφτει προς τα κάτω αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μ_s και η ακτίνα του κυλίνδρου R. Δίνεται η βαρυτική επιτάχυνση g.

(Εξετάσεις ΦΥΕ 14 Αύγουστος 2004)

<u>Λύση:</u> Οι δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο είναι το βάρος του mg, η δύναμη στατικής τριβής T_s μεταξύ ανθρώπου και τοιχώματος και η κάθετη αντίδραση N που ασκεί το τοίχωμα στον άνθρωπο, όπως φαίνονται στο σχήμα.

Η κάθετη αντίδραση παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης που απαιτείται για να κινείται ο άνθρωπος κυκλικά και είναι:

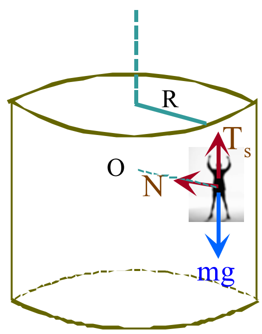
$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad N = m\omega^2 R \quad (1)$$

Ενώ επειδή ο άνθρωπος δεν κινείται κατακόρυφα, λόγω ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_s - mg = 0 \quad T_s = mg \quad (2)$$

Αλλά: $T_s \le \mu_s N$

οπότε η (2) δίνει:



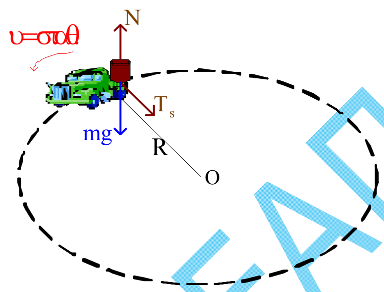
$$mg \le \mu_s N \overset{(1)}{\Rightarrow} mg \le \mu_s m\omega^2 R \Rightarrow \omega \ge \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}} \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}}$$

Άρα η μέγιστη περίοδος περιστροφής είναι:

$$T_{max} = \frac{2\pi}{\omega_{min}} \overset{(3)}{\Rightarrow} \boxed{T_{max} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu_s R}{g}}}$$

Άσκηση 9η

Κιβώτιο μάζας m βρίσκεται στο επίπεδο πάτωμα ενός φορτηγού που κινείται με σταθερή ταχύτητα υ και συγκρατείται στη θέση του από την τριβή. Το φορτηγό κινείται σε κυκλικό δρόμο, χωρίς κλίση, ακτίνας R. Βρείτε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιείται από το συντελεστή στατικής τριβής μ μεταξύ του κιβωτίου και του πατώματος του φορτηγού σαν συνάρτηση των υ, R και g.



Λύση: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο είναι το βάρος του mg, η κάθετη αντίδραση N και η στατική τριβή T_s.

Λόγω ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \quad (1)$$

Επίσης επειδή το φορτηγό κινείται με σταθερή ταχύτητα, δηλαδή το κιβώτιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, η στατική τριβή T_s παίζει εξ ολοκλήρου το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή:

$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad T_s = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad (2)$$

Αλλά:

$$T_s = \mu N \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad T_s = \mu mg \quad (3)$$

Άρα η (2) λόγω της (3) δίνει:

$$\mu mg = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{\upsilon^2}{gR}}$$

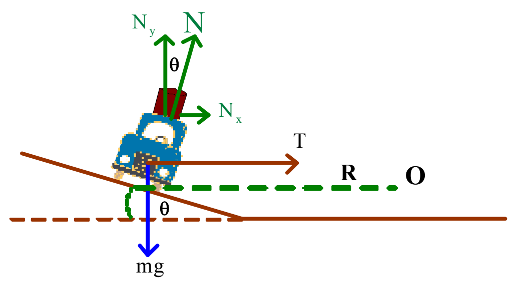
Άσκηση 10η

Αν ο δρόμος του προηγούμενου προβλήματος ήταν κεκλιμένος με γωνία κλίσης θ, να βρεθεί η σταθερή ταχύτητα υ του φορτηγού συναρτήσει των μ, R και θ.

Λύση: Στην περίπτωση του κεκλιμένου δρόμου η κάθετη αντίδραση N αναλύεται σε δυο κάθετες συνιστώσες, που είναι:

$N_x = N\sin\theta$ και $N_y = N\cos\theta$

Η ισορροπία στον άξονα y δίνει:



$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_y - mg = 0 \quad \Rightarrow$$

$$N\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{\cos\theta} \quad (1)$$

Ενώ τώρα η στατική τριβή T_s και η συνιστώσα N_x παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης έτσι ώστε:

$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad T_s + N_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow \quad T_s + N\sin\theta = \frac{m\upsilon^2}{R} \quad (2)$$

$$\mu N + N\sin\theta = \frac{m\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N(\mu+\sin\theta) = \frac{m\upsilon^2}{R} \quad \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{mg}{\cos\theta}(\mu+\sin\theta) = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow$$

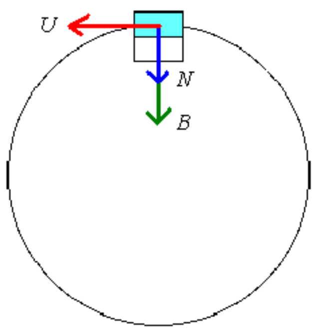
$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{gR}{\cos\theta}(\mu+\sin\theta)}}$$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση αυτή η N βοηθά την κυκλική κίνηση καθώς παρέχει με τη συνιστώσα της N_x στην κεντρομόλο δύναμη. Παρατηρείται ότι τώρα το κιβώτιο θα κινιόταν κυκλικά, ακόμη και αν το πάτωμα του φορτηγού δεν παρουσίαζε τριβή $(\mu = 0)$ και τότε θα ήταν $\upsilon = \sqrt{gR\tan\theta}$.

Άσκηση 11η

Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα περιστροφής ενός κουβά με μπογιά σε κυκλική κατακόρυφη τροχιά ακτίνας R ώστε να μη χυθεί το περιεχόμενό του.

Λύση



Το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης παίζουν το βάρος και η κάθετη αντίδραση από τη βάση του κουβά:

$$F_\kappa = B + N \Rightarrow m\frac{\upsilon^2}{R} = mg + N$$

Η οριακή περίπτωση στην οποία το νερό δε θα χυθεί έξω από τον κουβά είναι όταν θα θα χάνει σχεδόν την επαφή με τη βάση του κουβά, οπότε θα ακολουθεί κυκλική κίνηση με κεντρομόλο δύναμη το βάρος του (οριακά καμιά αντίδραση από τη βάση του κουβά).

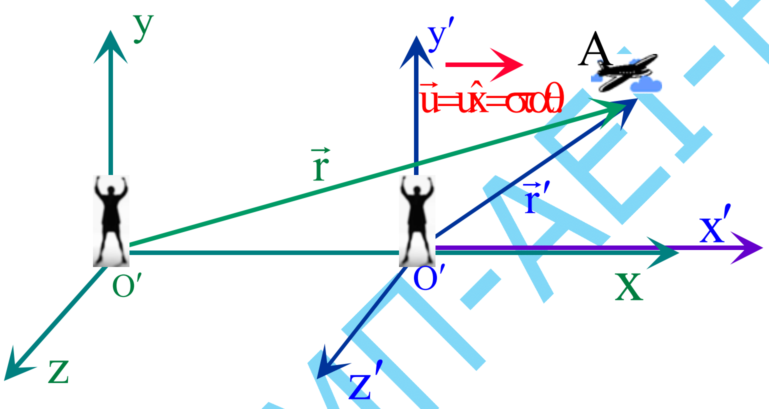
$$N = m\left(\frac{\upsilon^2}{R} - g\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{R} \geq g \Rightarrow \upsilon \geq \sqrt{gR} \Rightarrow \upsilon_{\min} = \sqrt{gR}$$

Παρατηρούμε ότι η ελάχιστη ταχύτητα περιστροφής του κουβά, ώστε να μη χυθεί η μπογιά, δεν εξαρτάται από τη μάζα της μπογιάς, αλλά μόνο από την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

6.1 ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Η κίνηση είναι σχετική έννοια και πρέπει πάντα να αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς που εκλέγεται από τον παρατηρητή. Επειδή διάφοροι παρατηρητές χρησιμοποιούν διαφορετικά συστήματα αναφοράς, έχει μεγάλη σημασία να γνωρίζουμε τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται οι παρατηρήσεις που γίνονται από διάφορους παρατηρητές.

Εδώ μας ενδιαφέρουν συστήματα που βρίσκονται σε ομαλή κίνηση (σταθερή ταχύτητα) ως κάποιο ακίνητο σύστημα και ονομάζονται **αδρανειακά συστήματα αναφοράς**.



Έστω δυο παρατηρητές O και O΄ που κινούνται ο ένας ως προς τον άλλο με μεταφορική ομαλή κίνηση, δηλαδή σταθερή ταχύτητα $\vec{u}=u\hat{x}$. Υποθέτουμε ότι στο χρόνο $t=0$ οι παρατηρητές O και O΄ συμπίπτουν.

Επιθυμούμε να συγκρίνουμε πως ο καθένας περιγράφει την κίνηση ενός αντικειμένου A (π.χ. την πτήση ενός αεροπλάνου). Η θέση του αντικειμένου A καθορίζεται με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ για τον παρατηρητή O, ενώ με το διάνυσμα θέσης $\vec{r}'$ για τον O΄.

Όπως φαίνεται στο σχήμα, από διανυσματική άθροιση ισχύει:

$$\overrightarrow{OO'}+\vec{r}'=\vec{r} \qquad (1)$$

όπου $\overrightarrow{OO'}$ η θέση των δυο παρατηρητών κάθε χρονική στιγμή. Αλλά:

$$\vec{u}=\frac{d\vec{x}}{dt} \quad\Rightarrow\quad \int_0^{\overrightarrow{OO'}} d\vec{x}=\vec{u}\int_0^t dt \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{OO'}=\vec{u}t \qquad (2)$$

Άρα η (1) λόγω της (2) δίνει:

$$\vec{u}t+\vec{r}'=\vec{r} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{r}'=\vec{r}-\vec{u}t} \qquad (A)$$

Η σχέση (A) αποτελεί το μετασχηματισμό θέσης του Γαλιλαίου και παρέχει τη σχέση που συνδέει τη θέση ενός αντικειμένου ως προς τους παρατηρητές O και O΄ αντίστοιχα.

Παραγωγίζοντας την (A) ως προς τον χρόνο προκύπτει:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\vec{u}t\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{u}} \quad (B)$$

όπου $\vec{\upsilon}$, $\vec{\upsilon}'$ η ταχύτητα του αντικειμένου ως προς τον παρατηρητή O και O΄ αντίστοιχα. Η σχέση (Β) δίνει το μετασχηματισμό Γαλιλαίου για τη σύγκριση της ταχύτητα ενός αντικειμένου όπως μετριέται από δυο παρατηρητές που βρίσκονται σε ομαλή σχετική μεταφορική κίνηση.

Παραγωγίζοντας την (Β) ως προς το χρόνο προκύπτει:

$$\frac{d\vec{\upsilon}'}{dt} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} - \frac{d\vec{u}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha}' = \vec{\alpha}} \quad (\Gamma)$$

Επειδή:

$$\vec{u} = \sigma\tau\alpha\theta. \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$$

Άρα η επιτάχυνση παραμένει αναλλοίωτη, δηλαδή παρατηρητές που βρίσκονται σε ομαλή σχετική μεταφορική κίνηση μετρούν την ίδια επιτάχυνση ενός αντικειμένου.

6.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1η

Ένα ποτάμι έχει πλάτος $1\mathrm{km}$. Το ρεύμα κινείται με ταχύτητα $2\mathrm{m/sec}$.

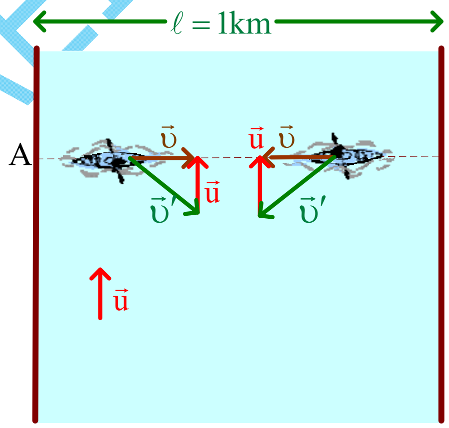
α. Υπολογίστε το χρόνο που χρειάζεται ένας άνθρωπος κωπηλατώντας να διασχίσει το ποτάμι φτάνοντας στο απέναντι ακριβώς σημείο από εκεί που ξεκίνησε και πάλι πίσω.

β. Συγκρίνετε αυτό το χρόνο με εκείνον που θα χρειαζόταν ένας άνθρωπος να διανύσει κωπηλατώντας $1\mathrm{km}$ αντίθετα προς το ρεύμα και πάλι πίσω.

Η βάρκα με κουπί κινείται με σταθερή ταχύτητα $4\mathrm{m/sec}$ ως προς το νερό.

Λύση:

α. Έστω $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα της βάρκας ως προς το έδαφος, η οποία πρέπει να κατευθύνεται οριζόντια έτσι ώστε να διασχίσει το ποτάμι μέχρι το απέναντι σημείο Γ. Επίσης είναι $|\vec{\upsilon}'| = 4\mathrm{m/sec}$ η ταχύτητα της βάρκας ως προς το νερό και $|\vec{u}| = 2\mathrm{m/sec}$ η ταχύτητα του νερού ως προς το έδαφος. Από τη διανυσματική άθροιση των διανυσμάτων αυτών ισχύει:



$$\vec{\upsilon} + \vec{u} = \vec{\upsilon}'$$

ενώ για τα μέτρα τους από το πυθαγόρειο θεώρημα, είναι:

$$\upsilon^2 + u^2 = \upsilon'^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2 = \upsilon'^2 - u^2 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon'^2 - u^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16-4} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{12}\ \mathrm{m/sec}}$$

Άρα ο χρόνος που χρειάζεται για να πάει η βάρκα από το Α στο Γ είναι:

$$t_1 = \frac{\ell}{\upsilon} = \frac{1000\mathrm{m}}{\sqrt{12}\mathrm{m/sec}} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{1000}{3,464}\mathrm{sec} \quad \Rightarrow \quad t_1 \simeq 289\,\mathrm{sec}$$

$$(\text{ή } 4{,}8\ \mathrm{min})$$

Ομοίως για την επιστροφή από το Γ στο Α το μέτρο της ταχύτητας της βάρκας ως προς το έδαφος είναι $\upsilon = \sqrt{12}\mathrm{m/sec}$ και ο χρόνος επιστροφής είναι ίδιος και ίσος με $t_2 \approx 289\,\mathrm{sec}$. Άρα ο ολικός χρόνος είναι:

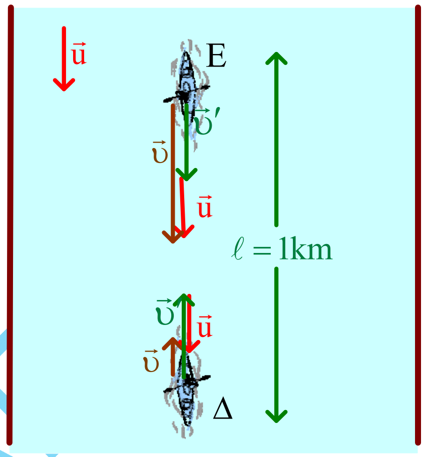
$$t = t_1 + t_2 = 578\,\mathrm{sec} \quad (\text{ή } 9{,}6\ \mathrm{min})$$

β. Όταν κωπηλατεί αντίθετα στο ρεύμα από το σημείο Δ στο Ε η ταχύτητα του ως προς το έδαφος είναι διανυσματικά:

$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u}$ (αφού από τον ορισμό της σχετικής ταχύτητας: $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{u}$)

και επειδή η $\vec{u}$ έχει αντίθετη φορά από τη $\vec{\upsilon}'$ θα πρέπει να ληφθεί με αντίθετο πρόσημο στη σχέση που συνδέει τα μέτρα των ταχυτήτων:

$$\upsilon = \upsilon' - u = 4 - 2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 2\mathrm{m/sec}$$



Άρα ο χρόνος που χρειάζεται για να πάει από το Δ στο Ε είναι:

$$t_1 = \frac{\ell}{\upsilon} = \frac{1000\mathrm{m}}{2\mathrm{m/sec}} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 500\sec$$

$$(\text{ή } 8{,}3 \text{ min})$$

Ενώ όταν πάει από το Ε στο Δ είναι:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u}$$

και το μέτρο της είναι:

$$\upsilon = \upsilon' + u = 4 + 2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 6\mathrm{m/sec}$$

Δηλαδή ο χρόνος που χρειάζεται για να πάει από το Ε στο Δ είναι:

$$t_2 = \frac{\ell}{\upsilon} = \frac{1000\mathrm{m}}{6\mathrm{m/sec}} \quad \Rightarrow \quad t_2 = 166{,}6\sec \quad (\text{ή } 2{,}7\text{min})$$

Άρα ο ολικός χρόνος είναι:

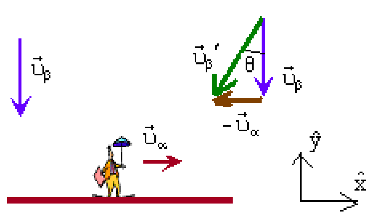
$$t = t_1 + t_2 = 666{,}6\sec \quad (\text{ή } 11 \text{ min})$$

Επομένως πιο γρήγορα θα καλύψει την απόσταση των 2km από τη μια όχθη στην άλλη, παρά αν τη διασχίσει κατά μήκος του ποταμού.

Άσκηση 2η

Ένας άνθρωπος περπατά στη βροχή με ταχύτητα $\upsilon_\alpha = 3\mathrm{m/sec}$ ως προς το έδαφος. Η βροχή ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή πέφτει κατακόρυφα με ταχύτητα $\upsilon_\beta = 15\mathrm{m/sec}$. Πως πρέπει ο διαβάτης να κρατά την ομπρέλα του ώστε να προστατευτεί από τη βροχή καλύτερα;

Λύση:



Βροχή ως προς ακίνητο παρατηρητή:

$\vec{\upsilon}_\beta = 15(-\hat{y}) = -15\hat{y}$

Ταχύτητα ανθρώπου: $\vec{\upsilon}_\alpha = 3\hat{x}$

Ταχύτητα βροχής ως προς κινούμενο άνθρωπο:

$$\vec{\upsilon}_\beta{}' = \vec{\upsilon}_\beta - \vec{\upsilon}_\alpha = 15(-\hat{y}) - 3\hat{x}$$

$$\Rightarrow \vec{\upsilon}'_\beta = -3\hat{x} - 15\hat{y}$$

Η γωνία θ που σχηματίζει με την κατακόρυφο είναι:

$$\tan\theta = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_\beta} = \frac{3}{15} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = 0,2 \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1} 0,2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta = 11,3^o}$$

Άρα, ο άνθρωπος πρέπει να κρατά την ομπρέλα του κατά γωνία $\theta = 11,3^o$ ως προς την κατακόρυφη διεύθυνση έτσι ώστε να προστατεύεται καλύτερα από τη βροχή.

Άσκηση 3η

Ένας βαρκάρης έχει μια βάρκα που μπορεί να αναπτύξει ταχύτητα $4\text{km}/\text{h}$ ως προς το νερό. Ο βαρκάρης θέλει να διασχίσει ένα ποτάμι πλάτους 4km το οποίο ρέει με ταχύτητα $2\text{km}/\text{h}$ (όπως σχήμα).

α. Προς ποία κατεύθυνση* πρέπει να οδηγήσει τη βάρκα ώστε να φτάσει ακριβώς στο απέναντι σημείο;

β. Πόσος χρόνος χρειάζεται για να φτάσει;

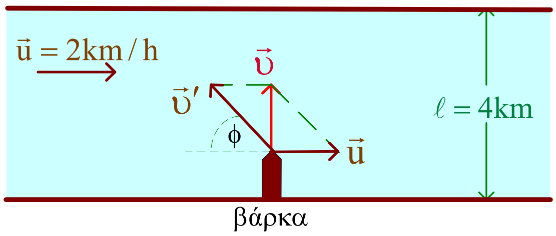
γ. Προς ποία κατεύθυνση* πρέπει να οδηγήσει τη βάρκα ώστε να φτάσει στην απέναντι όχθη στο λιγότερο δυνατό χρόνο;

(*) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας της βάρκας με την όχθη.

Λύση:

α. Για να φτάσει η βάρκα στο ακριβώς απέναντι σημείο της όχθης θα πρέπει το διάνυσμα της ταχύτητας της βάρκας $\vec{\upsilon}$ ως προς ακίνητο παρατηρητή που βρίσκεται στην όχθη, να είναι κάθετο στην όχθη (όπως φαίνεται στο σχήμα).

Επομένως αν $\vec{\upsilon}' = 4\text{km}/\text{h}$ είναι η ταχύτητα της βάρκας ως προς το νερό, $\vec{u}$ είναι η ταχύτητα του νερού ως προς ακίνητο παρατηρητή και $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα της βάρκας ως προς ακίνητο παρατηρητή, ισχύει:



$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u}$$

Έτσι αν ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα $\vec{\upsilon}'$ με την όχθη θα ισχύει:

$$\upsilon'\cos\phi = u \quad \Rightarrow \quad \cos\phi = \frac{u}{\upsilon'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi = 60^o}$$

β. Επίσης είναι:

$$\upsilon' \sin\phi = \upsilon \quad \Rightarrow \quad \upsilon = 4\sin 60^o = 4\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \upsilon = 2\sqrt{3}\mathrm{km/h}$$

Άρα ο χρόνος που απαιτείται για να διασχίσει το ποτάμι πλάτους $\ell = 4\mathrm{km}$ είναι:

$$t = \frac{\ell}{\upsilon} = \frac{4\mathrm{km}}{2\sqrt{3}\mathrm{km/h}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 1{,}15\mathrm{h}}$$

γ. Για υπολογίσουμε τη γωνία ϕ για την οποία ο χρόνος κίνησης στην απέναντι όχθη είναι ελάχιστος πρέπει να καταστρώσουμε τη συνάρτηση $t = t(\phi)$.

Γενικά υπολογίσαμε προηγούμενα ότι:

$$\upsilon = \upsilon' \sin\phi$$

Επομένως ο χρόνος κίνησης είναι:

$$t = \frac{\ell}{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad t(\phi) = \frac{\ell}{\upsilon' \sin\phi} = \frac{4\mathrm{km}}{4\mathrm{km/h}\cdot\sin\phi} \quad t(\phi) = \frac{1}{\sin\phi}(\mathrm{h})$$

Άρα ο χρόνος αυτός ελαχιστοποιείται όταν:

$$\frac{dt}{d\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{\sin\phi}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-\cos\phi}{\sin^2\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\phi = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = 90^o}$$

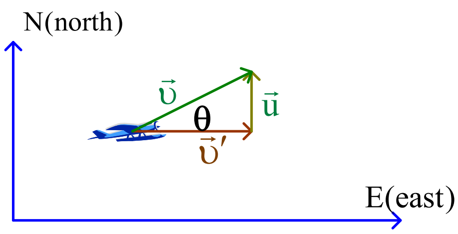
Δηλαδή ο ελάχιστος δυνατός χρόνος επιτυγχάνεται όταν η ταχύτητα της βάρκας σχηματίζει γωνία 90^o με την όχθη.

<u>Άσκηση 4η</u>

Ένα αεροπλάνο πετάει προς ανατολάς με ταχύτητα $400\mathrm{km/h}$ ως προς τον αέρα. Ταυτόχρονα ο άνεμος πνέει προς βορρά με ταχύτητα $75\mathrm{km/h}$ σε σχέση με το έδαφος. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας του αεροπλάνου σε σχέση με το έδαφος.

<u>Λύση:</u>

Είναι $\upsilon' = 400\mathrm{km/h}$ η ταχύτητα του αεροπλάνου ως προς τον αέρα και $u = 75\mathrm{km/h}$ είναι η ταχύτητα του αέρα ως προς το έδαφος, όπως φαίνονται στο σχήμα. Τότε η ταχύτητα του αεροπλάνου ως προς το έδαφος θα δίνεται από τη σχέση:



$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u}$$

το δε μέτρο της είναι:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon'^2 + u^2} = \sqrt{400^2 + 75^2} = \sqrt{160000 + 5625} = \sqrt{165625} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon \cong 407\mathrm{km/h}}$$

Ενώ η γωνία θ μεταξύ της διεύθυνσης της ανατολής και της πορείας του αεροπλάνου ως προς το έδαφος είναι:

$$\tan\theta = \frac{u}{\upsilon'} = \frac{75}{400} = 0{,}1875 \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(0{,}1875) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 10{,}6^{o}}$$

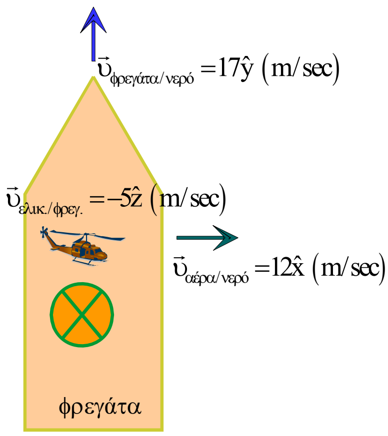
Άσκηση 5η

Ένα ελικόπτερο προσπαθεί να προσγειωθεί σε μια φρεγάτα που κινείται με $17\,m/sec$ προς τον θετικό ημιάξονα y. Την ίδια στιγμή φυσάει άνεμος με $12\,m/sec$ προς τον θετικό ημιάξονα x. Αν στο κατάστρωμα του πλοίου, το πλήρωμα βλέπει το ελικόπτερο να κατεβαίνει κάθετα με $5\,m/sec$, ποια είναι η ταχύτητα του ελικοπτέρου:

α. ως προς το νερό και

β. ως προς τον αέρα;

Λύση:



α. Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ελικοπτέρου ως προς το νερό θα θεωρήσουμε ως κινούμενο σύστημα τη φρεγάτα και ακίνητο το νερό, οπότε:

$$\vec{\upsilon}_{ελικ./νερό} = \vec{\upsilon}_{ελικ./φρεγάτα} + \vec{\upsilon}_{φρεγάτας/νερό} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon}_{ελικ./νερό} = -5\hat{z} + 17\hat{y} \quad (1)$$

β. Ενώ για να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ελικοπτέρου ως προς τον αέρα θα θεωρήσουμε τον αέρα ως κινούμενο σύστημα και το νερό ως ακίνητο οπότε:

$$\vec{\upsilon}_{ελικ./νερό} = \vec{\upsilon}_{ελικ./αέρα} + \vec{\upsilon}_{αέρα/νερό} \quad \Rightarrow \quad \vec{\upsilon}_{ελικ./αέρα} = \vec{\upsilon}_{ελικ./νερό} - \vec{\upsilon}_{αέρα/νερό}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{\upsilon}_{ελικ./αέρα} = -5\hat{z} + 17\hat{y} - 12\hat{x}$$

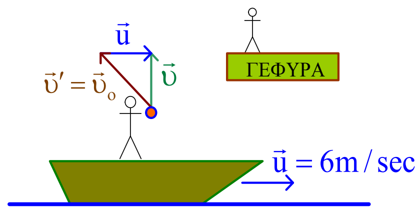
Άσκηση 6η

Έστω ότι στέκεστε σε μια γέφυρα και κοιτάτε τα πλοία που περνούν από κάτω, όπως φαίνεται στο σχήμα. Βλέπετε μια βενζινάκατο να περνά ακριβώς από κάτω, κινούμενη κάθετα ως προς τη γέφυρα με ταχύτητα $6\mathrm{m/sec}$. Ένας άνθρωπος πάνω στη βενζινάκατο πετάει μια μπάλα με αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 10\mathrm{m/sec}$ και γωνία θ ως προς την κατακόρυφο (η υ_o και η θ δίνονται σε σχέση με τη βάρκα).

Ποια θα πρέπει να είναι η γωνία θ ώστε η μπάλα να έρθει κατευθείαν προς τα εσάς (κατακόρυφα προς τα πάνω). Στο σχεδιάγραμμά σας σχεδιάστε τη διεύθυνση βολής της μπάλας σε σχέση με τη βάρκα.

Λύση: Για να κινηθεί η μπάλα κατακόρυφα προς τον άνθρωπο στο ακίνητο σύστημα αναφοράς της γέφυρας, θα πρέπει το διάνυσμα της ταχύτητας της μπάλας ως προς τη γέφυρα $\vec{\upsilon}$ να είναι κάθετο προς τα πάνω. Έτσι αν $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon}_o$ η ταχύτητα της μπάλας ως προς το κινούμενο σύστημα της βάρκας και $\vec{u}$ είναι η ταχύτητα της βάρκας ως προς το ακίνητο σύστημα της γέφυρας, ισχύει:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \upsilon\hat{y} = \upsilon'_x\hat{x} + \upsilon'_y\hat{y} + u\hat{x}$$



Από την τελευταία διανυσματική εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\upsilon = \upsilon'_y = \upsilon'\cos\theta$$

και

$$\upsilon'_x + u = 0 \quad \Rightarrow \quad \upsilon'_x = -u \quad \Rightarrow \quad \upsilon'_x = -6\mathrm{m/sec} \quad (1)$$

Αλλά:

$$\upsilon'_x = \upsilon'\sin\theta = \upsilon_o\sin\theta \overset{(1)}{=} 6 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{6}{\upsilon_o} = \frac{6}{10} = 0,6 \quad \Rightarrow$$

$$\theta = \sin^{-1}0,6 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta = 36,87^o}$$

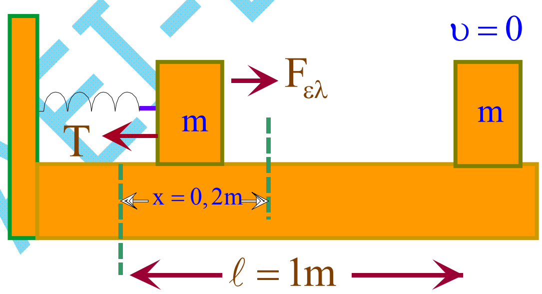
Δηλαδή η μπάλα θα πρέπει να έχει ως προς το σύστημα της βάρκας μια x συνιστώσα ταχύτητας ώστε να αναιρεί την ταχύτητα $\vec{u}$ της κίνησης της βάρκας.

7.1 ΕΡΓΟ – ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Άσκηση 1η

Ένα σώμα μάζας $0,50kgr$ ωθείται συμπιέζοντας ένα οριζόντιο ελατήριο αμελητέας μάζας κατά μια απόσταση $0,20m$. Όταν αφεθεί ελεύθερο το σώμα, κινείται κατά μήκος της οριζόντιας επιφάνειας ενός τραπεζιού καλύπτοντας απόσταση $1m$ πριν ακινητοποιηθεί. Η σταθερά ελατηρίου k είναι $100N/m$. Πόσος είναι ο συντελεστής κινητικής τριβής μ_k μεταξύ του σώματος και του τραπεζιού;

Λύση: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα κατά τον άξονα της κίνησης είναι η τριβή σε όλο το διάστημα και η δύναμη του ελατηρίου μέχρι το φυσικό του μήκος (δηλαδή για $x = 0,2m$).



Εφαρμόζοντας το Θ.Ε.Κ.Ε. μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης προκύπτει:

$$\Sigma W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad W_{F_{\varepsilon\lambda}} + W_T = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2 - T\ell = 0 - 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}kx^2 = T\ell \qquad (1)$$

Αλλά: $T = \mu N$ και επειδή: $N = mg$

προκύπτει:

$$T = \mu mg$$

οπότε η (1) δίνει:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \mu mg\ell \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{kx^2}{2mg\ell} = \frac{100 \cdot 0,2^2}{2 \cdot 0,5 \cdot 10 \cdot 1} = \frac{4}{10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = 0,4}$$

Άσκηση 2η

Σε κιβώτιο μάζας $m = 10kgr$, που ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο ασκείται μεταβλητή δύναμη F που έχει σταθερή διεύθυνση και σχηματίζει με το επίπεδο γωνία $\phi = 30^o$. Η δύναμη έχει μέτρο που εκφράζεται από τη σχέση $F = 20 + 20x$ από την αρχική θέση του κιβωτίου και x είναι ο οριζόντιος άξονας του επιπέδου. Αν ο συντελεστής τριβής είναι $\mu = 0,1$ να υπολογιστεί το έργο W_F της δύναμης F και το έργο της δύναμης τριβής W_T από την αρχική θέση μέχρι τη θέση που το κιβώτιο χάνει την επαφή του με το οριζόντιο επίπεδο.

(Δίνεται: $g = 10m/\sec^2$).

<u>Λύση:</u> Λόγω ισορροπίας στον άξονα y ισχύει:

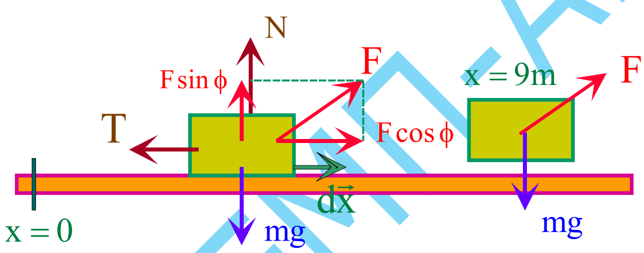
$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N + F\sin\phi - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg - F\sin\phi \quad (1)$$

Όταν το κιβώτιο χάνει την επαφή του με το οριζόντιο επίπεδο, η κάθετη αντίδραση N μηδενίζεται. Οπότε η (1) δίνει τη θέση αυτή ως:

$$0 = mg - F\sin\phi \quad \Rightarrow \quad F\sin\phi = mg \quad \Rightarrow \quad (20+20x)\sin 30^o = 10\cdot 10 \quad \Rightarrow$$

$$20(1+x)\frac{1}{2} = 100 \quad \Rightarrow \quad 10(1+x) = 100 \quad \Rightarrow \quad 10x = 90 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 9m}$$



Άρα το έργο της F από $x=0$ μέχρι $x=9m$ είναι:

$$W_F = \int_0^9 \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_0^9 F\cos\phi dx = \int_0^9 (20+20x)\cos 30^o dx = \int_0^9 20(1+x)\frac{\sqrt{3}}{2}dx =$$

$$10\sqrt{3}\int_0^9 (1+x)dx = 10\sqrt{3}\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^9 = 10\sqrt{3}\left(9+\frac{81}{2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_F = 495\sqrt{3}Joule}$$

Η τριβή είναι:

$$T = \mu N$$

και λόγω της (1) γίνεται:

$$T = \mu(mg - F\sin\phi) = 0,1\cdot\left[10\cdot 10 - (20+20x)\sin 30^o\right] = 0,1\cdot(100-10-10x)$$

$$\Rightarrow$$

$$T = 9 - x \quad (2)$$

Άρα το έργο της τριβής από $x=0$ έως $x=9m$ είναι:

$$W_T = \int_0^9 \vec{T}\cdot d\vec{x} = \int_0^9 T\cos \cancel{180^o}^{-1} dx \overset{(2)}{=} -\int_0^9 (9-x)dx = -\left[9x - \frac{x^2}{2}\right]_0^9 =$$

$$= -\left(9\cdot 9 - \frac{9^2}{2}\right) = -\left(81 - \frac{81}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad W_T = -\frac{81}{2}\text{Joule}$$

Άσκηση 3η

Άνθρωπος μάζας $m_1 = 60kgr$, που τρέχει με κάποια ταχύτητα πηδά πάνω σε ακίνητο έλκηθρο μάζας $m_2 = 30kgr$ και μαζί αποκτούν αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 10m/sec$. Σε πόση απόσταση θα σταματήσει το έλκηθρο, αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης πάγου – έλκηθρου είναι $\mu = 0{,}1$. Δίνεται: $g = 10m/sec^2$.

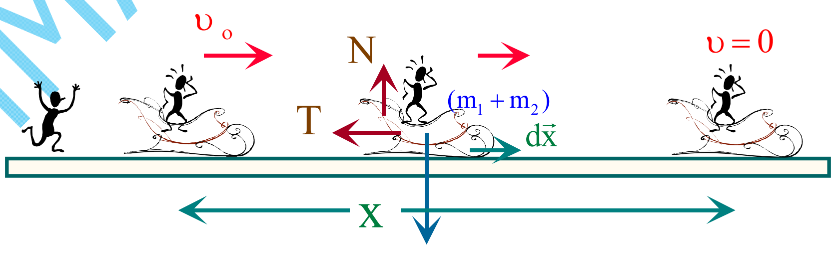
Λύση:

Από Θ.Ε.Κ.Ε. είναι:

$$\Sigma W = \Delta K \Rightarrow W_T = \cancel{K_{τελ}}^{0} - K_{αρχ} \Rightarrow W_T = -\frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_o^2 \quad (1)$$

Αλλά το έργο της τριβής είναι:

$$W_T = \int_0^x \vec{T}\cdot d\vec{x} = \int_0^x T\cancel{\cos\pi}^{-1} dx = -T\int_0^x dx = -Tx \quad (2)$$



όπου $T = \mu N$ και λόγω της ισορροπίας στον άξονα $y: \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = (m_1+m_2)g$

οπότε: $T = \mu(m_1+m_2)g \quad (3)$

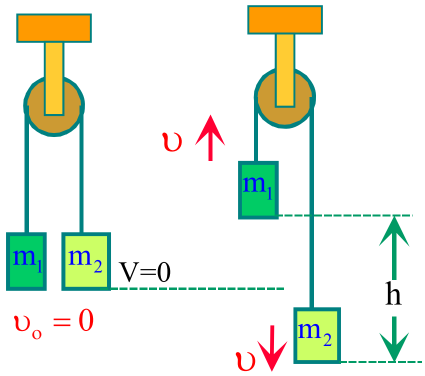
Επομένως η (2) λόγω της (3) δίνει: $W_T = -\mu(m_1 + m_2)gx$ (4)
και αντικαθιστώντας την (4) στην (1) προκύπτει:

$$-\mu(m_1 + m_2)gx = -\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon_o^2 \Rightarrow x = \frac{\upsilon_o^2}{2\mu g} = \frac{10^2}{2\cdot 0{,}1\cdot 10} = \frac{100}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 50m}$$

Άσκηση 4η

Δυο μάζες $m_1 = 1kgr$ και $m_2 = 2kgr$ είναι δεμένες στα άκρα αβαρούς και μη εκτατού νήματος που διέρχεται από ακίνητη αβαρή τροχαλία. Συγκρατούμε αρχικά τις μάζες στο ίδιο ύψος και στη συνέχεια τις αφήνουμε ελεύθερες. Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των δυο μαζών όταν απέχουν μεταξύ τους υψομετρική διαφορά $h = 1m$. Δίνεται: $g = 10m/sec^2$.



Λύση: Επειδή τα δυο σώματα σε ίσους χρόνους διανύουν ίσες αποστάσεις, λόγω του νήματος, θα κινούνται με την ίδια ταχύτητα. Θεωρώντας ως αρχική θέση τη θέση ηρεμίας και τελική αυτή κατά την οποία η μεταξύ τους κατακόρυφη απόσταση είναι h (δηλαδή όταν η m_1 έχει ανέβει κατά $h/2$ και η m_2 έχει κατέβει κατά $h/2$) και θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την αρχική θέση ισορροπίας, η αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων αυτών δίνει:

$$K_{αρχ} + V_{αρχ} = K_{τελ} + V_{τελ} \Rightarrow$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon^2 + m_1 g\frac{h}{2} - m_2 g\frac{h}{2} \Rightarrow$$

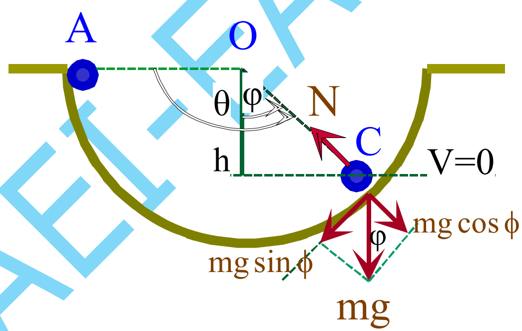
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 = (m_2 - m_1)g\frac{h}{2} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}gh \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}gh} = \sqrt{\frac{2-1}{1+2}\cdot 10\cdot 1} = \sqrt{\frac{10}{3}}m/sec \Rightarrow \upsilon = 1{,}82m/sec$$

Άσκηση 5η

Σφαιρίδιο μάζας m βρίσκεται αρχικά στο σημείο A και μετά ολισθαίνει στη λεία κυκλική επιφάνεια του σχήματος. Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί η επιφάνεια πάνω στη σφαίρα συναρτήσει της γωνίας θ όταν αυτή βρίσκεται στο σημείο C.

Λύση: Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των σημείων A, C και θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το C υπολογίζεται η ταχύτητα του σφαιριδίου στο C.



$\text{Α.Δ.Ε.}_{(A\to C)}$:

$$K_A + V_A = K_C + V_C \quad \Rightarrow \quad 0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0$$

$$\Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Αλλά:

$$h = R\cos\phi \quad \text{και}$$

$$\cos\phi = \cos(\theta - \pi/2) = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$$

Οπότε:

$$h = R\sin\theta$$

και η (1) γίνεται:

$$\upsilon = \sqrt{2gR\sin\theta} \quad (2)$$

Στο σημείο C η κάθετη αντίδραση N και η συνιστώσα του βάρους $mg\cos\phi = mg\sin\theta$ παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης οπότε:

$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad N - mg\sin\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad N = mg\sin\theta + \frac{m}{R}2gR\sin\theta$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N = 3mg\sin\theta}$$

Άσκηση 6η

Σφαιρίδιο που αιωρείται από λεπτό και αβαρές νήμα ηρεμεί αρχικά στη θέση A. Φέρεται στη θέση Γ και αφήνεται ελεύθερο. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σφαιριδίου και η τάση του νήματος τη στιγμή που διέρχεται για πρώτη φορά από τη θέση A.

Δίνεται: $m = 1\text{kgr}$, $g = 10\text{m}/\text{sec}^2$, $\ell = 1\text{m}$, $\phi = 45^\circ$.

Λύση: Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από τη θέση A και εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων Γ και A προκύπτει:

$\text{Α.Δ.Ε.}_{(\Gamma\to A)}$:

$$K_\Gamma + V_\Gamma = K_A + V_A \quad \Rightarrow \quad 0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

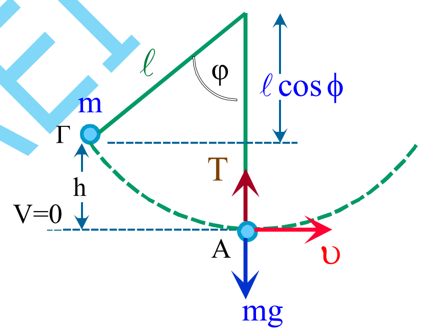
Αλλά από το σχήμα φαίνεται ότι:

$$h = \ell - \ell\cos\phi = \ell(1-\cos\phi)$$

και η (1) γίνεται:

$$\upsilon = \sqrt{2g\ell(1-\cos\phi)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 1\cdot(1-\cos 45^o)} \Rightarrow$$

$$\upsilon = 2,4\,m/sec$$



Στη θέση Α η τάση του νήματος Τ και το βάρος mg παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Επομένως:

$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad T - mg = m\frac{\upsilon^2}{\ell} \quad \Rightarrow$$

$$T = mg + m\frac{\upsilon^2}{\ell} = 1\cdot 10 + \frac{1\cdot 2,4^2}{1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T = 15,9\ Nt$$

Άσκηση 7η

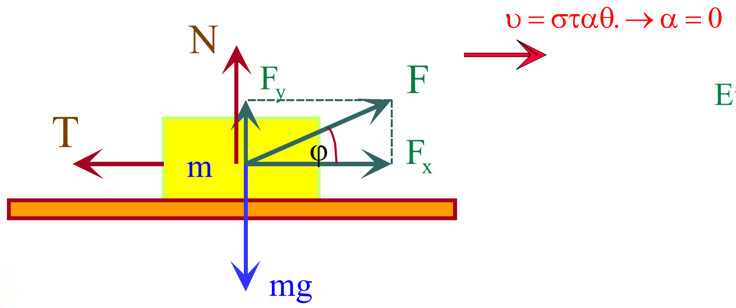
Κιβώτιο μάζας $m = 10kgr$ κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε οριζόντιο επίπεδο υπό την επίδραση δύναμης F. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του σώματος και του επιπέδου είναι $\mu = 0,4$ να υπολογιστούν:

α. Η ελάχιστη δύναμη που απαιτείται για τη μετακίνηση.

β. Το ελάχιστο έργο που δαπανάται για να μετακινηθεί το σώμα κατά απόσταση $s = 10\ m$.

Δίνεται: $g = 10m/sec^2$.

Λύση:



Είναι: $F_x = F\cos\phi$

και $F_y = F\sin\phi$

α. Επειδή $\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta.$ είναι $\alpha = 0$, οπότε ο $2^{ος}$ νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma F_x = m\cancel{\alpha}^{0} \Rightarrow F_x - T = 0 \Rightarrow F_x = T \Rightarrow$$
$$F\cos\phi = T \quad (1)$$

και:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + N - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F_y \Rightarrow$$
$$N = mg - F\sin\phi \quad (2)$$

Αλλά:

$$T = \mu N \overset{(2)}{\Rightarrow} T = \mu\left(mg - F\sin\phi\right) \quad (3)$$

Άρα η (1) λόγω της (3) δίνει:

$$F\cos\phi = \mu\left(mg - F\sin\phi\right) \Rightarrow F\cos\phi + F\mu\sin\phi = \mu mg \Rightarrow$$
$$F = \frac{\mu mg}{\cos\phi + \mu\sin\phi} = \frac{0,4\cdot 10\cdot 10}{\cos\phi + 0,4\cdot\sin\phi} \Rightarrow$$
$$F = \frac{40}{\cos\phi + 0,4\cdot\sin\phi} \quad (4)$$

Παρατηρείται ότι η δύναμη F εξαρτάται από τη γωνία ϕ κι επομένως παίρνει ελάχιστη τιμή όταν:

$$\frac{dF}{d\phi} = 0 \Rightarrow \frac{-40\left(-\sin\phi + 0,4\cdot\cos\phi\right)}{\left(\cos\phi + 0,4\cdot\sin\phi\right)^2} = 0 \Rightarrow$$
$$-\sin\phi + 0,4\cdot\cos\phi = 0 \Rightarrow$$
$$\sin\phi = 0,4\cdot\cos\phi \Rightarrow \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = 0,4 \Rightarrow \tan\phi = 0,4 \Rightarrow$$
$$\phi = \tan^{-1}(0,4) \Rightarrow \phi = 21,8^o$$

Συνεπώς:

$$F_{min} = F_{(\phi=21,8^o)} = \frac{40}{\cos 21,8^o + 0,4\cdot\sin 21,8^o} = \frac{40}{0,93 + 0,4\cdot 0,367} = \frac{40}{1,077}$$
$$\Rightarrow$$

$$\boxed{F_{min} = 37,14\ Nt}$$

β. Το έργο της F_{min} για μετακίνηση του σώματος σε απόσταση $s = 10m$ είναι:

$$W_{min} = \int_0^{s=10m} \vec{F}_{min}\cdot d\vec{x} = \int_0^{s=10m} F_{min}\cos\phi f dx = F_{min}\cos\phi\int_0^{s=10m} dx =$$
$$= F_{min}\cos\phi\cdot s = 37,14\cdot\cos 21,8^o\cdot 10 = 371,4\cdot 0,93 \Rightarrow$$

$$\boxed{W_{min} \simeq 345 Joule}$$

Άσκηση 8η

Σώμα μάζας $m = 2kgr$ βάλλεται προς τα πάνω από τη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου γωνίας $\phi = 30^o$ με αρχικό μέτρο ταχύτητας $\upsilon_o = 20m/sec$. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της κινητικής ενέργειας Κ του σώματος συναρτήσει της απόστασης από το σημείο βολής όταν:

α. Δεν υπάρχουν τριβές.

β. Ο συντελεστής τριβής είναι $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

Δίνεται: $g = 10m/sec^2$.

Λύση:

α. Όταν το σώμα έχει ανέβει κατά x στο κεκλιμένο επίπεδο το θεώρημα έργου κινητικής ενέργειας δίνει:

$$\Sigma W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad W_{mg} + W_N = K_{(x)} - K_{(x=0)} \qquad (1)$$

όπου:

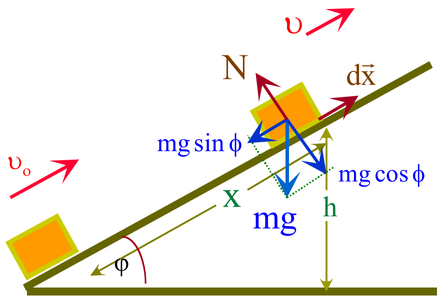
$$V_{(x=0)} - V_{(x)} = 0 - mgh = -mgx\sin\phi = -2\cdot 10x\sin 30^o \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad W_{mg} = -10x$$

είναι: $W_N = 0$ επειδή $\vec{N} \perp d\vec{x}$

και

$$K_{(x=0)} = \frac{1}{2}m\upsilon_o^{\,2} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 20^2 = 400Joule$$

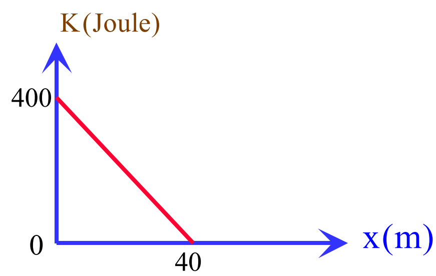


Άρα η (1) γίνεται:

$$-10x = K_{(x)} - 400 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_{(x)} = 400 - 10x}$$

Η γραφική παράσταση της τελευταίας σχέσης είναι η ακόλουθη:



β. Παρουσία τριβής, όταν το σώμα έχει ανέβει κατά x, το θεώρημα έργο – κινητικής ενέργειας δίνει:

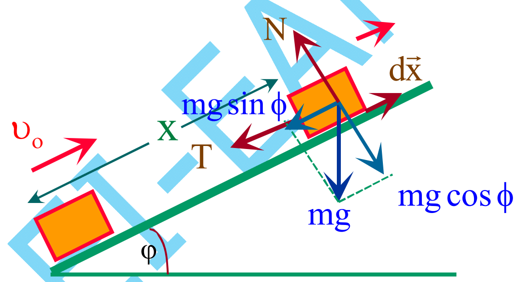
$$\Sigma W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad W_{mg} + W_N + W_T = K_{(x)} - K_{(x=0)} \quad (2)$$

Όπως πριν είναι:

$$W_{mg} = -10x\,, \quad W_N = 0 \quad \text{και} \quad K_{(x=0)} = 400\text{Joule}$$

ενώ:

$$W_T = \int_0^x \vec{T}\cdot d\vec{x} = \int_0^x T\cancel{\cos\pi}^{-1}dx = -\int_0^x Tdx \quad (3)$$



όπου:

$$T = \mu N \quad \text{και} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow$$
$$N = mg\cos\phi$$

οπότε:

$$T = \mu mg\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{5}\cdot 2\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{5}\cdot 10 \quad \Rightarrow \quad T = 6\text{Nt}$$

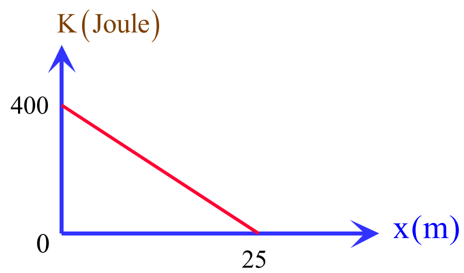
Άρα από την (3) προκύπτει:

$$W_T = -T\int_0^x dx = -6x$$

Συνεπώς η (2) δίνει:

$$-10x + 0 - 6x = K_{(x)} - 400 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_{(x)} = 400 - 16x}$$

Η γραφική παράσταση της τελευταίας σχέσης είναι η ακόλουθη:



Άσκηση 9η

Ένα ρυμουλκό όχημα τραβά με σταθερή ταχύτητα $2\text{m}/\text{sec}$ ένα άλλο όχημα ασκώντας σταθερή δύναμη $F = 5000\text{Nt}$. Στην πρώτη περίπτωση, το ελκυόμενο όχημα βρίσκεται οριζόντια, ενώ στην δεύτερη κατακόρυφα. Να υπολογιστούν:

α. Η ισχύς του κινητήρα του ρυμουλκού σε κάθε περίπτωση.

β. Ο ρυθμός μετατροπής ενέργειας του οχήματος σε θερμική ενέργεια (για την πρώτη περίπτωση).

γ. Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του οχήματος (για τη δεύτερη περίπτωση).

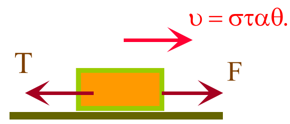
Λύση:

α. Η ισχύς του κινητήρα είναι:

$$P = F\upsilon = 5000\text{Nt} \cdot 2\text{m}/\text{sec} \quad \Rightarrow \quad P = 10000\,\text{Watt}$$

β. Επειδή:

$$\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta. \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$$



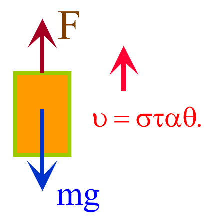
Οπότε:

$$\Sigma F_x = m\cancel{\alpha}^{\,0} \quad \Rightarrow \quad F - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = F \quad (1)$$

Ο ρυθμός μετατροπής της ενέργειας σε θερμική ενέργεια είναι η ισχύς της τριβής. Δηλαδή:

$$P_T = T\upsilon \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad P_T = F\upsilon = 10000\,\text{Watt}$$

γ. Πάλι επειδή $\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \alpha = 0$ και ο $2^{ος}$ νόμος του Newton δίνει:



$$\Sigma F_y = m\cancel{\alpha}^{\,0} \quad \Rightarrow \quad F - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = F \quad (2)$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας είναι η ισχύς του βάρους. Δηλαδή:

$$P_{mg} = mg\upsilon \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad P_{mg} = F\upsilon = 10000\,\text{Watt}$$

Άσκηση 10η

Σκιέρ ξεκινά από το λόφο Η και κατευθύνεται προς το λόφο Κ ο οποίος περιγράφεται από ένα κύκλο ακτίνας R.

α. Υπολογίστε την ταχύτητα $\upsilon(\theta)$ του σκιέρ σα συνάρτηση της γωνίας θ.

β. Σε ποια γωνία εγκαταλείπει ο σκιέρ την πίστα;

γ. Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι τουλάχιστον το ύψος h_o ώστε ο σκιέρ να εγκαταλείψει την πίστα για $\theta = 0^o$;

δ. Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι τουλάχιστον το ύψος h_o ώστε ο σκιέρ να φτάσει μέχρι το πιο ψηλό σημείο της κορυφής;

Λύση:

α. Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο και εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ προκύπτει:

$$\text{Α.Δ.Ε.}_{(Α\to Γ)}: \quad K_A + V_A = K_Γ + V_Γ \quad \Rightarrow \quad 0 + \cancel{m}gh_o = \frac{1}{2}\cancel{m}\upsilon^2 + \cancel{m}gh \quad \Rightarrow$$

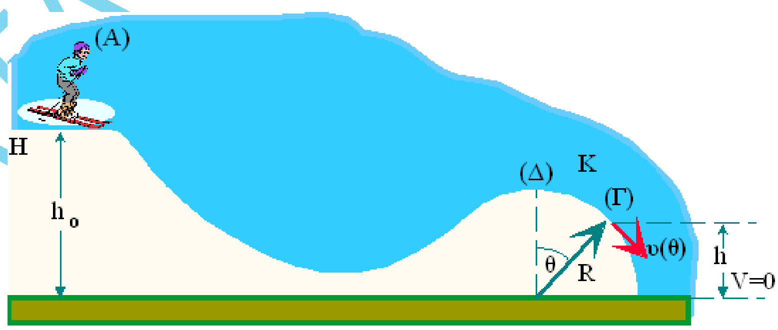
$$\upsilon^2 = 2g(h_o - h) \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{2g(h_o - h)} \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά:

$$h = R\cos\theta$$

οπότε:

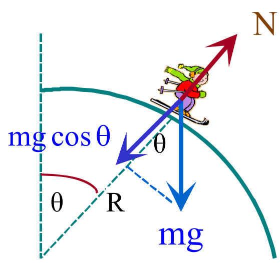
$$\boxed{\upsilon(\theta) = \sqrt{2g(h_o - R\cos\theta)}} \quad (2)$$



β. Σε ένα σημείο του λόφου Κ, οι δυνάμεις που ασκούνται στο σκιέρ είναι η κάθετη αντίδραση Ν και το βάρος του mg, του οποίου η συνιστώσα $mg\cos\theta$ είναι στην κεντρομόλο διεύθυνση.

Επομένως η Ν και η $mg\cos\theta$ παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης οπότε:

$$F_K = ma_K \quad \Rightarrow \quad mg\cos\theta - N = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \overset{(2)}{\Rightarrow}$$



$$mg\cos\theta - N = \frac{m}{R}2g\left(h_o - R\cos\theta\right) \quad (3)$$

Όταν ο σκιέρ εγκαταλείπει την πίστα η κάθετη αντίδραση N μηδενίζεται $\left(N=0\right)$, οπότε η (3) δίνει:

$$\cancel{m}g\cos\theta = \frac{\cancel{m}}{R}2g\left(h_o - R\cos\theta\right) \quad \Rightarrow \quad gR\cos\theta = 2gh_o - 2gR\cos\theta$$

$$\Rightarrow$$

$$3\cancel{g}R\cos\theta = 2\cancel{g}h_o \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\theta = \frac{2h_o}{3R}} \quad (4)$$

γ. Το ελάχιστο ύψος h_o για το οποίο ο σκιέρ θα εγκαταλείψει την πίστα για $\theta = 0^o$ δηλαδή στο ανώτερο σημείο του λόφου Κ σύμφωνα με την (4) είναι:

$$\cos 0^o = \frac{2h_o}{3R} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{2h_o}{3R} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{h_o = \frac{3R}{2}}$$

δ. Το ελάχιστο ύψος h_o για το οποίο ο σκιέρ θα φτάσει μέχρι το πιο ψηλό σημείο της κορυφής Κ και θα σταματήσει, υπολογίζεται εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Δ:

$$\text{Α.Δ.Ε.}_{(A\to\Delta)}: \quad K_A + V_A = K_\Delta + V_\Delta \quad \Rightarrow \quad 0 + mgh_o = 0 + mgR \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h_o = R}$$

Άσκηση 11η

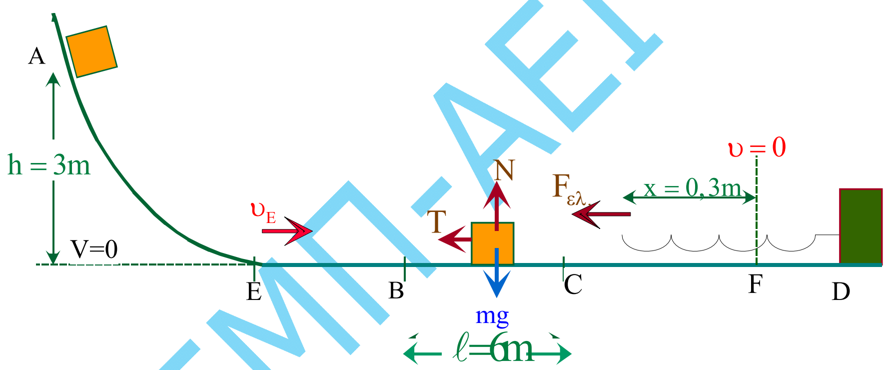
Ένα σώμα μάζας $m = 10kgr$ αφήνεται ελεύθερο από το σημείο A πάνω στη διαδρομή ABCD, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η διαδρομή είναι λεία (χωρίς τριβές) εκτός από το τμήμα BC μήκους $6m$. Το σώμα κινείται, κτυπά ένα ελατήριο σταθεράς $k = 2250Nt/m$ και στιγμιαία ακινητοποιείται όταν το ελατήριο έχει συσπειρωθεί κατά $0,3m$. Υπολογίστε:

α. Το συντελεστή τριβής ολίσθησης μεταξύ του τμήματος BC και του σώματος.

β. Την ταχύτητα του σώματος όταν το ελατήριο επανέλθει στο φυσικό του μήκους.

Δίνεται: $g = 10m/sec^2$.

(Εξετάσεις ΦΥΕ 14 Ιούλιος 2003)



Λύση:

α. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων A και E προκύπτει:

$$A.\Delta.E._{(A\to E)}: \quad K_A + V_A = K_E + V_E \quad \Rightarrow \quad 0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_E^{\,2} + 0 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_E = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Ενώ εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας (αφού υπάρχει τριβή) από το E στο F όπου στιγμιαία ακινητοποιείται το σώμα προκύπτει:

$$\Sigma W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad W_T + W_{\varepsilon\lambda\alpha\tau.} = K_F - K_E \quad (2)$$

όπου:

$$K_F = 0, \quad K_E = \frac{1}{2}m\upsilon_E^{\,2} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}m2gh = mgh = 10\cdot 10\cdot 3 \quad \Rightarrow$$

$$K_E = 300Joule$$

$$W_T = \int_0^{\ell} \vec{T}\cdot d\vec{x} = \int_0^{\ell} T\,\cancel{\cos\pi}^{-1}\,dx = -T\int_0^{\ell} dx = -T\ell$$

και:

$$T = nN = nmg \quad (\text{λόγω} \;\; \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg\,)$$

οπότε:

$$W_T = -nmg\ell = -n\cdot 10\cdot 10\cdot 6 \quad \Rightarrow \quad W_T = -600n$$

$$W_{\varepsilon\lambda} = \int_0^{x} \vec{F}_{\varepsilon\lambda}\cdot d\vec{x} = \int_0^{x} F_{\varepsilon\lambda}\,\cancel{\cos\pi}^{-1}\,dx = -\int_0^{x} kx dx = -\frac{1}{2}kx^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2250\cdot 0,3^2 \quad \Rightarrow \quad W = -101,25\text{Joule}$$

Άρα η (2) δίνει:

$$-600n - 101,25 = 0 - 300 \quad \Rightarrow \quad 600n = 198,75 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{198,75}{600}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n = 0,33}$$

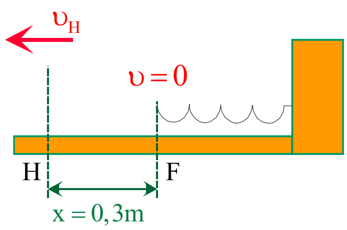
β. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας από τη θέση F μέχρι τη θέση Η όπου το ελατήριο επανέρχεται στο φυσικό του μήκος προκύπτει:

$$\text{Α.Δ.Ε.}_{(F\to H)}: \quad K_F + V_F = K_H + V_H \quad \Rightarrow$$

$$0 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + 0 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{k}{m}}\cdot x = \sqrt{\frac{2250}{10}}\cdot 0,3 = 15\cdot 0,3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\upsilon = 4,5\text{m}/\text{sec}}$$



<u>Άσκηση 12η</u>

Ένα σώμα μάζας $2kgr$ αφήνεται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου κλίσης 30^o. Στα πρώτα $1,5m$ του επιπέδου (από την κορυφή) υπάρχει τριβή με συντελεστή ολίσθησης $\mu = 0,5$, ενώ στα επόμενα $1m$ δεν υπάρχει. Στη βάση του επιπέδου υπάρχει ελατήριο σταθεράς $20N/m$.

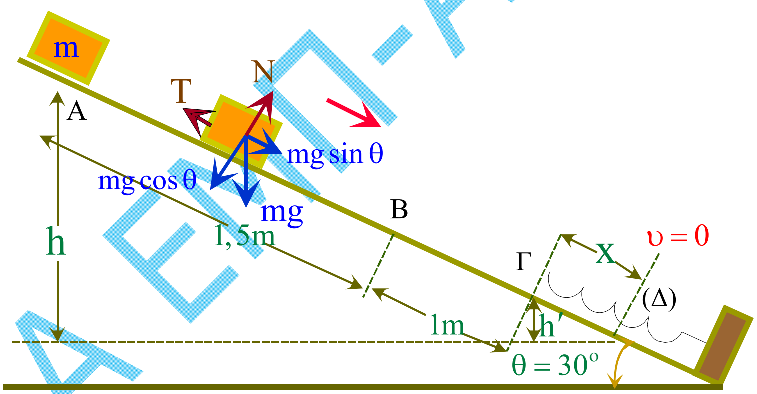
α. Ποίο είναι το έργο της τριβής κατά την κίνηση του σώματος προς τη βάση του επιπέδου;

β. Με ποια ταχύτητα φτάνει το σώμα στο ελατήριο;

γ. Έστω ότι το σώμα συνεχίζοντας προς τη βάση του επιπέδου πιέζει το ελατήριο κατά x πριν να σταματήσει στιγμιαία (δεν υπάρχει τριβή σε αυτή την περιοχή). Ποια είναι η απόσταση x;

δ. Αφού το ελατήριο ισορροπεί, επανεκτείνεται, εκτοξεύοντας το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο. Τι απόσταση θα διανύσει το σώμα στο επίπεδο μέχρι να σταματήσει;

<u>Λύση:</u>



α. Το έργο της τριβής από το σημείο A ως το B είναι:

$$W_T = \int_A^B \vec{T}\cdot d\vec{x} = \int_0^{1,5} T\,\cancel{\cos\pi}^{-1}\,dx = -T\int_0^{1,5} dx = -T\cdot 1,5$$

Αλλά:

$$T = \mu N$$

και:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - mg\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta$$

οπότε:

$$T = \mu mg\cos\theta = 0,5\cdot 2\cdot 10\cos 30^o = 10\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad T = 8,66Nt$$

Άρα:

$$W_T = -8,66\cdot 1,5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_T = -13Joule}$$

β. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας από το Α στο Γ προκύπτει:

$$\Sigma W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad W_T + W_B = K_\Gamma - K_A \qquad (1)$$

όπου $W_T = -13\text{J}$, $K_\Gamma = \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2$, $K_A = 0$ και λόγω της συντηρητικότητας του βάρους το έργο του ισούται με τη διαφορά της δυναμικής του ενέργειας, δηλαδή:

$$W_B = V_A - V_\Gamma = mgh - 0 = mgh$$

όπου:

$$h = 2,5 \cdot \sin 30^o = 2,5 \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad h = 1,25\text{m}$$

Οπότε:

$$W_B = 2 \cdot 10 \cdot 1,25 \quad \Rightarrow \quad W_B = 25\text{Joule}$$

Άρα η (1) δίνει:

$$-13 + 25 = \frac{1}{2} \cdot 2\upsilon_\Gamma^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_\Gamma^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_\Gamma = \sqrt{12}\text{m/sec}}$$

γ. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας από το Γ μέχρι το σημείο Δ όπου το σώμα σταματά στιγμιαία προκύπτει:

$$\text{Α.Δ.Ε.}_{(\Gamma\to\Delta)}: \quad K_\Gamma + V_\Gamma = K_\Delta + V_\Delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\upsilon_\Gamma^2 + mgh' = 0 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 + 2 \cdot 10h' = \frac{1}{2} \cdot 20x^2 \quad \Rightarrow \quad 12 + 20h' = 10x^2$$

όπου $h' = x\sin 30^o = \frac{x}{2}$ οπότε:

$$12 + 20\frac{x}{2} = 10x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1,2 = 0$$

Λύσεις τριωνύμου:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1,2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5,8}}{2} = \frac{1 \pm 2,4}{2} \quad \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} 1,7\text{m} & \text{Η αρνητική λύση απορρίπτεται} \\ -0,7\text{m} & \text{Οπότε} \quad \boxed{x = 1,7\text{m}} \end{cases}$$

δ. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας από το σημείο Γ μέχρι το σημείο Ε όπου το σώμα καθώς εκτοξεύεται σταματάει προκύπτει:

$$\Sigma W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad W_B + W_T = K_E - K_\Gamma \qquad (2)$$

όπου:

$K_\Delta = 0, \quad K_\Gamma = 12\text{Joule}$ (Επειδή λόγω της Α.Δ.Ε. το σώμα θα έχει όταν χάσει την επαφή με το ελατήριο την ίδια κινητική ενέργεια που είχε όταν έφτασε στο Γ)

$$W_B = V_\Delta - V_E = 0 - mg\cdot s\cdot \sin 30^o = -2\cdot 10\cdot s\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad W_B = -10s$$

και:

$$W_T = -T(s-1) = -8,66(s-1)$$

(γιατί όπως έχει υπολογιστεί στο ερώτημα (α) είναι $T = 8,66\text{Nt}$ και η τριβή θα ασκείται μόνο στο διάστημα $s-1$).

Άρα η (2) δίνει:

$$-10s - 8,66(s-1) = 0 - 12 \quad\Rightarrow\quad -10s - 8,66s + 8,66 = -12 \quad\Rightarrow$$

$$-18,66s = -20,66 \quad\Rightarrow\quad s = \frac{20,66}{18,66} \quad\Rightarrow\quad \boxed{s = 1,1\text{m}}$$

Συνεπώς κατά την άνοδο του, το σώμα θα σταματήσει σε απόσταση $s = 1,1\text{m}$ από το Γ.

Άσκηση 13η

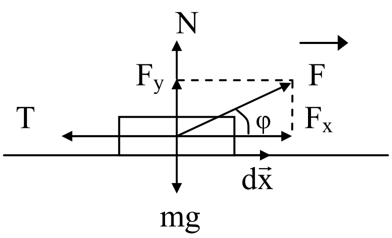
Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο του οποίου ο συντελεστής κινητικής τριβής είναι ανάλογος του διαστήματος $n_\kappa=\lambda x$, όπου λ θετική σταθερά. Αν το σώμα αρχικά ηρεμεί και επιδράσει σταθερή δύναμη $\vec{F}$ που σχηματίζει γωνία φ με το επίπεδο, να υπολογιστούν:

α) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$

β) το έργο της δύναμης τριβής και

γ) η ταχύτητα του σώματος συναρτήσει του διαστήματος x.

Λύση:



Είναι: $F_x = F\cos\varphi$ και $F_y = F\sin\varphi$

α) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ είναι:

$$W_F = \int_0^x \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_0^x F\cos\varphi dx =$$

$$= F\cos\varphi \int_0^x dx \Rightarrow W_F = F\cos\varphi \cdot x \qquad \textbf{(1)}$$

β) Η δύναμη τριβής είναι: $T=n_\kappa N=\lambda x N$ **(2)**

Αλλά λόγω ισορροπίας στον άξονα y ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N + F_y - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F\sin\varphi$$

και η **(2)** γίνεται: $T=\lambda x\,(mg - F\sin\varphi)$

Άρα το έργο της τριβής είναι:

$$W_T = \int_0^x \vec{T}\cdot d\vec{x} = \int_0^x T\cos\pi dx = -\int_0^x Tdx = -\lambda(mg - F\sin\varphi)\int_0^x xdx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_T = -\lambda\frac{x^2}{2}(mg - F\sin\varphi) \qquad \textbf{(3)}$$

(το αρνητικό πρόσημο εκφράζει την παραγωγή του έργου αυτού, δηλαδή την απόδοσή του στο περιβάλλον υπό μορφή θερμότητας και προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο $\vec{T}\cdot d\vec{x}$, αφού η τριβή είναι αντίθετη της μετατόπισης).

γ) Από το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας προκύπτει:

$$\Sigma W = \Delta K \Rightarrow W_F + W_T = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi}$$

Αλλά $K_{\alpha\rho\chi} = 0$ και λόγω των **(1)**, **(3)** προκύπτει τελικά:

$$F\cos\varphi x - \frac{\lambda x^2}{2}(mg - F\sin\varphi) = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2F}{m}x\cos\varphi - \frac{\lambda x^2}{m}(mg - F\sin\varphi)}$$

Άσκηση 14η

Σώμα μάζας m κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $\upsilon = c\sqrt{x}$, όπου c σταθερά και x η απόσταση που διανύει το σώμα. Να υπολογιστεί το έργο των δυνάμεων συναρτήσει του χρόνου.

Λύση:

Από το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας προκύπτει :

$$W = \Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_o^2$$

Αλλά επειδή $\upsilon = c\sqrt{x}$ για x=0 είναι $\upsilon_o = 0$ οπότε : $W = \frac{1}{2}mc^2 x$ **(1)**

Επίσης από τον ορισμό της ταχύτητας προκύπτει :

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \Rightarrow c\sqrt{x} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = c\int_0^t dt \Rightarrow 2\sqrt{x} = ct \Rightarrow x = \frac{c^2t^2}{4} \quad \textbf{(2)}$$

Άρα η **(1)** λόγω της **(2)** δίνει : $W = \frac{1}{2}mc^2\frac{c^2t^2}{4} \Rightarrow W(t) = \frac{mc^4t^2}{8}$

Άσκηση 15η

Σε σωματίδιο μάζας m=2kgr ασκείται δύναμη $\vec{F} = 6t\hat{x}$ (Nt). Αν το σωματίδιο βρίσκεται αρχικά σε ηρεμία, να βρεθεί το έργο που παράγεται από τη δύναμη στα 2 πρώτα sec της κίνησής του.

Λύση:

Από το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας προκύπτει:

$$W_F = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - 0 = \frac{1}{2}m\upsilon^2,$$ όπου υ η ταχύτητα για t=2 sec.

Από τον 2^o νόμο του Newton:

$$F = m\alpha \Rightarrow 6t = 2\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_0^{\upsilon} d\upsilon = 3\int_0^t tdt \Rightarrow \upsilon(t) = 3\frac{t^2}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

δηλαδή για t=2 sec: υ=6m/sec

Άρα: $W_F = \frac{1}{2}2\cdot 6^2\,\text{Joule} = 36\,\text{Joule}$

Άσκηση 16η

Ένα σώμα έχει μάζα m και κινείται κατά x σε ένα πεδίο δύναμης που κατευθύνεται προς τα θετικά. Αν η κινητική ενέργεια του σώματος δίνεται από τη σχέση λt^2, όπου t είναι ο χρόνος και λ μια σταθερή ανεξάρτητη του χρόνου, να υπολογισθεί η δύναμη που ασκείται στο σώμα.

Λύση:

Από την κινητική ενέργεια υπολογίζεται η ταχύτητα του σώματος:

$$K = \lambda t^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \lambda t^2 \Rightarrow \upsilon(t) = \sqrt{\frac{2\lambda}{m}}\,t$$

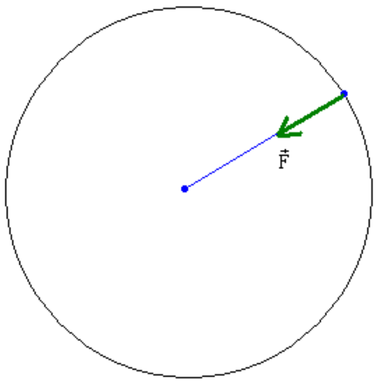
Άρα η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι σύμφωνα με τον 2^o νόμο του Newton:

$$\vec{F} = m\vec{\alpha} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \overset{(1)}{=} m\sqrt{\frac{2\lambda}{m}}\,\hat{x} \Rightarrow \vec{F} = \sqrt{2\lambda m}\,\hat{x}$$

Άσκηση 17η

Σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση της ελκτικής δύναμης $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{r}$ όπου k σταθερά. Η μάζα του σωματιδίου είναι m και η τροχιά του περιφέρεια κύκλου ακτίνας r. Ζητείται η δυναμική και η ολική ενέργεια του σωματιδίου.

Λύση:



Αποδεικνύεται ότι κάθε κεντρική δύναμη της μορφής της $\vec{F}$ είναι διατηρητική. Έτσι, η $\vec{F}$ απορρέει από μια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας σύμφωνα με την σχέση:

$$F = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow -\frac{k}{r^2} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_0^V dV = k\int_\infty^r \frac{dr}{r^2} \Rightarrow V(r) = -\frac{k}{r}$$

θεωρώντας την δυναμική ενέργεια μηδενική στο άπειρο.

Η κινητική ενέργεια είναι: $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

Αλλά η δύναμη $\vec{F}$ παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου γιατί κατευθύνεται πάντα προς το κέντρο Ο της κυκλικής τροχιάς. Οπότε:

$$F_\kappa = m\alpha_\kappa \Rightarrow \frac{k}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{k}{mr}}$$

(το αρνητικό πρόσημο της $\vec{F}$ εδώ δεν γράφεται επειδή είναι ομόρροπη της κεντρομόλου επιτάχυνσης και οι δύο είναι στα αρνητικά της ακτινικής διεύθυνσης $\hat{r}$).

Άρα η κινητική ενέργεια ισούται με:

$$K = \frac{k}{2r}$$

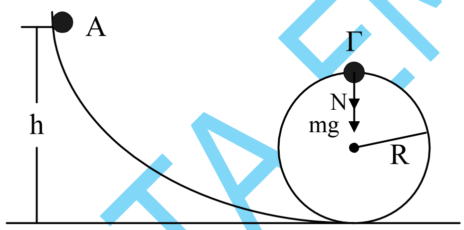
και η ολική ενέργεια είναι:

$$E = K + V = \frac{k}{2r} - \frac{k}{r} \Rightarrow E = -\frac{k}{2r}$$

Άσκηση 18η

Υπολογίστε το ελάχιστο ύψος h_{min} από το οποίο πρέπει να αφεθεί κάποιο σώμα για να κάνει πλήρη περιφορά στον κύκλο του σχήματος. Οι τριβές αγνοούνται.

Λύση:



Για να διαγράψει το σώμα τον κύκλο του σχήματος πρέπει να φτάσει και να περάσει το ανώτατο σημείο Γ του κύκλου. Στο σημείο Γ στο σώμα ασκούνται το βάρος του mg και η κάθετη αντίδραση N, οι οποίες παίζουν τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή:

$$N + mg = m\frac{\upsilon_\Gamma^2}{R} \Rightarrow N = \frac{m\upsilon_\Gamma^2}{R} - mg \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά πρέπει : $N \geq 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{m\upsilon_\Gamma^2}{R} - mg \geq 0 \Rightarrow \upsilon_\Gamma \geq \sqrt{gR}$

Οπότε : $\upsilon_{\Gamma min} = \sqrt{gR}$ είναι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα στο ανώτατο σημείο Γ για να κάνει ανακύκλωση (δηλαδή να διαγράψει μια πλήρη περιφορά του κύκλου) και αντιστοιχεί σε N=0 δηλαδή οριακά το σώμα να μην έρχεται σε επαφή με την επιφάνεια.

Άρα από την αρχή διατήρησης της ενέργειας στις θέσεις Α και Γ προκύπτει:

$$K_A + V_A = K_\Gamma + V_\Gamma \Rightarrow 0 + mgh_{min} = mg2R + \frac{1}{2}m\upsilon^2_{\Gamma min} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow gh_{min} = 2gR + \frac{1}{2}gR = \frac{5}{2}gR \Rightarrow h_{min} = \frac{5}{2}R$$

8.1 ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Με τη βοήθεια της συνάρτησης της δυναμικής ενέργειας ενός σώματος μπορεί να γίνει μια ποιοτική μελέτη της κίνησης του.

Αν $V(x)$ είναι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας τότε η δύναμη που ασκείται στο σώμα προκύπτει από τη σχέση:

$$\vec{F} = -\frac{dV}{dx}\hat{x}$$

Επίσης ενδιαφέροντα σημεία της κίνησης είναι τα σημεία ισορροπίας, δηλαδή τα μέγιστα και τα ελάχιστα της συνάρτησης $V(x)$.

Ο προσδιορισμός αυτών ανάγεται στη μελέτη της συνάρτησης $V(x)$:

- Μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο της $V(x)$ προκύπτουν οι θέσεις ισορροπίας (μια ή περισσότερες) του σώματος. Δηλαδή:

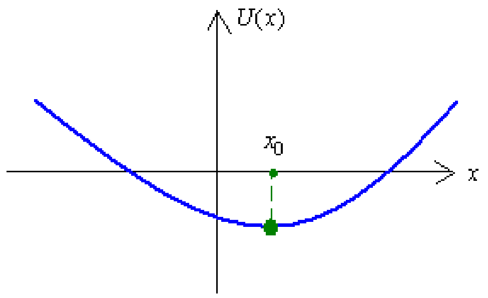
$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ldots.. \quad x = x_o,\ x_1,\ \ldots \quad (\Theta.\mathrm{I})$$

- Στην συνέχεια για το χαρακτηρισμό των θέσεων αυτών ισορροπίας υπολογίζεται η δεύτερη παράγωγος της δυναμικής ενέργειας $\frac{d^2V}{dx^2}$ και ελέγχεται το πρόσημο της στα σημεία των θέσεων ισορροπίας.

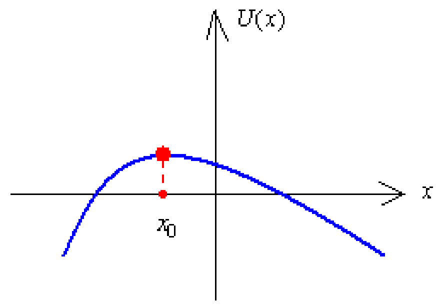
Έτσι:

Αν $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right\|_{x=x_o} = \ldots > 0$	Τότε η $V(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x = x_o$ και αυτή η θέση λέγεται **θέση ευσταθούς ισορροπίας.**
Αν $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right\|_{x=x_o} = \ldots < 0$	Τότε η $V(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = x_o$ και αυτή η θέση λέγεται **θέση ασταθούς ισορροπίας.**

Η ίδια διαδικασία πρέπει να ακολουθηθεί και για τα άλλα σημεία ισορροπίας έτσι ώστε να χαρακτηριστούν ως ευσταθείς ή ασταθείς ισορροπίες.



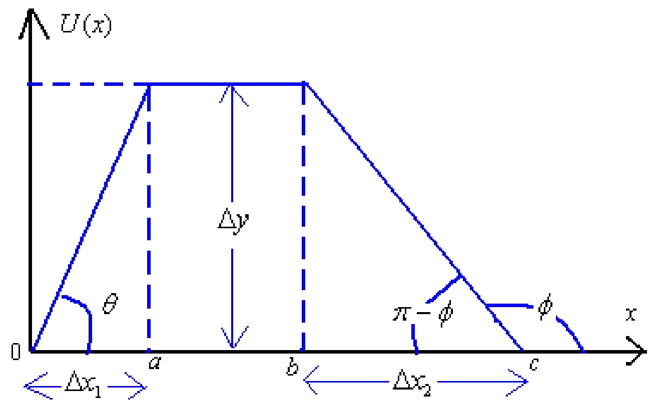
x_0: Ευσταθές Σ. Ι.



x_0: Ασταθές Σ. Ι.

Γεωμετρική Ερμηνεία δύναμης – παραγώγου δυναμικής ενέργειας

Εξ' ορισμού της παραγώγου, η $U'(x_0)$ σε ένα σημείο εκφράζει την κλίση της U στο σημείο x_0. Για να γίνει αυτό κατανοητό θεωρούμε την ειδική περίπτωση που η $U(x)$ αποτελείται από 3 διαφορετικά τμήματα σταθερής κλίσης.



Η κλίση του πρώτου τμήματος δηλ. στην περιοχή $[0,a]$ δίνεται από την εφαπτομένη της γωνίας θ:

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x_1}$$

Έτσι: $U' = \tan\theta$ και $F = -U' \Rightarrow F = -\tan\theta < 0$ (προς τα αριστερά)

Άρα, στην περιοχή $[0,a]$ η δύναμη είτε επιβραδύνει το σώμα αν αυτό κινείται προς τα δεξιά είτε το επιταχύνει προς τα αριστερά.

Το δεύτερο τμήμα, δηλ. στην περιοχή $[a,b]$, έχει μηδενική κλίση αφού είναι παράλληλο στον x-άξονα, οπότε:

$U'=0$ και άρα $F=0$, δηλ. το σώμα είτε κινείται ευθύγραμμα ομαλά είτε βρίσκεται ακίνητο στην περιοχή $[a,b]$.

Τέλος, η κλίση του τρίτου τμήματος, δηλ. στην περιοχή $[b,c]$, δίνεται από την εφαπτομένη της γωνίας ϕ:

$$\tan\phi = -\tan(\pi-\phi) = -\frac{\Delta y}{\Delta x_2} < 0$$

Έτσι: $U'=\tan\phi<0$ και $F=-U' \Rightarrow F=-\tan\phi=\tan(\pi-\phi)>0$ (προς τα δεξιά)

Άρα, στην περιοχή $[b,c]$ η δύναμη είτε επιταχύνει το σώμα προς τα δεξιά είτε το επιβραδύνει εφόσον αυτό κινείται προς τα αριστερά.

8.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1η

Ένα σωμάτιο μάζας $2kgr$ κινείται σε μια διάσταση κάτω από την επίδραση μιας δύναμης που περιγράφεται από το παρακάτω διάγραμμα δυναμικής ενέργειας.

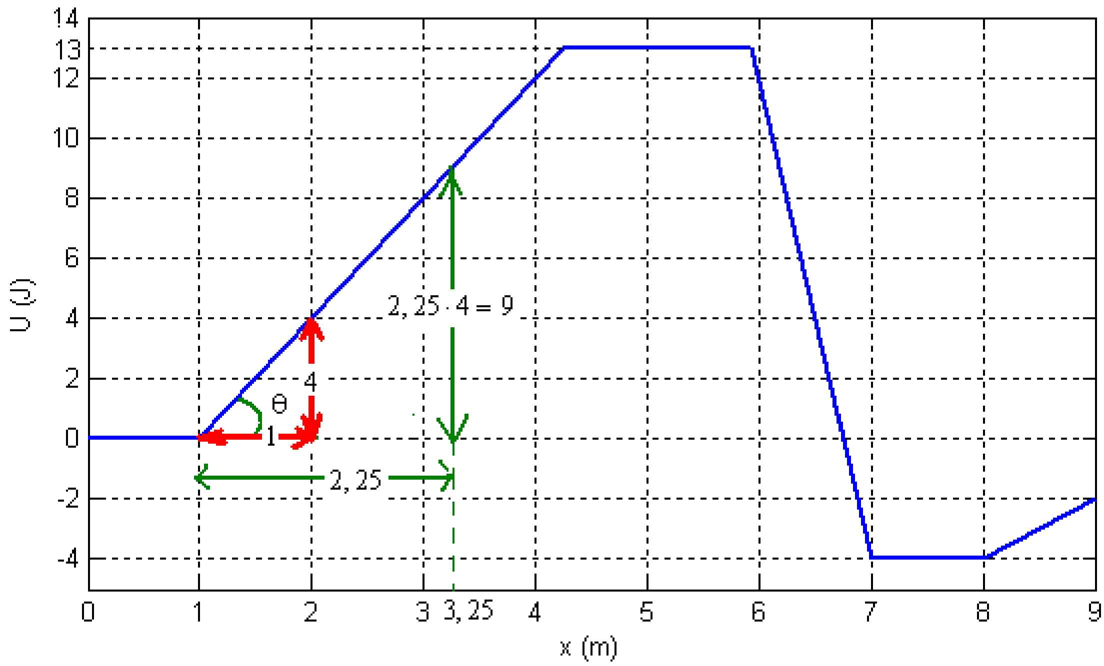
α. Όταν το σωμάτιο βρίσκεται στη θέση $x = 5m$, ποια είναι η δύναμη που δρα πάνω του;

β. Όταν το σωμάτιο βρίσκεται στη θέση $x = 2m$, ποια είναι η επιτάχυνση του;

γ. Αν αφήσουμε το σωμάτιο που ηρεμεί στο $x = 6m$, με ποια ταχύτητα θα φτάσει στο $x = 7,5m$;

δ. Αν το σωμάτιο βάλλεται από την αρχή $(x = 0)$ με αρχική ταχύτητα $5m/sec$ προς τα δεξιά, με ποια ταχύτητα θα φτάσει στο $x = 3,25m$;

Λύση:



α. Η δύναμη δίνεται σε κάθε σημείο από τη σχέση:

$$F = -\frac{dV}{dx}$$

Αλλά σύμφωνα με τη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου, η παράγωγος $\frac{dV}{dx}$ αποτελεί την κλίση της καμπύλης $V(x)$ σε κάθε σημείο.

Επομένως στο σημείο $x = 5m$, όπως φαίνεται στο διάγραμμα της $V(x)$ η κλίση της καμπύλης είναι μηδέν, δηλαδή:

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=5m} = 0$$

οπότε:

$$F_{(x=5m)} = -\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=5m} = 0$$

β. Στο σημείο $x = 2m$, η κλίση της καμπύλης σύμφωνα με το διάγραμμα είναι:

$$\tan\theta = \frac{4}{1} = 4, \quad \text{δηλαδή} \quad \left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=2m} = 4\frac{J}{m}$$

Άρα η δύναμη που ασκείται στο σώμα εκεί είναι:

$$F_{(x=2m)} = -\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=2m} = -4Nt$$

και από το 2^o νόμο του Newton η επιτάχυνση είναι:

$$F = m\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{F}{m} = \frac{-4Nt}{2kgr} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = -2m/sec^2}$$

γ. Κατά την κίνηση του σώματος αυτού ισχύει η Α.Δ.Ε., καθώς η δύναμη που ασκείται είναι συντηρητική. Δηλαδή σε κάθε σημείο ισχύει ότι:

$$E = K + V = \text{σταθ.}$$

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι $V_{(x=6m)} = 12J$, ενώ $V_{(x=7,5m)} = -4J$. Επίσης $K_{(x=6m)} = 0$ αφού το σωμάτιο εκεί ηρεμεί και $K_{(x=7,5m)} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$.

Άρα εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε. στα σημεία $x = 6m$ και $x = 7,5m$ προκύπτει:

$$K_{(x=6m)} + V_{(x=6m)} = K_{(x=7,5m)} + V_{(x=7,5)} \quad \Rightarrow \quad 0 + 12 = \frac{1}{2}\cdot 2\upsilon^2 - 4 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = 16 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = 4m/sec}$$

δ. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι $V_{(x=0)}=0$ και $V_{(x=3,25m)}=9J$, ενώ:

$$K_{(x=0)}=\frac{1}{2}m\upsilon_o^{\,2}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5^2=25J \quad \text{και} \quad K_{(x=3,25m)}=\frac{1}{2}m\upsilon^2=\frac{1}{2}\cdot 2\upsilon^2=\upsilon^2$$

Άρα εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε. μεταξύ των θέσεων $x=0$ και $x=3,25m$ προκύπτει:

$$K_{(x=0)}+V_{(x=0)}=K_{(x=3,25m)}+V_{(x=3,25m)} \Rightarrow 25+0=\upsilon^2+9 \Rightarrow$$

$$\upsilon^2=16 \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon=4m/sec}$$

Άσκηση 2η

Σώμα κινείται σε μια διάσταση με δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη σχέση:

$$V(x)=k\left(x^3-x^2-25x+25\right)$$

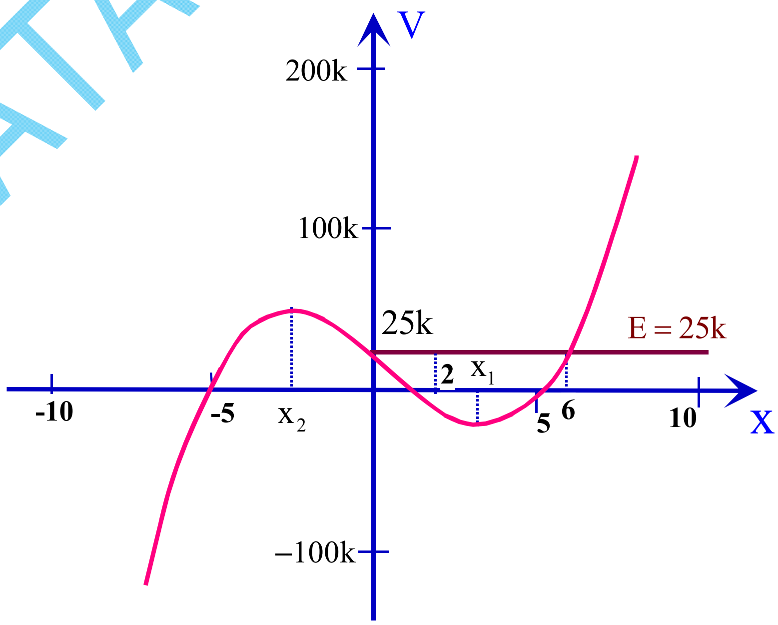
όπου k είναι μια θετική σταθερά.

α. Βρείτε τη δύναμη ως συνάρτηση της θέσης.

β. Βρείτε τα σημεία ισορροπίας, προσδιορίζοντας το είδος της.

γ. Αν κάποια χρονική στιγμή το σώμα βρίσκεται στη θέση $x=2$ με ολική μηχανική ενέργεια $E=25k$, βρείτε τα όρια της κίνησης του σώματος και περιγράψτε εν συντομία την κίνηση του.

Λύση:



α. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι:

$$F=-\frac{dV}{dx}=-k\left(3x^2-2x-25\right) \quad \Rightarrow \quad F=k\left(2x-3x^2+25\right)$$

β. Οι θέσεις ισορροπίας προσδιορίζονται με το μηδενισμό της πρώτης παραγώγου της $V(x)$ ως:

$$\frac{dV}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad k\left(3x^2-2x-25\right)=0 \quad \overset{k\neq 0}{\Rightarrow} \quad 3x^2-2x-25=0 \quad \Rightarrow$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot 3\cdot 25}}{2\cdot 3}=\frac{2\pm\sqrt{304}}{6}=\frac{2\pm 17,4}{6} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x_1=3,2} \quad \text{ή} \quad \boxed{x_2=-2,56} \quad \text{Θ.Ι.}$$

Η δεύτερη παράγωγος της $V(x)$ είναι:

$$\frac{d^2V}{dx^2}=k\left(6x-2\right)$$

Οπότε:

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_1=3,2}=k\left(6\cdot 3,2-2\right)=17,2k>0$$

δηλαδή η θέση $x_1=3,2$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας (αφού εκεί παρουσιάζει ελάχιστο η $V(x)$).

και:

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x_2=-2,56}=k\left[6\cdot\left(-2,56\right)-2\right]=-17,36k<0$$

δηλαδή η θέση $x_2=-2,56$ είναι θέση ασταθούς ισορροπίας (αφού εκεί παρουσιάζει μέγιστο η $V(x)$).

γ. Για τον προσδιορισμό των ορίων της κίνησης του σώματος όταν έχει ολική ενέργεια $E=25k$ και βρίσκεται στη θέση $x=2$ φέρνουμε μια παράλληλη γραμμή στον άξονα των x που περνά από το $25k$ και βλέπουμε που τέμνει την καμπύλη της δυναμικής ενέργειας. Επομένως η επιτρεπτή περιοχή κίνησης περιορίζεται στα σημεία εκείνα της καμπύλης που αντιστοιχούν σε ενέργεια μικρότερη από $25k$.

Από το διάγραμμα που δίνεται φαίνεται ότι η ευθεία $E=25k$ τέμνει την καμπύλη δυναμικής ενέργειας στα σημεία $x=0$ και $x=6$ στην περιοχή γύρω από την αρχική θέση $x=2$. Άρα, επειδή αρχικά το σώμα είναι στη θέση $x=2$, η επιτρεπτή κίνησης είναι:

$$0 \le x \le 6$$

Επειδή στην περιοχή αυτή η δύναμη συνεχώς τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ευσταθούς ισορροπίας του, αυτό θα εκτελεί ταλάντωση γύρω από το σημείο ευσταθούς ισορροπίας $x_1 = 3,2$.

Άσκηση 3η

Η δυναμική ενέργεια που αντιστοιχεί σε ένα διατομικό μόριο δίνεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση:

$$U(r) = U_o\left[\left(\frac{r_o}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_o}{r}\right)^{6}\right]$$

όπου U_o και r_o θετικές σταθερές και r η απόσταση των δυο ατόμων.

α. Βρείτε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το ένα άτομο στο άλλο συναρτήσει της απόστασης τους r.

β. Σε ποια απόσταση μπορεί να ισορροπήσει το σύστημα των δυο ατόμων και τι είδους ισορροπία είναι αυτή;

γ. Πόση ενέργεια χρειάζεται για να διασπαστεί το μόριο;

(Εξετάσεις ΦΥΕ 14 Ιούλιος 2003).

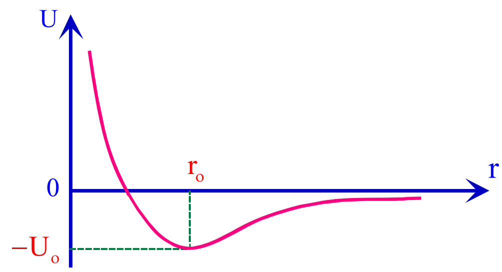
Λύση:

α. Είναι:

$$F = -\frac{dU}{dr} = -U_o\left[r_o^{12}(-12)r^{-13} - 2r_o^{6}(-6)r^{-7}\right] =$$

$$= -U_o\left[-12\frac{r_o^{12}}{r^{13}} + 12\frac{r_o^{6}}{r^{7}}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{F = 12U_o\frac{r_o^{6}}{r^{7}}\left(\frac{r_o^{6}}{r^{6}} - 1\right)}$$



β. Το σώμα ισορροπεί όταν:

$$\frac{dU}{dr} = 0 \Rightarrow U_o\left[-12\frac{r_o^{12}}{r^{13}} + 12\frac{r_o^{6}}{r^{7}}\right] = 0 \Rightarrow \cancel{12}\frac{r_o^{12}}{r^{13}} = \cancel{12}\frac{r_o^{6}}{r^{7}} \Rightarrow$$

$$\frac{r_o^{6}}{r^{6}} = 1 \Rightarrow r^6 = r_o^6 \Rightarrow$$

$$\boxed{r = r_o} \quad \text{Θ.Ι.}$$

Είναι:

$$\frac{d^2U}{dr^2}=U_o\left[-12r_o^{12}(-13)r^{-14}+12r_o^{6}(-7)r^{-8}\right]=U_o\left[156\frac{r_o^{12}}{r^{14}}-84\frac{r_o^{6}}{r^{8}}\right]$$

Άρα:

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_o}=U_o\left[156\frac{r_o^{12}}{r_o^{14}}-84\frac{r_o^{6}}{r_o^{8}}\right]=72\frac{U_o}{r_o^{2}}>0$$

Δηλαδή η θέση $r=r_o$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.

γ. Για να διασπαστεί το μόριο θα πρέπει να του δώσουμε κινητική ενέργεια όταν βρίσκεται στη θέση ισορροπίας, έτσι ώστε το ελεύθερο άτομο να διαφύγει στο άπειρο.

Είναι:

$$U_{(r=r_o)}=-U_o \quad \text{και} \quad U_{(\infty)}=0$$

οπότε εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ε. μεταξύ των θέσεων $r=r_o$ και $r\to\infty$ προκύπτει:

$$K_{(r_o)}+U_{(r_o)}=K_{(\infty)}+U_{(\infty)} \quad\Rightarrow\quad K_{(r_o)}-U_o=K_{(\infty)}+0 \qquad (1)$$

Αλλά πρέπει:

$$K_{(\infty)}\geq 0$$

οπότε η (1) δίνει:

$$K_{(r_o)}-U_o\geq 0 \quad\Rightarrow\quad K_{(r_o)}\geq U_o$$

Άρα η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να δώσουμε για να διασπαστεί το μόριο είναι U_o.

<u>Άσκηση 4η</u>

Ένα σωμάτιο δέχεται μια διατηρητική δύναμη που συνδέεται με τη δυναμική του ενέργεια, η οποία ακολουθεί τη σχέση:

$$V(x)=3x^2-x^3 \quad (\text{το } x \text{ σε } m)$$

α. Δώστε το διάγραμμα της $V(x)$.

β. Προσδιορίστε τη δύναμη που ασκείται πάνω στο σωματίδιο. Ποια είναι η φορά της σε κατάλληλα διαστήματα της μεταβλητής x;

γ. Να βρεθούν οι θέσεις ισορροπίας και το είδος της ισορροπίας σε κάθε θέση.

<u>Λύση:</u>

α. Για το σχεδιασμό του διαγράμματος της $V(x)$ πρέπει να γίνει η μελέτη της συνάρτησης $V(x)$, δηλαδή να προσδιοριστούν τα ακρότατα της (μέγιστα, ελάχιστα) και να βρεθούν τα σημεία μηδενισμού της $V(x)$ (δηλαδή τα σημεία τομής της καμπύλης $V(x)$ και του άξονα των x).

Μελέτη της $V(x)$:

Είναι:

$$\frac{dV}{dx}=0 \quad\Rightarrow\quad 6x-3x^2=0 \quad\Rightarrow\quad 3x(2-x)=0 \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}}_{\textbf{ακρότατα}}$$

Είναι:

$$\frac{d^2V}{dx^2}=6-6x$$

Οπότε:

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0}=6>0,$$ δηλαδή το $x=0$ είναι σημείο ελαχίστου.

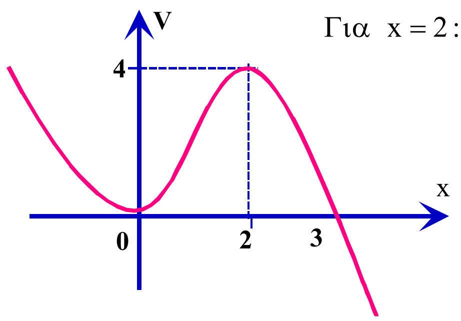
και

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=2}=6-6\cdot 2=-6<0,$$ δηλαδή το $x=2$ είναι σημείο μεγίστου.

Η $V(x)$ μηδενίζεται όταν:

$$V(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 3x^2-x^3=0 \quad\Rightarrow\quad x^2(3-x)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x=0\\x=3\end{cases}$$

Άρα το διάγραμμα της $V(x)$ είναι το ακόλουθο:



Για $x=2$: $V_{(x=2)}=3\cdot 2^2-2^3=$
$=3\cdot 4-8=12-8=4$

β. Η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο είναι:

$$F=-\frac{dV}{dx} \quad\Rightarrow\quad F=-\left(6x-3x^2\right) \quad\Rightarrow\quad F=3x^2-6x$$

Η δύναμη θα έχει φορά προς τα αρνητικά του άξονα x όταν:

$$F<0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2-6x<0 \quad \Rightarrow \quad 3x(x-2)<0 \quad \Rightarrow$$

$$0<x<2$$

Ενώ αντίθετα θα έχει φορά προς τα θετικά του άξονα x όταν:

$$F>0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2-6x>0 \quad \Rightarrow \quad 3x(x-2)>0 \quad \Rightarrow$$

$$x<0 \quad ή \quad x>2$$

γ. Οι θέσεις ισορροπίας είναι τα σημεία ακρότατων, όπως προσδιορίστηκαν στο ερώτημα (α).

Άρα το $x=0$ είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας και το $x=2$ είναι θέση ασταθούς ισορροπίας.

Άσκηση 5η

Υλικό σημείο μάζας $m = 4kg$ κινείται σε διατηρητικό πεδίο με δυναμική ενέργεια $U(x) = x^2$ (Joule). Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και το είδος τους και να σχεδιαστεί η $U(x)$. Ποιες είναι οι επιτρεπτές τιμές ενέργειας του σωματιδίου; Να μελετηθεί η κίνησή του σωματιδίου για διάφορες τιμές της ενέργειας E.

Λύση:

Σημεία Ισορροπίας: $U'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

Άρα υπάρχει ένα μόνο σημείο ισορροπίας το $x_0 = 0$.

Είδος Σ. Ι.: $U''(x) = 2 \Rightarrow U''(0) = 2 > 0$

Άρα το Σ. Ι. $x_0 = 0$ είναι ευσταθές.

Γραφική παράσταση

Η $U(x) = x^2$ είναι, ως γνωστό, παραβολή με τα κοίλα προς τα πάνω και με ελάχιστο στο σημείο $(0,0)$.

Όρια Κίνησης και επιτρεπτές τιμές ενέργειας

$E = K + U \Rightarrow K = E - U \geq 0 \Rightarrow U \leq E \Rightarrow x^2 \leq E$ (1)

Από την (1) συνεπάγεται ότι: $E \geq U = x^2 \Rightarrow E \geq 0$, δηλαδή το σωματίδιο μπορεί να έχει μόνο θετικές τιμές ενέργειας ώστε να είναι δυνατή η κίνησή του στο διατηρητικό πεδίο με δυναμική ενέργεια $U(x) = x^2$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $E < 0$

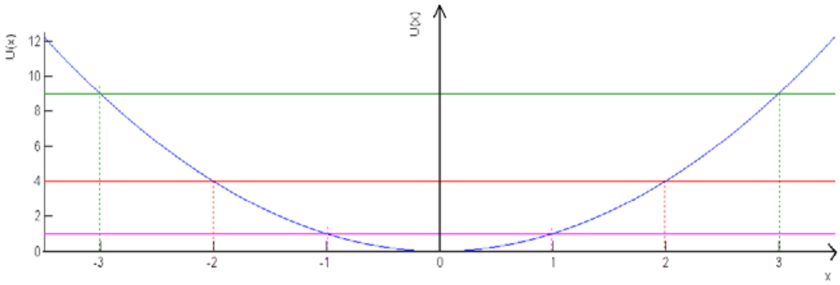
Απαγορεύεται διότι είναι αδύνατο να ικανοποιηθεί η (1), αφού $U = x^2 \geq 0$

Περίπτωση 2: $E = 0$

Α.Δ.Μ.Ε.: $E = K + U \overset{E=0}{\Rightarrow} K = -U$ (2)

Όμως $K=(1/2)mu^2 \geq 0$ και $-U=-x^2 \leq 0$ και άρα ο μόνος τρόπος να ικανοποιείται η (2) είναι εφόσον $K=0=U \Rightarrow u=0=x$.

Επομένως, στην ειδική περίπτωση που $E=0$, το σωματίδιο επιτρέπεται να βρεθεί σε μια μόνο θέση, τη θέση ισορροπίας $x_0=0$ και μάλιστα ακίνητο ($u=0$).



<u>Περίπτωση 3</u>: $E>0$

Το πέρας της κίνησης είναι στα σημεία όπου $U(x)=E$ ή $x^2=E \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\sqrt{E} \\ x_2=+\sqrt{E} \end{cases}$, δηλαδή το σωματίδιο εκεί έχει μηδενική ταχύτητα ($K=0 \Leftrightarrow u=0$).

Η κίνηση επιτρέπεται στην περιοχή που ικανοποιεί την (1): $-\sqrt{E} \leq x \leq +\sqrt{E}$, όπου ισοδύναμα $U(x) \leq E$.

Για κάθε τιμή της ενέργειας $E>0$ το σωματίδιο ταλαντώνεται μεταξύ των θέσεων $x_1=-\sqrt{E}$ και $x_2=+\sqrt{E}$. Κάθε φορά που φθάνει εκεί, η ταχύτητά του μηδενίζεται και η φορά κίνησής του αντιστρέφεται υπό την επίδραση της δύναμης $F=-U'(x)=-2x$, η οποία είναι προς τα αριστερά ($F<0$) για $x>0$ και προς τα δεξιά ($F>0$) για $x<0$.

Η ταλάντωση του σωματιδίου σε ένα πεδίο με $U \propto x^2$ είναι απλή αρμονική, όπως θα δούμε σε επόμενο μάθημα (Ταλαντώσεις – Απλή Αρμονική Ταλάντωση)

9. ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΟΡΜΗΣ – ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Ορμή

Ορίζουμε ως ορμή ενός σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ το φυσικό μέγεθος:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

Ο 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα γενικεύεται στη μορφή:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Παρατηρείστε ότι στην περίπτωση που η μάζα του σώματος διατηρείται σταθερή, η τελευταία έκφραση συμπίπτει με τη γνωστή μορφή:

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}) = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Ορμή Συστήματος Σωμάτων – Αρχή Διατήρησης Ορμής

Ορίζουμε ως ορμή ενός συστήματος N σωμάτων το διανυσματικό άθροισμα των ορμών του κάθε σώματος που περιέχει το σύστημα:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N$$

Όταν ένα σύστημα είναι απομονωμένο, δηλ. δεν ασκούνται σε αυτό εξωτερικές δυνάμεις: $\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = \vec{0}$.

Από τον τρίτο Νόμο του Νεύτωνα οι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος ανά δύο αλληλοεξουδετερώνονται κι έτσι: $\sum \vec{F}_{\varepsilon\sigma} = \vec{0}$.

Έτσι, η ορμή ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = \sigma\tau\alpha\theta.$$ (Αρχή Διατήρησης Ορμής)

Κέντρο Μάζας

Κέντρο μάζας (Κ.Μ.) ενός συστήματος N διακριτών υλικών σημείων ορίζουμε ένα υλικό σημείο με μάζα τη μάζα του συστήματος και θέση:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}, \text{ όπου } M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Η ταχύτητα του Κ.Μ. ισούται με:

$$\vec{\upsilon}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i}{M}$$

Συμπεραίνουμε ότι η ορμή του Κ.Μ. ισούται με τη συνολική ορμή του συστήματος:

$$\vec{p}_{cm} = M\vec{\upsilon}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

Η επιτάχυνση του Κ.Μ. ισούται με:

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{\upsilon}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i}{M} \Rightarrow \sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} + \sum \vec{F}_{\varepsilon\sigma} = M\vec{a}_{cm}$$

Αλλά επειδή από τον 3^o Νόμο του Νεύτωνα οι εσωτερικές δυνάμεις αλληλοαναιρούνται, αφού για κάθε δράση υπάρχει μια ίση και αντίθετη αντίδραση, είναι $\sum \vec{F}_{\varepsilon\sigma} = \vec{0}$ και έτσι:

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\xi} = M\vec{a}_{cm},$$

δηλαδή η κίνηση του Κ.Μ. καθορίζεται μόνο από τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο σύστημα.

Αν στο σύστημα δεν δρουν εξωτερικές δυνάμεις τότε η ορμή του Κ.Μ. διατηρείται:

$$\vec{a}_{cm} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\upsilon}_{cm} = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \vec{p}_{cm} = \sigma\tau\alpha\theta. \text{ (Αρχή Διατήρησης Ορμής)}$$

Ώθηση Δύναμης – Θεώρημα Ώθησης - Ορμής

Ορίζουμε ως ώθηση μιας δύναμης $\vec{F}$ στο χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ το μέγεθος:

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Με χρήση του 2ου Νόμου του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt \Rightarrow \vec{\Omega} = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} \Rightarrow \vec{\Omega} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{\Omega} = \vec{p}_2$$ (Θεώρημα Ώθησης-Ορμής)

Άρα, η ώθηση μιας δύναμης που επιδρά σε ένα σύστημα είναι ίση με τη μεταβολή της ορμής του.

Απουσία δύναμης συνεπάγεται μηδενική ώθηση και άρα διατήρηση της ορμής.

Σύστημα δυο σωμάτων - Κρούσεις

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη ενός απομονωμένου συστήματος 2 σωμάτων που συγκρούονται μεταξύ τους.

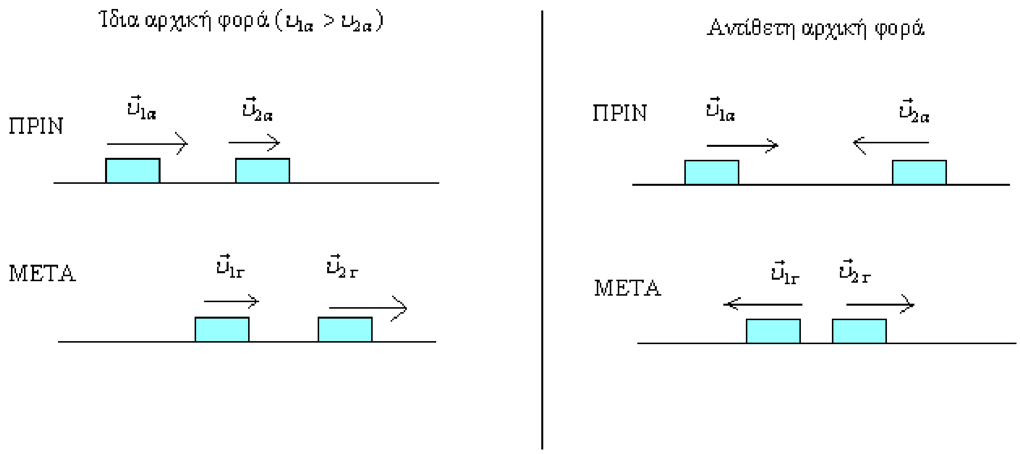
Σε κάθε απομονωμένο σύστημα ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής, δηλ.:

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \sigma\tau\alpha\theta.$ ή $\vec{p}_{1,\alpha\rho\chi} + \vec{p}_{2,\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{1,\tau\varepsilon\lambda} + \vec{p}_{2,\tau\varepsilon\lambda}$

Οι κρούσεις διακρίνονται σε **ελαστικές** ή **ανελαστικές** ανάλογα με το αν διατηρείται ή όχι η ολική κινητική ενέργεια τους συστήματος των σωμάτων που συμμετέχουν στην κρούση. Οι ανελαστικές κρούσεις διακρίνονται με τη σειρά τους σε ημιελαστικές (όταν τα σώματα αποχωρίζονται μετά την κρούση) και πλαστικές (όταν τα σώματα παραμένουν ενωμένα μετά την κρούση)

Επιπλέον, οι κρούσεις μπορούν να διακριθούν σε μετωπικές και πλάγιες ανάλογα με το αν η κίνηση των σωμάτων πριν και μετά την κρούση είναι πάνω στην ίδια ευθεία ή όχι.

Ελαστικές Μετωπικές Κρούσεις



Στην ελαστική κρούση διατηρούνται τόσο η ορμή όσο και η κινητική ενέργεια του συστήματος:

Α.Δ.Ο.:
$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{p}_{1\alpha} + \vec{p}_{2\alpha} = \vec{p}_{1\tau} + \vec{p}_{2\tau} \Rightarrow m_1\vec{\upsilon}_{1\alpha} + m_2\vec{\upsilon}_{2\alpha} = m_1\vec{\upsilon}_{1\tau} + m_2\vec{\upsilon}_{2\tau} \quad (1)$$

Θεωρώντας θετικές τις ταχύτητες προς τα δεξιά και αρνητικές αυτές προς τα αριστερά μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα την (1):

$$m_1\upsilon_{1\alpha} + m_2\upsilon_{2\alpha} = m_1\upsilon_{1\tau} + m_2\upsilon_{2\tau} \quad (1)'$$ ή ισοδύναμα
$$m_1\left(\upsilon_{1\alpha} - \upsilon_{1\tau}\right) = -m_2\left(\upsilon_{2\alpha} - \upsilon_{2\tau}\right) \quad (1)''$$

Α.Δ.Κ.Ε.: $K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow K_{1\alpha} + K_{2\alpha} = K_{1\tau} + K_{2\tau} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2\alpha}^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1\tau}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2\tau}^2 \Rightarrow m_1\left(\upsilon_{1\alpha}^2 - \upsilon_{1\tau}^2\right) = m_2\left(\upsilon_{2\tau}^2 - \upsilon_{2\alpha}^2\right)$$
(2)

Αλλά: $\left(\upsilon_{1\alpha}^2 - \upsilon_{1\tau}^2\right) = \left(\upsilon_{1\alpha} - \upsilon_{1\tau}\right)\cdot\left(\upsilon_{1\alpha} + \upsilon_{1\tau}\right)$

και $\left(\upsilon_{2\alpha}^2 - \upsilon_{2\tau}^2\right) = \left(\upsilon_{2\alpha} - \upsilon_{2\tau}\right)\cdot\left(\upsilon_{2\alpha} + \upsilon_{2\tau}\right)$

οπότε η (2) γράφεται ισοδύναμα ως:

$$m_1(\upsilon_{1\alpha}-\upsilon_{1\tau})\cdot(\upsilon_{1\alpha}+\upsilon_{1\tau})=-m_2(\upsilon_{2\alpha}-\upsilon_{2\tau})\cdot(\upsilon_{2\alpha}+\upsilon_{2\tau})\overset{(1)''}{\Rightarrow}$$

$$\upsilon_{1\alpha}+\upsilon_{1\tau}=\upsilon_{2\alpha}+\upsilon_{2\tau} \quad (3)$$

Αν είναι γνωστές οι μάζες και οι αρχικές ταχύτητες οι (1)΄΄ και (3) αποτελούν σύστημα εξισώσεων που μας οδηγεί στις τελικές ταχύτητες:

$$\left.\begin{array}{r} m_1\upsilon_{1\alpha}-m_1\upsilon_{1\tau}=-m_2\upsilon_{2\alpha}+m_2\upsilon_{2\tau} \\ \upsilon_{2\tau}=\upsilon_{1\alpha}+\upsilon_{1\tau}-\upsilon_{2\alpha} \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} m_1\upsilon_{1\alpha}-m_1\upsilon_{1\tau}=-m_2\upsilon_{2\alpha}+m_2(\upsilon_{1\alpha}+\upsilon_{1\tau}-\upsilon_{2\alpha}) \\ \upsilon_{2\tau}=\upsilon_{1\alpha}-\upsilon_{2\alpha}+\upsilon_{1\tau} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} m_1\upsilon_{1\alpha}-m_1\upsilon_{1\tau}=-m_2\upsilon_{2\alpha}+m_2\upsilon_{1\alpha}+m_2\upsilon_{1\tau}-m_2\upsilon_{2\alpha} \\ \upsilon_{2\tau}=\upsilon_{1\alpha}-\upsilon_{2\alpha}+\upsilon_{1\tau} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} m_1\upsilon_{1\alpha}-m_2\upsilon_{1\alpha}+2m_2\upsilon_{2\alpha}=m_1\upsilon_{1\tau}+m_2\upsilon_{1\tau} \\ \upsilon_{2\tau}=\upsilon_{1\alpha}-\upsilon_{2\alpha}+\upsilon_{1\tau} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} (m_1-m_2)\upsilon_{1\alpha}+2m_2\upsilon_{2\alpha}=(m_1+m_2)\upsilon_{1\tau} \\ \upsilon_{2\tau}=\upsilon_{1\alpha}-\upsilon_{2\alpha}+\upsilon_{1\tau} \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} \upsilon_{1\tau}=\dfrac{(m_1-m_2)\upsilon_{1\alpha}+2m_2\upsilon_{2\alpha}}{m_1+m_2} \\ \upsilon_{2\tau}=\dfrac{(m_2-m_1)\upsilon_{2\alpha}+2m_1\upsilon_{1\alpha}}{m_1+m_2} \end{array}$$

(4)

Παρατήρηση:

Οι σχέσεις (4) είναι οι σχέσεις (3.48) του βιβλίου.

Η απόδειξη αυτών των σχέσεων (που ανάλογα με το πρόβλημα μπορεί να είναι και απλούστερες, π.χ. αν κάποια ταχύτητα είναι μηδενική) θα πρέπει να γίνεται κάθε φορά που λύνουμε ένα πρόβλημα ελαστικής κρούσης. Τα βήματα είναι:

1. Εφαρμογή της Α.Δ.Ο.: εξαγωγή της (1)

2. Εφαρμογή της Α.Δ.Κ.Ε.: εξαγωγή της (2)

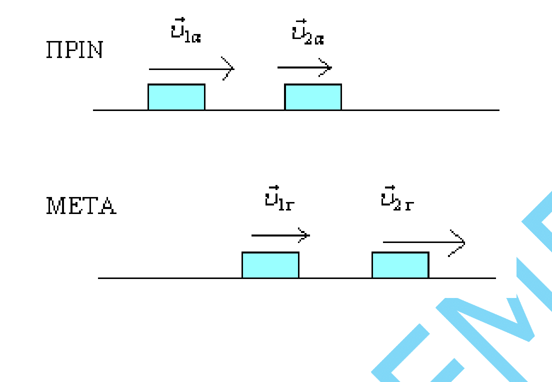
3. συνδυασμός των (1) και (2) για εξαγωγή της (3) με τη βοήθεια της ταυτότητας διαφοράς τετραγώνων

4. Λύση του συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (1) και (3) με όποια μέθοδο επιθυμούμε (αντικατάστασης ή αντίθετων συντελεστών ή Cramer-οριζουσών)

ή ισοδύναμα αλλά με λίγο πιο δύσκολες πράξεις (δεν προτείνεται):

3. Λύση Συστήματος 2 εξισώσεων (1) και (2) με μέθοδο αντικατάστασης (όπου η (2) είναι μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση, δηλ. έχει τετράγωνα ταχυτήτων)

<u>Παράδειγμα 1 (αρχική κίνηση με την ίδια φορά)</u>



Θεωρούμε δυο μάζες $m_1 = 2kg$, $m_2 = 1kg$ που κινούνται αρχικά προς τα δεξιά με αντίστοιχες ταχύτητες μέτρων $|\vec{\upsilon}_{1a}| = 2m/s$ και $|\vec{\upsilon}_{2a}| = 1m/s$.

Με την διαδικασία που περιγράψαμε πριν καταλήγουμε στις σχέσεις (4).

Επειδή και τα δυο σώματα κινούνται προς τα δεξιά αντικαθιστούμε:

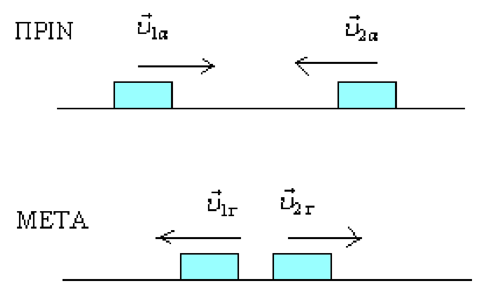
$\upsilon_{1a} = +2m/s$ και $\upsilon_{2a} = +1m/s$

οπότε παίρνουμε από τις σχέσεις (4) :

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{1\tau} &= \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_{1\alpha} + 2m_2\upsilon_{2\alpha}}{m_1 + m_2} \\ \upsilon_{2\tau} &= \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_{2\alpha} + 2m_1\upsilon_{1\alpha}}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \upsilon_{1\tau} &= \frac{(2-1)kg2m/s + 2\cdot 1kg\cdot 1m/s}{(2+1)kg} \\ \upsilon_{2\tau} &= \frac{(1-2)kg1m/s + 2\cdot 2kg2m/s}{(2+1)kg} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \upsilon_{1\tau} &= \frac{4}{3}m/s \\ \upsilon_{2\tau} &= \frac{7}{3}m/s \end{aligned}$$

Και οι δυο ταχύτητες μετά την κρούση προκύπτουν θετικές και άρα τα σώματα κινούνται επίσης προς τα δεξιά μετά την κρούση τους.

Παράδειγμα 2 (αρχική κίνηση με αντίθετη φορά)



Θεωρούμε δυο μάζες $m_1 = 2kg$, $m_2 = 1kg$ που κινούνται αρχικά αντίθετα με αντίστοιχες ταχύτητες μέτρων $|\vec{\upsilon}_{1a}| = 1m/s$ και $|\vec{\upsilon}_{2a}| = 1m/s$.

Με την διαδικασία που περιγράψαμε πριν καταλήγουμε στις σχέσεις (4).

Επειδή το σώμα 1 κινείται προς τα δεξιά, παίρνουμε την ταχύτητά του θετική, ενώ, επειδή το σώμα 2 κινείται προς τα αριστερά, λαμβάνουμε την ταχύτητά του ως αρνητική, δηλαδή:

$\upsilon_{1a} = +1m/s$ και $\upsilon_{2a} = -1m/s$

οπότε παίρνουμε από τις σχέσεις (4):

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_{1\tau} &= \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_{1\alpha} + 2m_2\upsilon_{2\alpha}}{m_1 + m_2} \\ \upsilon_{2\tau} &= \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_{2\alpha} + 2m_1\upsilon_{1\alpha}}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \upsilon_{1\tau} &= \frac{(2-1)kg1m/s + 2\cdot 1kg\cdot(-1m/s)}{(2+1)kg} \\ \upsilon_{2\tau} &= \frac{(1-2)kg(-1m/s) + 2\cdot 2kg1m/s}{(2+1)kg} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \upsilon_{1\tau} &= -\frac{1}{3}m/s \\ \upsilon_{2\tau} &= \frac{5}{3}m/s \end{aligned}$$

Από τα πρόσημα των τελικών ταχυτήτων συμπεραίνουμε ότι μετά την κρούση το σώμα 1 κινείται προς τα αριστερά, ενώ το σώμα 2 προς τα δεξιά.

Παράδειγμα 3 (Κρούση ίσων μαζών)

Δυο σώματα ίσων μαζών κινούνται στην ίδια ευθεία πλησιάζοντας το ένα στο άλλο και συγκρούονται ελαστικά. Να βρεθούν οι ταχύτητές τους μετά την κρούση ανεξάρτητα από το αν αρχικά κινούνται στην ίδια φορά ή αντίθετα.

Λύση

Η **Α.Δ.Ο.** και η **Α.Δ.Κ.Ε.** θα μας οδηγήσουν στις σχέσεις (4):

$$\upsilon_{1\tau} = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_{1\alpha} + 2m_2\upsilon_{2\alpha}}{m_1 + m_2}$$
$$\upsilon_{2\tau} = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_{2\alpha} + 2m_1\upsilon_{1\alpha}}{m_1 + m_2}$$

Θέτοντας $m_1 = m_2$ παίρνουμε:

$$\upsilon_{1\tau} = \upsilon_{2\alpha}$$
$$\upsilon_{2\tau} = \upsilon_{1\alpha}$$

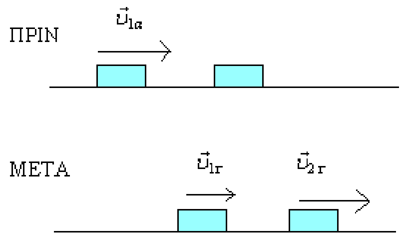
δηλαδή τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες.

Παράδειγμα 4 (μετωπική ελαστική κρούση με ακίνητη μάζα)

Σώμα μάζας m_1 συκρούεται ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2. Να βρεθούν οι ταχύτητές των σωμάτων μετά την κρούση, αν θεωρήσουμε την κρούση μετωπική. Ποια είναι η φορά κίνησης των δυο σωμάτων μετά την κρούση;

Λύση

Όπως έχουμε τονίσει και πριν, οι σχέσεις (4) θα πρέπει να αποδεικνύονται σε κάθε περίπτωση. Σε αυτό το παράδειγμα, επειδή $\upsilon_{2\alpha} = 0$, οι πράξεις θα είναι απλούστερες.



Α.Δ.Ο.:
$$m_1\vec{\upsilon}_{1\alpha} = m_1\vec{\upsilon}_{1\tau} + m_2\vec{\upsilon}_{2\tau} \Rightarrow m_1\upsilon_{1\alpha} = m_1\upsilon_{1\tau} + m_2\upsilon_{2\tau} \Rightarrow m_1(\upsilon_{1\alpha} - \upsilon_{1\tau}) = m_2\upsilon_{2\tau} \quad (1)$$

Α.Δ.Κ.Ε.: $\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1\alpha}^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1\tau}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2\tau}^2 \Rightarrow m_1(\upsilon_{1\alpha}^2 - \upsilon_{1\tau}^2) = m_2\upsilon_{2\tau}^2 \quad (2)$

Αλλά: $(\upsilon_{1\alpha}^2 - \upsilon_{1\tau}^2) = (\upsilon_{1\alpha} - \upsilon_{1\tau})\cdot(\upsilon_{1\alpha} + \upsilon_{1\tau})$

οπότε η (2) γράφεται ισοδύναμα ως:

$$m_1\left(\upsilon_{1\alpha}-\upsilon_{1\tau}\right)\cdot\left(\upsilon_{1\alpha}+\upsilon_{1\tau}\right)=m_2\upsilon_{2\tau}^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\upsilon_{1\alpha}+\upsilon_{1\tau}=\upsilon_{2\tau}} \quad (3)$$

Οι (1) και (3) αποτελούν αλγεβρικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους: τις τελικές ταχύτητες. Με απλή μέθοδο αντικατάστασης παίρνουμε:

$$\left.\begin{matrix} m_1\upsilon_{1\alpha}-m_1\upsilon_{1\tau}=m_2\upsilon_{2\tau} \\ \upsilon_{2\tau}=\upsilon_{1\alpha}+\upsilon_{1\tau}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} m_1\upsilon_{1\alpha}-m_1\upsilon_{1\tau}=m_2\left(\upsilon_{1\alpha}+\upsilon_{1\tau}\right) \\ \upsilon_{2\tau}=\upsilon_{1\alpha}+\upsilon_{1\tau}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} m_1\upsilon_{1\alpha}-m_1\upsilon_{1\tau}=m_2\upsilon_{1\alpha}+m_2\upsilon_{1\tau} \\ \upsilon_{2\tau}=\upsilon_{1\alpha}+\upsilon_{1\tau}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix} \left(m_1-m_2\right)\upsilon_{1\alpha}=\left(m_1+m_2\right)\upsilon_{1\tau} \\ \upsilon_{2\tau}=\upsilon_{1\alpha}+\upsilon_{1\tau}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \upsilon_{1\tau}=\left(\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)\upsilon_{1\alpha} \\ \upsilon_{2\tau}=\upsilon_{1\alpha}+\left(\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)\upsilon_{1\alpha}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \upsilon_{1\tau}=\left(\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)\upsilon_{1\alpha} \\ \upsilon_{2\tau}=\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{1\alpha}\end{matrix}} \quad (4)$$

Η ταχύτητα του 2^{ου} σώματος είναι στην κατεύθυνση αρχικής κίνησης του 1^{ου} σώματος: $\vec{\upsilon}_{2\tau}\uparrow\uparrow\vec{\upsilon}_{1\alpha}$, αφού $2m_1/(m_1+m_2)>0$.

Η ταχύτητα του 1^{ου} σώματος έχει φορά που εξαρτάται από τη διαφορά μαζών, δηλαδή αν $m_1>m_2$ τότε $\vec{\upsilon}_{1\tau}\uparrow\uparrow\vec{\upsilon}_{1\alpha}$, ενώ αν $m_1<m_2$ τότε $\vec{\upsilon}_{1\tau}\uparrow\downarrow\vec{\upsilon}_{1\alpha}$.

Στην ειδική περίπτωση που τα σώματα έχουν ίσες μάζες: $\upsilon_{1\tau}=0$ και $\upsilon_{2\tau}=\upsilon_{1\alpha}$, δηλ. τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες σε συμφωνία με το γενικότερο παράδειγμα 3.

<u>Παράδειγμα 5 (ελαστική κρούση με τοίχο)</u>

Λύστε την προηγούμενη άσκηση θεωρώντας το σώμα μάζας m_2 ακίνητο τοίχο.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε $m_2 \gg m_1$ ή $m_2\to\infty$, οπότε οι σχέσεις (4) του προηγούμενου παραδείγματος δίνουν:

$$\upsilon_{1\tau}=\frac{\left(m_1-m_2\right)}{m_1+m_2}\upsilon_{1\alpha}\Rightarrow\upsilon_{1\tau}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{1\alpha}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{1\alpha}\overset{m_2\to\infty}{=}0-\frac{m_2}{m_2}\upsilon_{1\alpha}=-\upsilon_{1\alpha}$$

$$\upsilon_{2\tau} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{1\alpha} \overset{m_2\to\infty}{=} 0$$

δηλαδή το σώμα που συγκρούεται με τον τοίχο απλά αλλάζει φορά κίνησης διατηρώντας το ίδιο μέτρο ταχύτητας με την αρχική, ενώ ο τοίχος πρακτικά μένει ακίνητος.

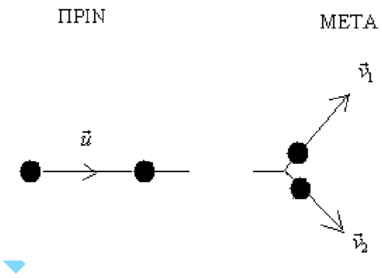
<u>Παράδειγμα 6 (Πλάγια ελαστική κρούση μαζών)</u>

Σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται ελαστικά και πλάγια με ακίνητη σφαίρα ίσης μάζας $m_2 = m_1$. Να δείξετε ότι οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση είναι κάθετες μεταξύ τους.

<u>Λύση</u>

Στις πλάγιες ελαστικές κρούσεις εφαρμόζουμε και πάλι την Α.Δ.Ο. μόνο που τώρα πρέπει να εργαστούμε είτε διανυσματικά, είτε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Ο. σε κάθε άξονα. Το παράδειγμα αυτό λύνεται στο βιβλίο (σελ. 59-62). Εδώ θα σας αποδείξουμε το ίδιο αποτέλεσμα πολύ πιο γρήγορα εργαζόμενοι διανυσματικά!

Έστω $\vec{\upsilon}_{1\alpha} = \vec{u}$ η αρχική ταχύτητα της σφαίρας 1. Μετά την κρούση η σφαίρα 1 θα έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{1\tau} = \vec{v}_1$ και η σφαίρα 2 ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{2\tau} = \vec{v}_2$.



Α.Δ.Ο.: $m_1\vec{u} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \overset{m_1=m_2}{\Rightarrow}$ $\vec{u} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (1)

Α.Δ.Κ.Ε.: $\frac{1}{2}m_1u^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \overset{m_1=m_2}{\Rightarrow} u^2 = v_1^2 + v_2^2$ (2)

Υψώνοντας την (1) στο τετράγωνο παίρνουμε: $\vec{u}^2 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2 \Rightarrow$

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{v}_1\cdot\vec{v}_1 + \vec{v}_2\cdot\vec{v}_2 + 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 \Rightarrow u^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 \overset{(2)}{\Rightarrow} \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$$

Πλαστικές Κρούσεις Γενικά (ευθεία, επίπεδο, χώρος)

Μια κρούση ονομάζεται πλαστική, όταν μετά από αυτή τα δυο σώματα που συγκρούονται συνεχίζουν την κίνησή τους ως συσσωμάτωμα.

Από την *Αρχή Διατήρησης της Ορμής* παίρνουμε:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow \vec{p}_{1α} + \vec{p}_{2α} = \vec{p}_{τ} \Rightarrow m_1\vec{υ}_{1α} + m_2\vec{υ}_{2α} = (m_1 + m_2)\vec{υ}_{τ} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{υ}_{τ} = \frac{m_1\vec{υ}_{1α} + m_2\vec{υ}_{2α}}{m_1 + m_2}} \quad (1)$$

Παρατηρείστε ότι το αποτέλεσμα αυτό ισχύει είτε σε ευθεία μετωπική πλαστική κρούση είτε σε πλάγια πλαστική κρούση (επίπεδο ή χώρος), οπότε και μπορούμε να γράψουμε σε συνιστώσες την (1) αφού αναλύσουμε τις διάφορες ταχύτητες σε άξονες.

Σε μια πλαστική κρούση η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται εν γένει. Η απώλεια κινητικής ενέργειας οφείλεται στην εμφάνιση μη συντηρητικών δυνάμεων τριβής κατά την κρούση και εμφανίζεται με τη μορφή θερμότητας:

$$ΔK = K_{τελ} - K_{αρχ} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)υ_{τ}^2 - \left(\frac{1}{2}m_1υ_{1α}^2 + \frac{1}{2}m_2υ_{2α}^2\right) \overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$ΔK = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1\vec{υ}_{1α} + m_2\vec{υ}_{2α}}{m_1 + m_2}\right)^2 - \left(\frac{m_1υ_{1α}^2 + m_2υ_{2α}^2}{2}\right) \Rightarrow$$

$$ΔK = \frac{(m_1\vec{υ}_{1α} + m_2\vec{υ}_{2α})^2 - (m_1 + m_2)(m_1υ_{1α}^2 + m_2υ_{2α}^2)}{2(m_1 + m_2)} \Rightarrow$$

$$ΔK = \frac{\cancel{m_1^2υ_{1α}^2} + \cancel{m_2^2υ_{2α}^2} + 2m_1m_2\vec{υ}_{1α}\cdot\vec{υ}_{2α} - \cancel{m_1^2υ_{1α}^2} - m_1m_2υ_{1α}^2 - \cancel{m_2^2υ_{2α}^2} - m_1m_2υ_{1τ}^2}{2(m_1 + m_2)} \Rightarrow$$

$$ΔK = -\frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}\left(υ_{1α}^2 - 2\vec{υ}_{1α}\cdot\vec{υ}_{2α} + υ_{1τ}^2\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{ΔK = -\frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{υ}_{1α} - \vec{υ}_{2α})^2 < 0}$$

Η θερμότητα που ελευθερώνεται (παράγεται) κατά την πλαστική κρούση είναι:

$$Q = -\Delta K = +\frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}\left|\vec{\upsilon}_{1\alpha} - \vec{\upsilon}_{2\alpha}\right|^2 > 0$$

Το ποσοστό απώλειας Κ.Ε. είναι: $\dfrac{\Delta K}{K_{\alpha\rho\chi}} = -\dfrac{m_1 m_2 \left(\vec{\upsilon}_{1\alpha} - \vec{\upsilon}_{2\alpha}\right)^2}{(m_1+m_2)\left(m_1\upsilon_{1\alpha}^2 + m_2\upsilon_{2\alpha}^2\right)} < 0$

9.1 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

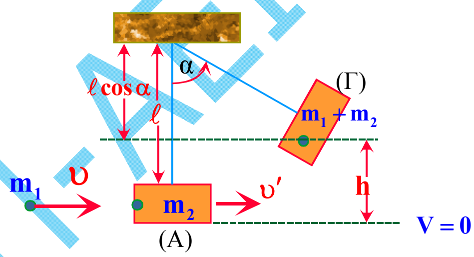
Άσκηση 1η

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα ενός βλήματος $(m_1 = 12gr)$, το πυροβολούμε σε ένα κρεμασμένο κουτί με άμμο $(m_2 = 20kgr)$, $\ell = 1m$ που μπορεί να ταλαντώνεται. Εξαιτίας του πυροβολισμού το κουτί μετακινείται κατά μια γωνία $\alpha = 10^o$.

α. Πόση είναι η κινητική ενέργεια μετά τη βολή σα συνάρτηση της αρχικής κινητικής ενέργειας;

β. Ποια είναι η ταχύτητα της σφαίρας;

Λύση:



α. Κατά την κρούση το βλήμα συσσωματώνεται στο κουτί και το συσσωμάτωμα αποκτά ταχύτητα υ'. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει:

$$p_{\alpha\rho\chi.} = p_{\tau\varepsilon\lambda.} \quad \Rightarrow$$

$$m_1\upsilon + 0 = (m_1 + m_2)\upsilon' \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon' = \frac{m_1\upsilon}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Άρα η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος είναι:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon'^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\cancel{(m_1 + m_2)}\frac{m_1^2\upsilon^2}{(m_1 + m_2)^{\cancel{2}}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\frac{1}{2}m_1\upsilon^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{K = \frac{m_1}{m_1 + m_2}K_{\alpha\rho\chi.}} \quad \Rightarrow \quad K = 6 \cdot 10^{-4}K_{\alpha\rho\chi.}$$

όπου $K_{\alpha\rho\chi.} = \frac{1}{2}m_1\upsilon^2$ η αρχική κινητική ενέργεια του βλήματος.

β. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την κίνηση του συσσωματώματος από την αρχική θέση Α ως τη θέση που σταματά Γ προκύπτει:

$$K_A + V_A = K_\Gamma + V_\Gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon'^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2)gh \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon' = \sqrt{2gh} \quad (2)$$

Αλλά: $h = \ell - \ell\cos\alpha = \ell(1 - \cos\alpha)$ οπότε η (2) γίνεται:

$$\upsilon' = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{m_1\upsilon}{m_1+m_2} = \sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} \Rightarrow$$

$$\upsilon = \frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)} = \frac{0,012+20}{0,012}\sqrt{2\cdot 10\cdot 1(1-\cos 10^o)} =$$

$$\frac{20,012}{0,012}\sqrt{20(1-0,98)} = 1668\cdot\sqrt{0,4} \Rightarrow$$

$$\upsilon = 1055 m/sec$$

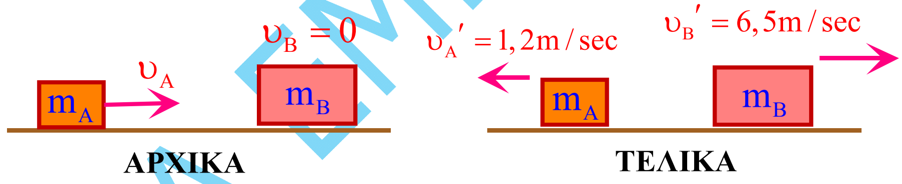
Άσκηση 2η

Πάνω σε μια λεία οριζόντια επιφάνεια η μάζα Α $(3kgr)$ κινείται προς τη μάζα Β $(5kgr)$, η οποία είναι αρχικά ακίνητη. Μετά τη σύγκρουση, η μάζα Α έχει ταχύτητα $1,2m/sec$ προς τα' αριστερά και η Β $6,5m/sec$ προς τα δεξιά.

α. Ποια ήταν η ταχύτητα της Α αρχικά;

β. Υπολογίστε τη μεταβολή στην ολική κινητική ενέργεια του συστήματος που συμβαίνει κατά τη σύγκρουση.

Λύση:



α. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση προκύπτει:

$$p_{αρχ.} = p_{τελ.} \Rightarrow m_A\upsilon_A + m_B\cdot 0 = -m_A\upsilon_A' + m_B\upsilon_B' \Rightarrow$$

$$3\upsilon_A = -3\cdot 1,2 + 5\cdot 6,5 \Rightarrow 3\upsilon_A = -3,6+32,5 \Rightarrow 3\upsilon_A = 28,9 \Rightarrow$$

$$\upsilon_A = \frac{28,9}{3} \Rightarrow \boxed{\upsilon_A = 9,63m/sec}$$

β. Η μεταβολή της ολικής κινητικής ενέργειας που συμβαίνει κατά την κρούση είναι:

$$K_{αρχ.} - K_{τελ.} = \frac{1}{2}m_A\upsilon_A^2 - \frac{1}{2}m_A\upsilon_A'^2 - \frac{1}{2}m_B\upsilon_B'^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 9,63^2 - \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1,2^2 - \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6,5^2 = 139,1 - 2,16 - 105,62 \Rightarrow$$

$$K_{αρχ.} - K_{τελ.} = 31,32 Joule$$

Άσκηση 3η

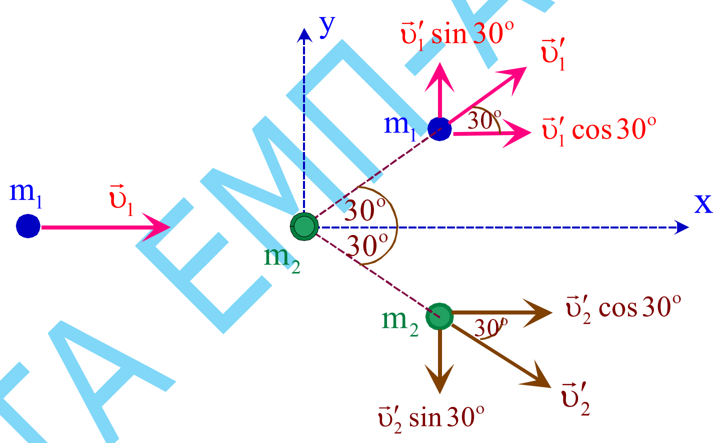
Ένα σώμα μάζας m_1 κινείται στον άξονα x με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$, συγκρούεται με ακίνητο σώμα του οποίου η μάζα m_2 δεν είναι γνωστή. Μετά την κρούση, το σώμα που έχει μάζα m_1 παρεκκλίνει από την πορεία του προς τα επάνω κατά 30^o, ενώ το δεύτερο σώμα κινείται υπό γωνία 30^o κάτω από τον άξονα x, όπως δείχνει το σχήμα. Η κρούση είναι ελαστική.

α. Να βρείτε τη μάζα m_2 συναρτήσει της m_1, καθώς και τις τελικές ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1'$, $\vec{\upsilon}_2'$.

β. Να βρείτε τις ταχύτητες των δυο σωματιδίων πριν και μετά την κρούση στο σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας.

Λύση:

α.



Εφαρμόζοντας την Α.Δ.Ο. στους άξονες x και y προκύπτει:

x: $p_{x\ \alpha\rho\chi.} = p_{x\ \tau\varepsilon\lambda.} \Rightarrow m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' \cos 30^o + m_2\upsilon_2' \cos 30^o \Rightarrow$

$$m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' \frac{\sqrt{3}}{2} + m_2\upsilon_2' \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

y: $p_{y\ \alpha\rho\chi.} = p_{y\ \tau\varepsilon\lambda.} \Rightarrow$

$0 = m_1\upsilon_1' \sin 30^o - m_2\upsilon_2' \sin 30^o \Rightarrow$

$$m_1 \frac{\upsilon_1'}{2} = m_2 \frac{\upsilon_2'}{2} \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{m_2}{m_1}\upsilon_2' \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει:

$$m_1\upsilon_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(m_2\upsilon_2'+m_2\upsilon_2'\right)\quad\Rightarrow\quad m_1\upsilon_1=\sqrt{3}m_2\upsilon_2'\quad\Rightarrow\quad \upsilon_2'=\frac{m_1}{\sqrt{3}m_2}\upsilon_1$$

(3)

Άρα η (2) λόγω της (3) δίνει: $\upsilon_1'=\frac{\cancel{m_2}}{\cancel{m_1}}\cdot\frac{\cancel{m_1}}{\sqrt{3}\,\cancel{m_2}}\upsilon_1\Rightarrow$

$$\boxed{\upsilon_1'=\frac{\upsilon_1}{\sqrt{3}}}\qquad(4)$$

Λόγω της ελαστικής κρούσης ισχύει η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$K_{αρχ.}=K_{τελ.}\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^{\,2}=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2\overset{(3),(4)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m_1}\cancel{\upsilon_1^2}=\frac{1}{2}\cancel{m_1}\frac{\cancel{\upsilon_1^2}}{3}+\frac{1}{2}\cancel{m_2}\frac{m_1^{\cancel{2}}}{3m_2^{\cancel{2}}}\cancel{\upsilon_1^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{m_1}{6m_2}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{m_1}{6m_2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}\quad\Rightarrow\quad\frac{m_1}{m_2}=2\quad\Rightarrow\quad\boxed{m_2=\frac{m_1}{2}}\qquad(5)$$

Και η (3) λόγω της (5), δίνει: $\boxed{\upsilon_2'=\frac{2}{\sqrt{3}}\upsilon_1}$ (6)

β. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_c=\frac{m_1\upsilon_1+m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1\upsilon_1+0}{m_1+\frac{m_1}{2}}\quad\Rightarrow\quad\upsilon_c=\frac{2}{3}\upsilon_1\qquad(7)$$

Προφανώς επειδή το σύστημα είναι απομονωμένο $\left(\Sigma F_{ext}=0\right)$, η ταχύτητα υ_c παραμένει σταθερή και μετά την κρούση.

Οι ταχύτητες των σωματιδίων πριν και μετά την κρούση στο κινούμενο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, είναι σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου:

$$\upsilon_{1\,cm}=\upsilon_1-\upsilon_c\overset{(7)}{=}\upsilon_1-\frac{2}{3}\upsilon_1=\frac{\upsilon_1}{3}$$

$$\upsilon_{2\,cm}=\upsilon_2-\upsilon_c\overset{(7)}{=}0-\frac{2}{3}\upsilon_1=-\frac{2}{3}\upsilon_1$$

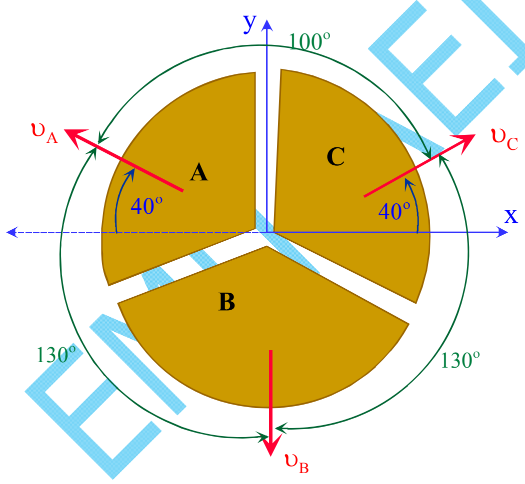
$$\upsilon_{1cm}'=\upsilon_1'-\upsilon_c\overset{(4),(7)}{=}\frac{\upsilon_1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\upsilon_1$$

$$\upsilon'_{2\,cm} = \upsilon'_2 - \upsilon_c \overset{(6),(7)}{=} \frac{2}{\sqrt{3}}\upsilon_1 - \frac{2}{3}\upsilon_1$$

Άσκηση 4η

Μια κροτίδα εκρήγνυται μέσα σε μια καρύδα που σπάει σε 3 κομμάτια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αυτά τα κομμάτια κινούνται χωρίς τριβή πάνω σε μια επιφάνεια. Το κομμάτι C έχει μάζα $m_C = 0,3M$ και ταχύτητα $\upsilon_C = 5m/sec$. Το κομμάτι B έχει μάζα $m_B = 0,2M$. Υπολογίστε την ταχύτητα των τμημάτων A και B.

Λύση:



Επιλέγουμε σύστημα αναφοράς xy τέτοιο ώστε η ταχύτητα υ_B να συμπίπτει με τον άξονα y. Εύκολα υπολογίζεται ότι η γωνία που σχηματίζουν οι ταχύτητες υ_A και υ_C με τον άξονα x είναι 40^o. Επίσης:

$$m_A + m_B + m_C = M \quad \Rightarrow \quad m_A = M - m_B - m_C = M - 0,2M - 0,3M \quad \Rightarrow$$

$$m_A = 0,5M$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής κατά x και y προκύπτει:

x: $$p_{x\ \alpha\rho\chi.} = p_{x\ \tau\varepsilon\lambda.} \quad \Rightarrow \quad 0 = m_C\upsilon_C\cos 40^o - m_A\upsilon_A\cos 40^o$$

$\Rightarrow$

$$m_C\upsilon_C = m_A\upsilon_A \quad \Rightarrow \quad \upsilon_A = \frac{m_C}{m_A}\upsilon_C = \frac{0,3M}{0,5M}\cdot 5 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_A = 3m/sec$$

y: $p_{y\,αρχ.} = p_{y\,τελ.} \Rightarrow$

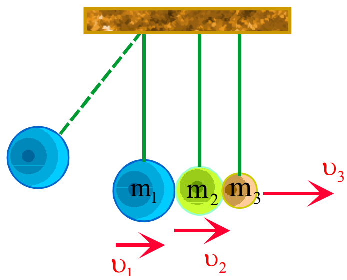
$$0 = m_C\upsilon_C \sin 40^o + m_A\upsilon_A \sin 40^o - m_B\upsilon_B \Rightarrow$$

$$\upsilon_B = \frac{m_C}{m_B}\upsilon_C \sin 40^o + \frac{m_A}{m_B}\upsilon_A \sin 40^o = \left(\frac{0,3\cancel{M}}{0,2\cancel{M}}\cdot 5 + \frac{0,5\cancel{M}}{0,2\cancel{M}}\cdot 3\right)\sin 40^o \Rightarrow$$

$$\upsilon_B = 15\cdot \sin 40^o m/sec = 15\cdot 0,643 \Rightarrow \upsilon_B = 9,645 m/sec$$

Άσκηση 5η

Τρεις ελαστικές σφαίρες των οποίων οι μάζες έχουν αναλογία $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$ είναι κρεμασμένες ώστε να εφάπτονται μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Απομακρύνουμε την μια σφαίρα και την αφήνουμε ελεύθερη ώστε κτυπά τις άλλες δυο σφαίρες με μια ταχύτητα υ_1. Να υπολογιστεί η ταχύτητα απομάκρυνσης της τελευταίας σφαίρας.



Λύση: Σύμφωνα με τη δοθείσα αναλογία των μαζών οι μάζες έχουν τη σχέση:

$$m_1, \quad m_2 = \frac{m_1}{2} \quad και \quad m_3 = \frac{m_1}{4}$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής και της κινητικής ενέργειας (λόγω ελαστικής κρούσης) για τις μάζες m_1 και m_2 υπολογίζουμε την ταχύτητα της δεύτερης σφαίρας μετά την κρούση.

Α.Δ.Ο.: $m_1\upsilon_1 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2 \Rightarrow$

$$\upsilon_1' = \upsilon_1 - \frac{m_2}{m_1}\upsilon_2 \quad (1)$$

υ_1': Η ταχύτητα της πρώτης σφαίρας μετά την κρούση

Α.Δ.Κ.Ε.: $\frac{1}{\cancel{2}}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{\cancel{2}}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{\cancel{2}}m_2\upsilon_2^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$m_1\upsilon_1^2 = m_1\left(\upsilon_1 - \frac{m_2}{m_1}\upsilon_2\right)^2 + m_2\upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{\upsilon_1^2} = \cancel{\upsilon_1^2} + \frac{m_2^2}{m_1^2}\upsilon_2^2 - 2\frac{m_2}{m_1}\upsilon_1\upsilon_2 + \frac{m_2}{m_1}\upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_2^2\left(\frac{m_2^2}{m_1^2} + \frac{m_2}{m_1}\right) - 2\frac{m_2}{m_1}\upsilon_1\upsilon_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \frac{2\dfrac{m_2}{m_1}}{\dfrac{m_2}{m_1}\left(\dfrac{m_2}{m_1}+1\right)}\upsilon_1 = \frac{2\upsilon_1}{\left(\dfrac{\frac{m_1}{2}}{m_1}+1\right)} = \frac{2\upsilon_1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2\upsilon_1}{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2 = \frac{4}{3}\upsilon_1 \quad (2)$$

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία για τις σφαίρες m_2 και m_3 προκύπτει:

Α.Δ.Ο.: $$m_2\upsilon_2 = m_2\upsilon_2' + m_3\upsilon_3 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_2' = \upsilon_2 - \frac{m_3}{m_2}\upsilon_3 \quad (3)$$

Α.Δ.Κ.Ε.: $$\cancel{\frac{1}{2}}m_2\upsilon_2^2 = \cancel{\frac{1}{2}}m_2\upsilon_2'^2 + \cancel{\frac{1}{2}}m_3\upsilon_3^2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$m_2\upsilon_2^2 = m_2\left(\upsilon_2 - \frac{m_3}{m_2}\upsilon_3\right)^2 + m_3\upsilon_3^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{\upsilon_2^2} = \cancel{\upsilon_2^2} + \frac{m_3^2}{m_2^2}\upsilon_3^2 - 2\frac{m_3}{m_2}\upsilon_2\upsilon_3 + \frac{m_3}{m_2}\upsilon_3^2 \Rightarrow$$

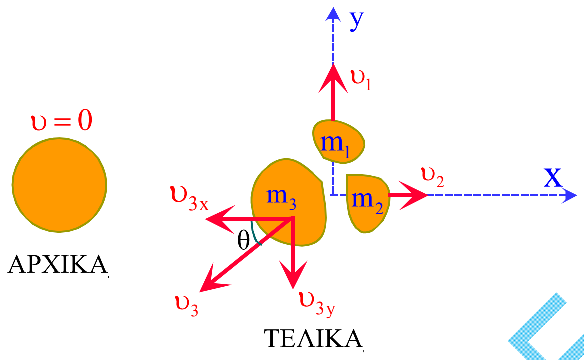
$$\upsilon_3^2\frac{m_3}{m_2}\left(\frac{m_3}{m_2}+1\right) - 2\frac{m_3}{m_2}\upsilon_2\upsilon_3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_3 = \frac{2\upsilon_2}{\frac{m_3}{m_2}+1} \overset{(2)}{=} \frac{2\frac{4}{3}\upsilon_1}{\dfrac{\frac{m_1}{4}}{\frac{m_1}{2}}+1} = \frac{\frac{8}{3}\upsilon_1}{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_3 = \frac{16}{9}\upsilon_1}$$

Άσκηση 6η

Βόμβα είναι ακίνητη σε λείο οριζόντιο επίπεδο και κάποια στιγμή εκρήγνυται σε τρία κομμάτια. Τα δυο κομμάτια με μάζες $m_1 = 2kgr$ και $m_2 = 3kgr$ κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις μεταξύ τους με ταχύτητες μέτρων $\upsilon_1 = 40m/sec$ και $\upsilon_2 = 20m/sec$ αντίστοιχα. Αν το τρίτο κομμάτι έχει μάζα $m_3 = 5kgr$, να υπολογιστεί το μέτρο και η κατεύθυνση της ταχύτητας του.

Λύση:



Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής σε κάθε άξονα προκύπτει:

Α.Δ.Ο.: $\vec{p}_{αρχ.} = \vec{p}_{τελ.} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x: & p_{x\ αρχ.} = p_{x\ τελ} \Rightarrow 0 = m_2\upsilon_2 - m_3\upsilon_{3x} \Rightarrow m_2\upsilon_2 = m_3\upsilon_{3x} \quad (1) \\ y: & p_{y\ αρχ.} = p_{y\ υελ.} \Rightarrow 0 = m_1\upsilon_1 - m_3\upsilon_{3y} \Rightarrow m_1\upsilon_1 = m_3\upsilon_{3y} \quad (2) \end{cases}$$

Αλλά: $\upsilon_{3x} = \upsilon_3 \cos\theta$ και $\upsilon_{3y} = \upsilon_3 \sin\theta$ οπότε οι (1) και (2) δίνουν:

$$m_2\upsilon_2 = m_3\upsilon_3\cos\theta \Rightarrow 3\cdot 20 = 5\upsilon_3\cos\theta \Rightarrow \upsilon_3\cos\theta = 12 \quad (3)$$

$$m_1\upsilon_1 = m_3\upsilon_3\sin\theta \Rightarrow 2\cdot 40 = 5\upsilon_3\sin\theta \quad \upsilon_3\sin\theta = 16 \quad (4)$$

Διαιρώντας τις (3) και (4) κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{16}{12} \Rightarrow \tan\theta = \frac{8}{6} = 1,33 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(1,33) \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta = 53^o}$$

Επομένως η (3) δίνει την υ_3 ως:

$$\upsilon_3 = \frac{12}{\cos 53^o} = \frac{12}{0,6} \qquad \boxed{\upsilon_3 = 20m/sec}$$

<u>Άσκηση 7η</u>

Σφαίρα μάζας $m = 2kgr$ προσκρούει με κατακόρυφη ταχύτητα $\upsilon_1 = 10m/sec$ σε οριζόντιο δάπεδο και αναπηδά με ταχύτητα $\upsilon_2 = 6m/sec$. Η διάρκεια επαφής της σφαίρας με το δάπεδο είναι $\Delta t = 0,1sec$. Να υπολογιστεί:

α. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας.

β. Η μέση δύναμη που δέχεται η σφαίρα από το δάπεδο.

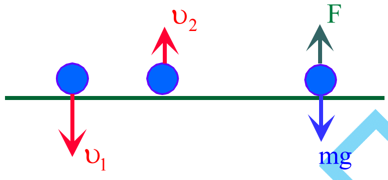
(Δίνεται $g = 10m/sec^2$)

Λύση:

α. Η αρχική ορμής της σφαίρας είναι:

$$p_1 = m\upsilon_1 = 2\cdot 10 \quad \Rightarrow$$

$$p_1 = 20\text{kgr}\cdot\text{m/sec}$$



Ενώ η τελική ορμή, μετά την αναπήδηση της σφαίρας είναι:

$$p_2 = m\upsilon_2 = 2\cdot(-6) \quad \Rightarrow$$

$$p_2 = -12\text{kgr}\cdot\text{m/sec}$$

Το αρνητικό πρόσημο της p_2 δηλώνει ότι είναι αντίθετη της φοράς της p_1, την οποία θεωρήσαμε θετική.

Επομένως η μεταβολή της ορμής της σφαίρας είναι:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -12 - 20 \quad \Rightarrow \quad \Delta p = -32\text{kgr}\cdot\text{m/sec}$$

β. Στη διάρκεια της επαφής της με το δάπεδο, η σφαίρα δέχεται μια μέση δύναμη από το δάπεδο F και το βάρος της mg.

Αλλά από τη γεωμετρική διατύπωση του 2[ου] νόμου του Newton ισχύει:

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad mg - F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad \Rightarrow$$

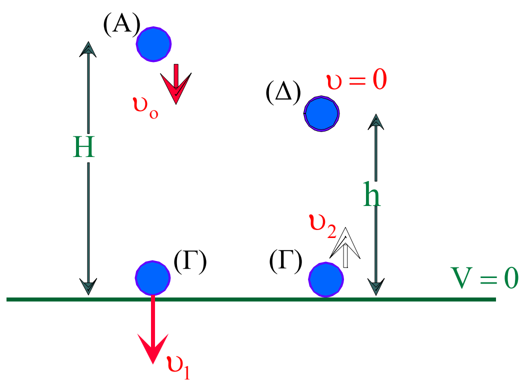
$$F = mg - \frac{\Delta p}{\Delta t} = 2\cdot 10 - \frac{-32}{0{,}1} = 20 - (-320) \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 340\text{Nt}}$$

Άσκηση 8η

Από ύψος $H = 2{,}2\text{m}$ πάνω από οριζόντιο δάπεδο βάλλεται κατακόρυφα προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 10\text{m/sec}$ μεταλλική σφαίρα βάρους $B = 10\text{Nt}$. Αφού προσκρούει στο δάπεδο αναπηδά σε ύψος $h = 1{,}8\text{m}$. Αν η διάρκεια επαφής σφαίρας – δαπέδου είναι $\Delta t = 0{,}1\text{sec}$, να υπολογίσετε τη μέση δύναμη που ασκήθηκε από το δάπεδο στη σφαίρα. $\left(g = 10\text{m/sec}^2\right)$.

(Εξετάσεις ΦΥΕ 14 Ιούλιος 2004)

Λύση:



Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα υ_1 με την οποία προσκρούει η σφαίρα στο δάπεδο εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων Α και Γ, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο.

$$\text{Α.Δ.Ε.}_{Α\to Γ}: \quad K_A + V_A = K_Γ + V_Γ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_o^2 + mgH = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + 0 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2gH} = \sqrt{10^2 + 2\cdot 10\cdot 2{,}2} = \sqrt{100+44} = \sqrt{144} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_1 = 12m/sec}$$

Επίσης για τον υπολογισμό της ταχύτητας αναπήδησης της σφαίρας υ_2 εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων Γ και Δ.

$$\text{Α.Δ.Ε.}_{Γ\to Δ}: \quad K_Γ + V_Γ = K_Δ + V_Δ \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + 0 = 0 + mgh$$

$$\Rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 1{,}8} = \sqrt{36} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_2 = 6m/sec}$$

Άρα η μεταβολή της ορμής της σφαίρας κατά την πρόσκρουση στο δάπεδο είναι:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = m\upsilon_2 - m\upsilon_1 = 1\cdot(-6) - 1\cdot 12 \Rightarrow \Delta p = -18kgr\cdot m/sec$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι το βάρος της Β και η μέση δύναμη επαφής F από το δάπεδο. Επομένως στη διάρκεια επαφής της σφαίρας η γενικευμένη διατύπωση του 2^{ου} νόμου του Newton δίνει:

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow B - F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow F = B - \frac{\Delta p}{\Delta t} = 10 - \frac{-18}{0{,}1} = 10 + 180$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{F = 190Nt}$$

<u>Ασκηση 9^η</u>

Δυο ακριβώς ίδια αυτοκίνητα Α και Β ξεκινούν από την ηρεμία συγχρόνως και κινούνται στον ίδιο επίπεδο δρόμο υπό την επίδραση οριζόντιων δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ αντίστοιχα ώστε $F_1 = F_2$. Πως μπορούν να συγκριθούν μεταξύ τους η κινητική ενέργεια και η ορμή των δυο αυτοκινήτων, ένα λεπτό αργότερα, αν $m_B > m_A$;

Λύση: Σύμφωνα με τη σχέση:

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \Delta p = F\Delta t \Rightarrow p_{\tau\varepsilon\lambda}-p_{\alpha\rho\chi}=F\Delta t \Rightarrow$$

$$p_{\tau\varepsilon\lambda.}=F\Delta t \quad (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \ \upsilon_o=0 \Rightarrow p_{\alpha\rho\chi.}=0)$$

Άρα αφού στα αυτοκίνητα δρα η ίδια δύναμη F για το ίδιο χρονικό διάστημα Δt και ξεκινούν από την ηρεμία θα αποκτήσουν την ίδια ορμή ανεξάρτητα από τη μάζα τους. Δηλαδή:

$$\boxed{p_A=p_B}$$

Η κινητική ενέργεια είναι: $K=\frac{1}{2}m\upsilon^2$

Αλλά: $p=m\upsilon \Rightarrow \upsilon=\frac{p}{m}$ οπότε η παραπάνω γίνεται:

$$K=\frac{1}{2}m\frac{p^2}{m^2} \Rightarrow K=\frac{p^2}{2m}$$

Επομένως:

$$\left.\begin{aligned} K_A&=\frac{p_A^{\,2}}{2m_A} \\ \text{και}\quad K_B&=\frac{p_B^{\,2}}{2m_B}\end{aligned}\right\} \overset{(\div)}{\Rightarrow} \frac{K_A}{K_B}=\frac{\dfrac{p_A^{\,2}}{2m_A}}{\dfrac{p_B^{\,2}}{2m_B}} \overset{(p_A=p_B)}{\Rightarrow} \frac{K_A}{K_B}=\frac{m_B}{m_A}>1$$

$$\left(\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \ m_B>m_A \Rightarrow \frac{m_B}{m_A}>1\right)$$

Άρα: $\boxed{K_A>K_B}$

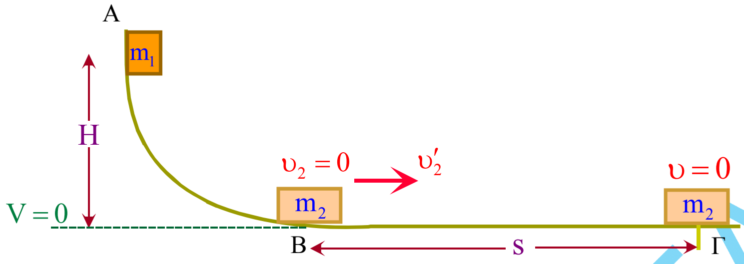
Άσκηση 10η

Μια μάζα $m_1=5kgr$ αφήνεται από ύψος $H=5m$ από το σημείο Α και συγκρούεται ελαστικά με ένα σώμα $m_2=10kgr$ που αρχικά είναι ακίνητο στο σημείο Β. Η κίνησή του στο ΑΒ γίνεται χωρίς τριβές. Υπολογίστε:

α. Το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει το σώμα m_1.

β. Σε ποια απόσταση s θα σταματήσει το m_2, αν η οριζόντια επιφάνεια έχει συντελεστή τριβής $\mu=0,2$;

Λύση:



Το σώμα m_1 πέφτει και συγκρούεται με το ακίνητο m_2 με ταχύτητα υ_1, η οποία υπολογίζεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας ως:

$$\text{Α.Δ.Ε.}_{A\to B}: \quad K_A + V_A = K_B + V_B \Rightarrow 0 + m_1 gH = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 5} = \sqrt{100} \Rightarrow \upsilon_1 = 10\,m/sec$$

Κατά την ελαστική κρούση των m_1 και m_2 ισχύουν η αρχή διατήρησης της ορμής και η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας, οπότε:

$$\text{Α.Δ.Ο.}: \quad p_{αρχ.} = p_{τελ.} \Rightarrow m_1\upsilon_1 + 0 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2' \Rightarrow$$

$$5\cdot 10 = 5\upsilon_1' + 10\upsilon_2' \Rightarrow 50 = 5\upsilon_1' + 10\upsilon_2' \Rightarrow \upsilon_1' + 2\upsilon_2' = 10 \Rightarrow$$

$$\upsilon_1' = 10 - 2\upsilon_2' \quad (1)$$

$$\text{Α.Δ.Κ.Ε.}: \quad K_{αρχ.} = K_{τελ.} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \Rightarrow$$

$$5\cdot 10^2 = 5\upsilon_1'^2 + 10\upsilon_2'^2 \Rightarrow \upsilon_1'^2 + 2\upsilon_2'^2 = 100 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$(10 - 2\upsilon_2')^2 + 2\upsilon_2'^2 = 100 \Rightarrow$$

$$100 + 4\upsilon_2'^2 - 40\upsilon_2'^2 + 2\upsilon_2'^2 = 100 \Rightarrow 6\upsilon_2'^2 - 40\upsilon_2' = 0 \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{40}{6}$$

$$\Rightarrow$$

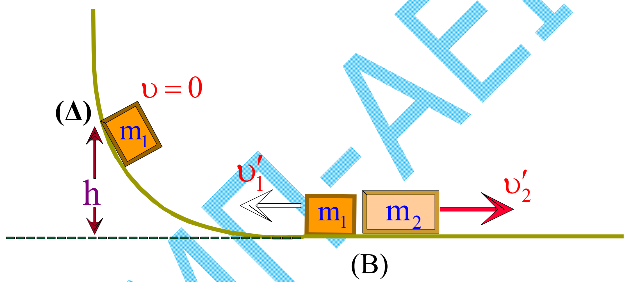
$$\boxed{\upsilon_2' = \frac{20}{3}\,m/sec}$$

Και η (1) δίνει: $\upsilon_1' = 10 - 2\cdot\frac{20}{3} = 10 - \frac{40}{3} = \frac{30-40}{3}\upsilon \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\upsilon_1' = -\frac{10}{3}\,m/sec}$$

Το αρνητικό πρόσημο της υ_1' δηλώνει ότι το m_1 μετά την κρούση θα κινηθεί προς τα αριστερά.

α.



Άρα μετά την κρούση το m_1 θα φτάσει σε ύψος h, όπου και θα σταματήσει. Έτσι σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων Β και Δ προκύπτει:

Α.Δ.Ε.$_{B\to\Delta}$: $\quad K_B + V_B = K_\Delta + V_\Delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + 0 = 0 + m_1 g h$

$\Rightarrow$

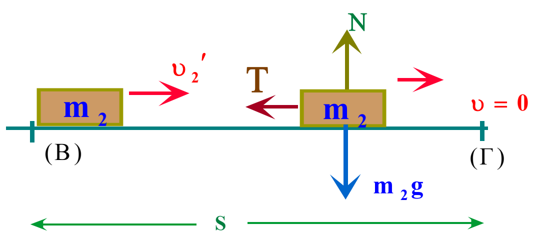
$$h = \frac{\upsilon_1'^2}{2g} = \frac{\left(-\frac{10}{3}\right)^2}{2\cdot 10} = \frac{100}{9\cdot 20} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{5}{9}m}$$

β. Επειδή στο τμήμα ΒΓ υπάρχει τριβή εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - κινητικής ενέργειας.

Θ.Ε.Κ.Ε.: $\quad \Sigma W = \Delta K \quad \Rightarrow$

$W_T = \cancel{K_\Gamma}^{\,0} - K_B \quad \Rightarrow$

$W_T = -\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \quad (2)$



όπου το έργο της τριβής είναι:

$$\left.\begin{array}{l} W_T = \int_0^s \vec{T}\cdot d\vec{x} = \int_0^s T\,\cancel{\cos 180^o}^{-1}\,dx = -\int_0^s T dx \\ \left.\begin{array}{ll} \text{και} & T = \mu N \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow & N = m_2 g \end{array}\right\} \Rightarrow T = \mu m_2 g = 0,2\cdot 10\cdot 10 \Rightarrow T = 20Nt \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$W_T = -20\int_0^s dx = -20s$$

Άρα η (2) δίνει:

$$-20s = -\frac{1}{2}\cdot 10\left(\frac{20}{3}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 20s = 5\cdot\frac{400}{9} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{2000}{180} \Rightarrow$$

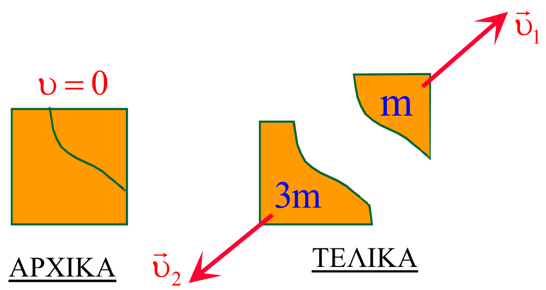
$$\boxed{s = 11,1m}$$

<u>Άσκηση 11η</u>

Μια βόμβα τοποθετείται σε πεδίο μηδενικής βαρύτητας $(g = 0)$ όπου αρχικά ηρεμεί. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η βόμβα εκρήγνυται ακαριαία και διασπάται σε δυο θραύσματα, από τα οποία το ένα έχει τριπλάσια μάζα από το άλλο. Αν το ελαφρότερο κινείται με ταχύτητα $\left(2\vec{i} + 6\vec{j}\right)m/sec$, ποια είναι η ταχύτητα του δεύτερου θραύσματος;

Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή της έκρηξης τα δυο κομμάτια θα απέχουν μεταξύ τους $1km$;

<u>Λύση:</u>



Έστω m η μάζα του ελαφρύτερου κομματιού και $3m$ του βαρύτερου θραύσματος. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ορμής ισχύει:

Α.Δ.Ο.: $\vec{p}_{αρχ.} = \vec{p}_{τελ.} \Rightarrow 0 = m\vec{υ}_1 + 3m\vec{υ}_2 \Rightarrow$
$3m\vec{υ}_2 = -m\vec{υ}_1 \Rightarrow$

$$\vec{υ}_2 = -\frac{\vec{υ}_1}{3} \Rightarrow \vec{υ}_2 = -\frac{\left(2\vec{i}+6\vec{j}\right)}{3} \Rightarrow \vec{υ}_2 = -\frac{2}{3}\vec{i} - 2\vec{j}\,m/sec$$

Για να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ των δυο θραυσμάτων, θα πρέπει να γνωρίζουμε τη σχετική τους ταχύτητα. Έτσι η σχετική ταχύτητα του ελαφρότερου θραύσματος ως προς το βαρύτερο είναι:

$$\vec{υ} = \vec{υ}_1 - \vec{υ}_2 = 2\vec{i} + 6\vec{j} - \left(-\frac{2}{3}\vec{i} - 2\vec{j}\right) = \left(2+\frac{2}{3}\right)\vec{i} + (6+2)\vec{j} \Rightarrow$$

$$\vec{υ} = \frac{8}{3}\vec{i} + 8\vec{j}\,m/sec$$

Το μέτρο της ταχύτητας αυτής, είναι:

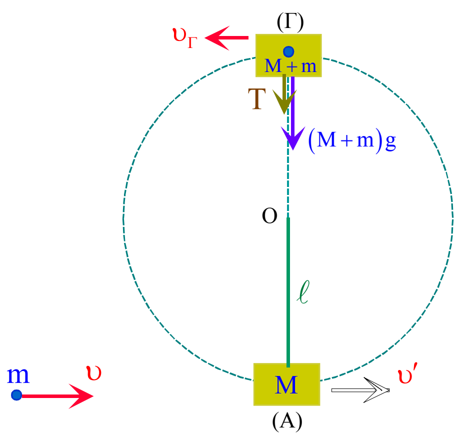
$$|\vec{υ}| = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 8^2} = \sqrt{\frac{64}{3} + 64} = 8{,}43\,m/sec$$

Άρα η απόσταση των θραυσμάτων συναρτήσει του χρόνου είναι:

$$s = υt \Rightarrow t = \frac{s}{υ} = \frac{1000m}{8{,}43m/sec} \Rightarrow \boxed{t = 118{,}6\,sec}$$

__Άσκηση 12η__

Μια σφαίρα μάζας $m = 10gr$ εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα $υ$ προς ένα βαλλιστικό εκκρεμές που η μάζα του ξύλου του είναι $M = 1kgr$. Το κομμάτι του ξύλου είναι δεμένο μέσω ενός πολύ ελαφρού νήματος μήκους $2m$ σε ένα σταθερό σημείο Ο. Το ξύλο είναι ελεύθερο να κινείται σε κατακόρυφο κύκλο. Η σφαίρα σφηνώνεται και σταματά στο ξύλο ακαριαία. Προσδιορίστε την ελάχιστη τιμή της $υ$ έτσι ώστε το εκκρεμές να διαγράψει έναν ολόκληρο κύκλο.



__Λύση:__ Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς (Γ) οι δυνάμεις που ασκούνται στο συσσωμάτωμα είναι το βάρος του $(M+m)g$ και η τάση του νήματος, οι οποίες παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή:

$$F_K = (M+m)\alpha_K \Rightarrow$$

$$T + (M+m)g = (M+m)\frac{υ_Γ^2}{\ell} \Rightarrow$$

$$T = (M+m)\frac{\upsilon_\Gamma^{\ 2}}{\ell} - (M+m)g \quad (1)$$

Αλλά πρέπει:

$$T \geq 0 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad (M+m)\frac{\upsilon_\Gamma^{\ 2}}{\ell} - (M+m)g \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_\Gamma \geq \sqrt{g\ell} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_\Gamma \geq \sqrt{20} m/sec$$

Δηλαδή:

$$\upsilon_{\Gamma\ min} = \sqrt{20} m/sec$$

Άρα η ταχύτητα υ' με την οποία θα πρέπει να κινηθεί το συσσωμάτωμα στην κατώτερη θέση (Α) έτσι ώστε να φτάσει στο ανώτερο σημείο (Γ) με ταχύτητα $\upsilon_{\Gamma\ min} = \sqrt{20} m/sec$ υπολογίζεται από την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

Α.Δ.Ε.$_{A\to\Gamma}$: $K_A + V_A = K_\Gamma + V_\Gamma \quad \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}(M+m)\upsilon'^2 + 0 = \frac{1}{2}(M+m)\upsilon^2_{\Gamma\ min} + (M+m)g2\ell \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon'^2 = \upsilon^2_{\Gamma\ min} + 4g\ell = \left(\sqrt{20}\right)^2 + 4\cdot 10\cdot 2 = 20 + 80 = 100 \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon' = 10 m/sec$$

Κατά τη διάρκεια της κρούσης ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, από την οποία θα προσδιοριστεί η ελάχιστη ταχύτητα υ του βλήματος ώστε το $\upsilon_\Gamma = min = \sqrt{20} m/sec$ και το συσσωμάτωμα να διαγράψει έναν πλήρη κύκλο.

Α.Δ.Ο.: $\vec{p}_{αρχ.} = \vec{p}_{τελ.} \quad \Rightarrow \quad m\upsilon + 0 = (M+m)\upsilon' \quad \Rightarrow$

$$\upsilon = \frac{M+m}{m}\upsilon' = \frac{1,01kgr}{0,01kgr}\cdot 10m/sec = 101\cdot 10m/sec \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = 1010 m/sec}$$

Άσκηση 13η

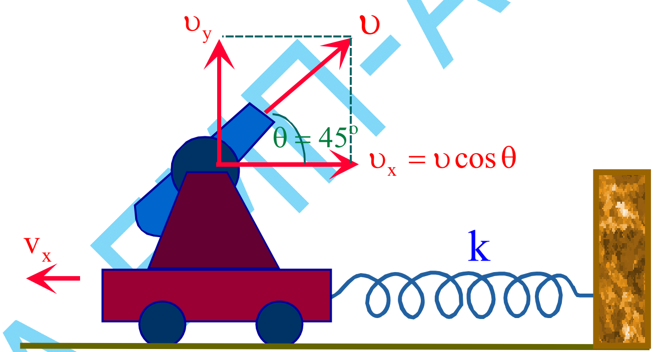
Ένα πυροβόλο είναι στερεωμένο πάνω σε ένα όχημα που μπορεί να κινείται κατά μήκος οριζόντιων σιδηροτροχιών, αλλά είναι συνδεδεμένο με ένα κατακόρυφο τοίχο, μέσω ενός ισχυρού ελατηρίου σταθεράς $k = 2 \cdot 10^4 N/m$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το πυροβόλο εκτοξεύει ένα βλήμα μάζας $200kgr$ με ταχύτητα $125m/sec$, που κατευθύνεται 45^o πάνω από την οριζόντιο.

α. Αν η μάζα του πυροβόλου και του οχήματος του είναι $5000kgr$, βρείτε την οριζόντια ταχύτητα ανάκρουσης του πυροβόλου.

β. Προσδιορίστε τη μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου.

γ. Θεωρείστε το «σύστημα» που αποτελείται από το πυροβόλο, το όχημα και το βλήμα. Διατηρείται η ορμή αυτού του συστήματος κατά τη διάρκεια της πυροδότησης; Δικαιολογείστε την απάντηση σας.

Λύση:



α. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα x, πριν και μετά την εκτόξευση του βλήματος προκύπτει:

$$p_{x\ \pi\rho\iota\nu} = p_{x\ \mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow 0 = m\upsilon_x - Mv_x \Rightarrow m\upsilon_x = Mv_x \Rightarrow$$

$$v_x = \frac{m}{M}\upsilon_x = \frac{200kgr}{5000kgr} \cdot 125\cos 45^o m/sec = \frac{2}{50} \cdot 125\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{v_x = 3,54m/sec}$$

β. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας την αρχική στιγμή της ανάκρουσης του πυροβόλου και την τελική στιγμή της ακινητοποίησης του (όπου η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι μέγιστη) προκύπτει:

$$\text{Α.Δ.Ε.:} \quad K_{\alpha\rho\chi.} + V_{\alpha\rho\chi.} = K_{\tau\varepsilon\lambda.} + V_{\tau\varepsilon\lambda.} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M \cdot v_x^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{M}{k} \cdot v_x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{M}{k}} \cdot v_x = \sqrt{\frac{5000}{2 \cdot 10^4}} \cdot 3,54 = 0,5 \cdot 3,54 \Rightarrow$$

$$\boxed{x = 1,77\text{m}}$$

γ. Η ορμή του συστήματος αυτού διατηρείται μόνο στον άξονα x, ενώ στον άξονα y η ορμή πριν την εκτόξευση είναι μηδέν, αλλά μετά είναι διάφορη του μηδενός $\left(p_{y\,\mu\varepsilon\tau\alpha} = m\upsilon_y\right)$ λόγω της y συνιστώσας της ορμής του βλήματος. Επομένως στον άξονα y η ορμή δε διατηρείται και η μεταβολή αυτή της ορμής οφείλεται στις εξωτερικές δυνάμεις του βάρους και της κάθετης αντίδρασης από το δάπεδο, που δρουν στο σύστημα.

<u>Άσκηση 14η</u>

Ένας φοιτητής έχει βάλει ένα σώμα μάζας $M = 1\text{kgr}$ και πάχους $\Delta = 0,1\text{m}$ σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\theta = 20^o$ ως προς την οριζόντιο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σώμα παραμένει ακίνητο και για να το θέσει σε κίνηση θέλει να το χτυπήσει με μια σφαίρα. Η σφαίρα μάζας $m = 5\text{gr}$ κινείται παράλληλα με το κεκλιμένο επίπεδο με ταχύτητα 300m/sec. Η σφαίρα διαπερνά το σώμα και βγαίνει από την άλλη πλευρά έχοντας χάσει $75\ ^0/_0$ της αρχικής της κινητικής της ενέργειας.

α. Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος μάζας M τη στιγμή που εξέρχεται η σφαίρα;

β. Ποια είναι η μέση δύναμη που ασκείται στη σφαίρα καθώς διέρχεται μέσω του σώματος;

γ. Αν το σώμα μάζας M διανύσει απόσταση $s = 50\text{m}$ μέχρι να σταματήσει ποιος ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σώματος και επιπέδου;

Αγνοείστε την επίδραση του βάρους της σφαίρας στους υπολογισμούς σας και θεωρείστε ότι κατά τη διέλευση της σφαίρας μέσα από το σώμα, δεν χάνεται μάζα από το σώμα. Θεωρείστε επίσης ότι ο χρόνος διέλευσης της σφαίρας μέσα από το σώμα μάζας M είναι αμελητέος.

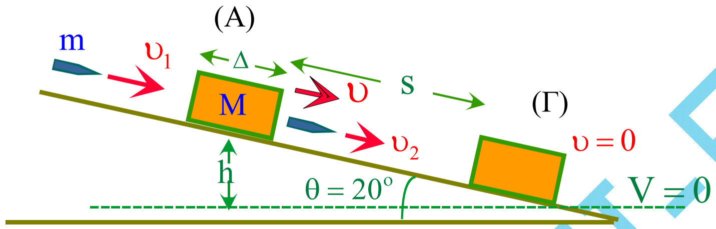
<u>Λύση:</u>

α. Έστω $\upsilon_1 = 300\text{m/sec}$ η ταχύτητα της σφαίρας πριν την κρούση με το σώμα και υ_2 η ταχύτητά της μετά την κρούση.

Επειδή η σφαίρα χάνει το $75\ ^0/_0$ της κινητικής της ενέργειας ή αλλιώς διατηρεί το $25\ ^0/_0$ της κινητικής της ενέργειας, αφού διαπεράσει το σώμα θα ισχύει:

$$K_{μετά} = 0,25K_{πριν} \Rightarrow \frac{1}{2}mυ_2^2 = 0,25\frac{1}{2}mυ_1^2 \Rightarrow υ_2^2 = 0,25υ_1^2 \Rightarrow$$

$$υ_2 = 0,5υ_1 \Rightarrow υ_2 = 0,5 \cdot 300m/sec \Rightarrow υ_2 = 150m/sec$$



Επομένως αν $υ$ είναι η ταχύτητα που αποκτά το σώμα μάζας M μετά την κρούση, η αρχή διατήρησης της ορμής πριν και μετά την κρούση δίνει:

$$p_{πριν} = p_{μετα} \Rightarrow mυ_1 + 0 = mυ_2 + Mυ \Rightarrow$$

$$υ = \frac{m}{M}(υ_1 - υ_2) = \frac{5 \cdot 10^{-3}kgr}{1kgr}(300 - 150)m/sec = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 150 \Rightarrow$$

$$\boxed{υ = 0,75m/sec}$$

β. Αν F είναι η μέση δύναμη που ασκείται στη σφαίρα καθώς διέρχεται μέσω του σώματος και αγνοώντας την επίδραση του βάρους της σφαίρας, το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας για τη σφαίρα πριν και μετά την κρούση δίνει:

$$ΣW = ΔK \Rightarrow$$

$$W_F = K_{μετά} - K_{πριν} = \frac{1}{2}mυ_2^2 - \frac{1}{2}mυ_1^2 = \frac{1}{2}m\left(υ_2^2 - υ_1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3}kgr\left(150^2 - 300^2\right)m^2/sec^2 = 2,5 \cdot 10^{-3}(22500 - 90000) \Rightarrow$$

$$W_F = -168,75Joule$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι το έργο αυτό είναι παραγόμενο, δηλαδή αποδίδεται στο περιβάλλον υπό τη μορφή θερμότητας.

Επειδή η δύναμη αυτή θεωρείται σταθερή το έργο της σύμφωνα με τον ορισμό του έργου είναι:

$$W_F = F \cdot Δ \Rightarrow F = \frac{W_F}{Δ} = \frac{168,75J}{0,1m} \Rightarrow \boxed{F = 1687,5Nt}$$

γ. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας για το σώμα μάζας M από την αρχική θέση Α ακριβώς μετά τη διέλευση της σφαίρας μέχρι τη θέση Γ όπου το σώμα ακινητοποιείται προκύπτει:

$$\Sigma W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad W_B + W_T = K_\Gamma - K_A \quad (1)$$

όπου $\quad W_B = V_A - V_\Gamma = Mgh - 0 = Mgh = Mg \cdot s \cdot \sin 20^o$

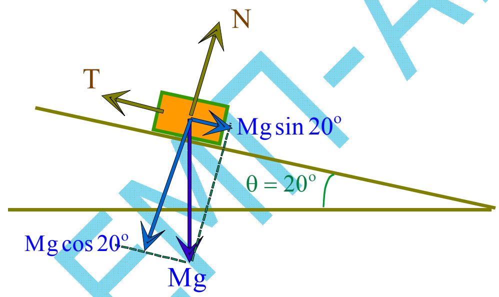
$\left(\text{αφού } h = s \cdot \sin 20^o\right)$

$$W_T = \int_0^s \vec{T} \cdot d\vec{x} = \int_\theta^s T \cancel{\cos 180^o}^{-1} dx = -\int_0^s T dx = -T\int_0^s dx = -T \cdot s$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{και} \quad T = \mu N \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = Mg\cos 20^o \end{array}\right\} \Rightarrow \quad T = \mu Mg\cos 20^o \quad \text{οπότε:}$$

$$W_T = -\mu Mg \cos 20^o s$$

Ενώ: $\quad K_\Gamma = 0 \quad \text{και} \quad K_A = \frac{1}{2}M\upsilon^2$



Άρα η (1) δίνει:

$$\cancel{M}g \cdot s \cdot \sin 20^o - \mu \cancel{M}g\cos 20^o \cdot s = 0 - \frac{1}{2}\cancel{M}\upsilon^2 \quad \Rightarrow$$

$$\mu g \cdot s \cdot \cos 20^o = g \cdot s \cdot \sin 20^o + \frac{\upsilon^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\mu = \frac{\sin 20^o}{\cos 20^o} + \frac{\upsilon^2}{2 \cdot s \cdot \cos 20^o} = \tan 20^o + \frac{\upsilon^2}{2 \cdot s \cdot \cos 20^o} = 0,364 + \frac{0,75^2}{2 \cdot 50 \cdot 0,934} =$$

$$= 0,364 + \frac{0,562}{93,4} = 0,364 + 0,006 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = 0,37}$$

Άσκηση 15η

Μια σφαίρα μάζας $4gr$ βάλλεται κατά 2 σωμάτων που βρίσκονται σε ηρεμία πάνω σε οριζόντια επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η σφαίρα διαπερνά ακαριαία το πρώτο σώμα μάζας $1,5kgr$ και ενσωματώνεται στο δεύτερο (επίσης μάζας $1,5kgr$). Τα σώματα αποκτούν ταχύτητες $0,6m/sec$ και $1,5m/sec$ αντίστοιχα.

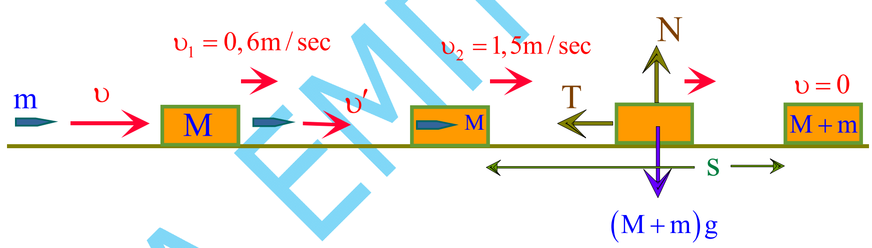
α. Ποια η ταχύτητα της σφαίρας τη στιγμή που εξέρχεται από το πρώτο σώμα;

β. Ποια η αρχική ταχύτητα της σφαίρας;

γ. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του δεύτερου σώματος και του δαπέδου είναι $\mu = 0,3$ πόσο διάστημα διανύει μέχρι να σταματήσει;

Υποθέστε ότι κατά τη διέλευση της σφαίρας από το πρώτο σώμα δεν μεταβάλλεται η μάζα του σώματος.

Λύση:



α. Έστω m η μάζα της σφαίρας και M η μάζα του κάθε σώματος, ενώ υ είναι η αρχική ταχύτητα της σφαίρας και υ' η ταχύτητά της μετά την κρούση, $\upsilon_1 = 0,6m/sec$ είναι η ταχύτητα που αποκτά το πρώτο σώμα μετά την κρούση και $\upsilon_2 = 1,5m/sec$ η ταχύτητα που αποκτά το συσσωμάτωμα μετά τη δεύτερη κρούση. Επομένως εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση της σφαίρας με το δεύτερο σώμα προκύπτει:

Α.Δ.Ο.: $p_{αρχ.} = p_{τελ.} \Rightarrow m\upsilon' + 0 = (M+m)\upsilon_2 \Rightarrow$

$$\upsilon' = \frac{M+m}{m}\upsilon_2 = \frac{1,5+4\cdot10^{-3}}{4\cdot10^{-3}}\cdot1,5 \Rightarrow \boxed{\upsilon' = 564m/sec} \quad (1)$$

β. Εφαρμόζοντας πάλι την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση της σφαίρας με το πρώτο σώμα προκύπτει:

Α.Δ.Ο.: $p_{αρχ.} = p_{τελ.} \Rightarrow m\upsilon + 0 = m\upsilon' + M\upsilon_1 \Rightarrow$

$$\upsilon = \upsilon' + \frac{M}{m}\upsilon_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad \upsilon = 564 + \frac{1,5}{4\cdot 10^{-3}}\cdot 0,6 = 564 + 225 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = 789\text{m/sec}}$$

γ. Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας για την κίνηση του συσσωματώματος μέχρι να σταματήσει προκύπτει:

$$\Sigma W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad W_T = K_{\tau\varepsilon\lambda.} - K_{\alpha\rho\chi.} = 0 - \frac{1}{2}(M+m)\upsilon_2^{\,2} \quad \Rightarrow$$

$$W_T = -\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_2^{\,2} \qquad (2)$$

όπου: $$W_T = \int_0^s \vec{T}\cdot d\vec{x} = \int_0^s T\,\cancel{\cos 180^o}^{\,-1}dx = -\int_0^s T dx = -T\int_0^s dx = -Ts$$

και $T = \mu N$

Αλλά: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = (M+m)g$ $\quad\Rightarrow\quad T = \mu(M+m)g$

Οπότε: $W_T = -\mu(M+m)g\cdot s$ και η (2) δίνει:

$$-\mu(M+m)g\cdot s = -\frac{1}{2}(M+m)\upsilon_2^{\,2} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{\upsilon_2^{\,2}}{2g\mu} = \frac{1,5^2}{2\cdot 10\cdot 0,3} = \frac{2,25}{6}$$

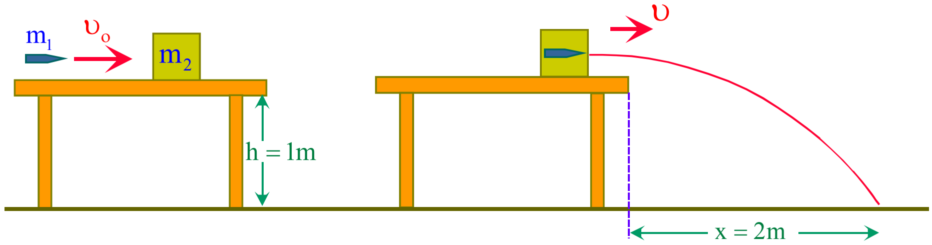
$$\Rightarrow \boxed{s = 0,375\text{m}}$$

<u>Άσκηση 16η</u>

Μια σφαίρα μάζας $m_1 = 8\text{gr}$ προσκρούει με οριζόντια ταχύτητα υ_o και καρφώνεται σε ένα κύβο μάζας $m_2 = 2,5\text{kgr}$ που είναι ακίνητος πάνω σε ένα τραπέζι ύψους 1m. Ο κύβος μπορεί να ολισθαίνει πάνω στο τραπέζι χωρίς τριβές. Μετά την κρούση ο κύβος πέφτει στο έδαφος 2m μακριά από την άκρη του τραπεζιού, όπως φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε την ταχύτητα υ_o της σφαίρας.

Δίνεται: $g = 10\text{m/sec}^2$

<u>Λύση:</u>



Έστω υ η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση προκύπτει:

Α.Δ.Ο.: $$p_{\alpha\rho\chi.} = p_{\tau\varepsilon\lambda.} \Rightarrow m_1\upsilon_o + 0 = (m_1 + m_2)\upsilon \Rightarrow$$

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_o}{m_1 + m_2} = \frac{8\cdot 10^{-3}}{8\cdot 10^{-3} + 2,5}\upsilon_o \Rightarrow \upsilon = 3,2\cdot 10^{-3}\upsilon_o \quad (1)$$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί οριζόντια βολή με αρχική ταχύτητα $\upsilon = 3,2\cdot 10^{-3}\upsilon_o$ από ύψος $h = 1\text{m}$ και πέφτει σε απόσταση $x = 2\text{m}$. Συνεπώς από τις εξισώσεις κίνησης της οριζόντιας βολής προκύπτει:

$$x = \upsilon t \Rightarrow t = \frac{x}{\upsilon} \quad (2) \quad \text{και}$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} h = \frac{1}{2}g\frac{x^2}{\upsilon^2} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{gx^2}{2h} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$10,24\cdot 10^{-6}\upsilon_o{}^2 = \frac{10\cdot 2^2}{2\cdot 1} \Rightarrow 10,24\cdot 10^{-6}\upsilon_o{}^2 = 20 \Rightarrow$$

$$\upsilon_o{}^2 = \frac{20}{10,24}10^6 = 1,95\cdot 10^6 \Rightarrow$$

$$\upsilon_o = \sqrt{1,95}\cdot 10^3 \Rightarrow \boxed{\upsilon_o = 1400\text{m}/\text{sec}}$$

Άσκηση 17η

Δυο σωματίδια με ίσες μάζες m κινούνται έτσι ώστε τα διανύσματα θέσης τους να είναι:

$$\vec{r}_1 = (t^2 + 3t - 5)\hat{x} + (3t + 7)\hat{y} + (21 - 2t^2)\hat{z}$$
$$\vec{r}_2 = (25 - t - t^2)\hat{x} + (5t + 1)\hat{y} + (2t^2 - 5t)\hat{z}$$

α. Αποδείξτε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και υπολογίστε πότε θα συμβεί η κρούση.

β. Διατηρείται η ορμή του συστήματος;

γ. Αν η κρούση είναι πλαστική, να βρείτε την ταχύτητα τους μετά την κρούση και την κατοπινή τους θέση συναρτήσει του χρόνου.

Λύση:

α. Για να συγκρουσθούν τα δυο σωματίδια θα πρέπει την ίδια χρονική στιγμή να βρίσκονται στην ίδια θέση, δηλαδή να έχουν το ίδιο διάνυσμα θέσης. Αυτό συμβαίνει όταν:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \Rightarrow \begin{cases} t^2 + 3t - 5 = 25 - t - t^2 \Rightarrow 2t^2 + 4t - 30 = 0 & (\text{A}) \\ 3t + 7 = 5t + 1 \Rightarrow 2t = 6 & (\text{B}) \\ 21 - 2t^2 = 2t^2 - 5t \Rightarrow 4t^2 - 5t - 21 = 0 & (\Gamma) \end{cases}$$

Οι ρίζες των εξισώσεων αυτών είναι:

(Α) $\Rightarrow$ $\boxed{t = 3\sec}$ ή $t = -\frac{20}{4}\sec$ απορρίπτεται ως αρνητική

(Β) $\Rightarrow$ $\boxed{t = 3\sec}$

(Γ) $\Rightarrow$ $\boxed{t = 3\sec}$ ή $t = -\frac{7}{4}\sec$ απορρίπτεται ως αρνητική

Άρα τα σωματίδια συγκρούονται τη χρονική στιγμή $t = 3\sec$ στη θέση:

$$\vec{r}_{1\,(t=3\sec)} = \vec{r}_{2\,(t=3\sec)} = 13\hat{x} + 16\hat{y} + 3\hat{z} = \vec{r}_o$$

β. Είναι: $\vec{\upsilon}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = (2t+3)\hat{x} + 3\hat{y} - 4t\hat{z}$ (1)

$$\vec{\alpha}_1 = \frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} = 2\hat{x} - 4\hat{z}$$

Οπότε: $\vec{F}_1 = m\vec{\alpha}_1 \Rightarrow \vec{F}_1 = 2m\hat{x} - 4m\hat{z}$

Επίσης: $\vec{\upsilon}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = (-1-2t)\hat{x} + 5\hat{y} + (4t-5)\hat{z}$ (2)

$$\vec{\alpha}_2 = \frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt} = -2\hat{x} + 4\hat{z}$$

Οπότε: $\vec{F}_2 = m\vec{\alpha}_2 = -2m\hat{x} + 4m\hat{z}$

Άρα επειδή $\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 2m\hat{x} - 4m\hat{z} - 2m\hat{x} + 4m\hat{z} = 0$ είναι και $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$ δηλαδή $\vec{p} =$ σταθ. και η ορμή του συστήματος διατηρείται.

γ. Η ταχύτητα του κάθε σωματιδίου ακριβώς πριν την κρούση $(\text{για } t = 3\sec)$ σύμφωνα με τις (1) και (2) είναι:

$$\vec{\upsilon}_1 = 9\hat{x} + 3\hat{y} - 12\hat{z} \quad \text{και} \quad \vec{\upsilon}_2 = -7\hat{x} + 5\hat{y} + 7\hat{z}$$

Συνεπώς από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση προκύπτει:

Α.Δ.Ο.: $p_{\alpha\rho\chi.} = p_{\tau\varepsilon\lambda.} \Rightarrow m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 = (m+m)\vec{\upsilon} \Rightarrow$

$$\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 = 2\vec{\upsilon} \Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2}{2} = \frac{9\hat{x} + 3\hat{y} - 12\hat{z} - 7\hat{x} + 5\hat{y} + 7\hat{z}}{2} = \frac{2\hat{x} + 8\hat{y} - 5\hat{z}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \hat{x} + 4\hat{y} - \frac{5}{2}\hat{z}}$$

Η κατοπινή θέση του συσσωματώματος $\vec{r}(t)$ σύμφωνα με τον ορισμό της ταχύτητας θα είναι:

$$\vec{\upsilon}=\frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} d\vec{r}=\vec{\upsilon}\int_0^t dt \Rightarrow \vec{r}-\vec{r}_o=\left(\hat{x}+4\hat{y}-\frac{5}{2}\hat{z}\right)\cdot t \Rightarrow$$

$$\vec{r}=13\hat{x}+16\hat{y}+3\hat{z}+\left(\hat{x}+4\hat{y}-\frac{5}{2}\hat{z}\right)t \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{r}(t)=(13+t)\hat{x}+(16+4t)\hat{y}+\left(3-\frac{5}{2}t\right)\hat{z}}$$

10.1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Σώματα που κατά την κίνησή τους η μάζα τους δεν παραμένει χρονικά σταθερή, αλλά μεταβάλλεται με το χρόνο $m = m(t)$, επειδή προστίθεται ή αφαιρείται μάζα σε αυτά λέγονται **συστήματα μεταβλητής μάζας.**

Για τη μελέτη της κίνησης των συστημάτων αυτών **δεν** ισχύει ο 2^{ος} νόμος του Newton υπό τη μορφή $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}$, αλλά η γενικευμένη διατύπωση του 2^{ου} νόμου του Newton, από την οποία εξάγεται η εξίσωση κίνησης αυτών ως:

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\upsilon) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Sigma F = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt}}$$

όπου ΣF οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα, υ η ταχύτητα, $m = m(t)$ η χρονική συνάρτηση της μάζας και $\frac{dm}{dt}$ ο χρονικός ρυθμός μεταβολής της μάζας.

Παρατηρήσεις

1. Σε ασκήσεις συνήθως δίνεται ο ρυθμός μεταβολής της μάζας με κάποιες μονάδες kgr/sec ή kgr/m. Αυτό σημαίνει ότι δίνεται η παράγωγος dm/dt ή dm/dx.

2. Η συνάρτηση της μάζας $m(t)$ μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από το γνωστό χρονικό ρυθμό μεταβολής της μάζας dm/dt με ολοκλήρωση.

   Προσοχή:

   Είναι $dm/dt > 0$ όταν αυξάνεται η μάζα και
   $dm/dt < 0$ όταν μειώνεται η μάζα.

3. Στα πρώτα τρία παραδείγματα θα μελετήσουμε σχετικά απλές περιπτώσεις συστημάτων μεταβλητής μάζας.

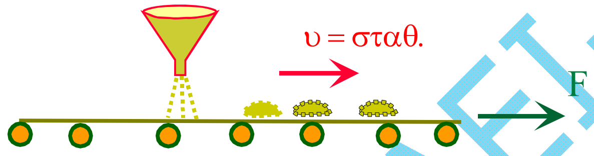
   Στη συνέχεια θα μελετήσουμε περιπτώσεις στις οποίες δίνεται η σχετική ταχύτητα προσκόλλησης ή αποκόλλησης μάζας οπότε και θα χρειαστεί να παρουσιάσουμε μια διαφορετική μεθοδολογία αντιμετώπισης αυτών των προβλημάτων (δες παραδείγματα 4-6)

10.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1η

Άμμος πέφτει από ένα ακίνητο χωνί με ρυθμό λ (kgr/sec) πάνω σε έναν ιμάντα που κινείται με ταχύτητα υ στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Πόση δύναμη απαιτείται για να διατηρήσουμε την κίνηση του ιμάντα σταθερή με ταχύτητα υ;

Λύση:



Επειδή προστίθεται μάζα πάνω στον ιμάντα, αποτελεί σύστημα μεταβλητής μάζας και ισχύει η γενικευμένη διατύπωση του 2ου νόμου του Newton. Δηλαδή:

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\upsilon) \quad \Rightarrow \quad \Sigma F = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt} \qquad (1)$$

όπου $\Sigma F = F$, $\dfrac{d\upsilon}{dt} = 0$ επειδή $\upsilon = \sigma\tau\alpha\theta.$ και $\dfrac{dm}{dt} = \lambda$

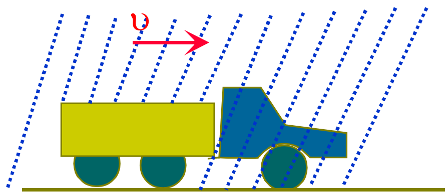
οπότε η (1) δίνει:

$$\boxed{F = \lambda\upsilon}$$

Άσκηση 2η

Ένα άδειο όχημα που αρχικά έχει μάζα m_o και αρχική ταχύτητα υ_o κινείται ευθύγραμμα σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβή. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αρχίζει να πέφτει στο όχημα βροχή με σταθερό ρυθμό λ kgr/sec. Βρείτε τη θέση του οχήματος ως συνάρτηση του χρόνου.

Λύση



Επειδή το όχημα αποτελεί σύστημα μεταβλητής μάζας ισχύει:

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(m\upsilon) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Sigma F = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt}} \quad (1)$$

Αλλά: $$\frac{dm}{dt} = +\lambda \Rightarrow \int_{m_o}^{m} dm = +\lambda\int_0^t dt \Rightarrow \boxed{m(t) = m_o + \lambda t} \quad (2)$$

<u>Υπολογισμός ταχύτητας μέσω λύσης της διαφορικής εξίσωσης (α΄ τρόπος)</u>

Από την (1) έχουμε:

$$\Sigma F = m(t)\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon\frac{dm}{dt} \overset{\Sigma F=0}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} 0 = (m_o + \lambda t)\frac{d\upsilon}{dt} + \lambda\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{\lambda\upsilon}{m_o + \lambda t}$$

$\Rightarrow$

$$\int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\lambda\int_0^t \frac{dt}{m_o + \lambda t} \Rightarrow \ell n\upsilon\Big|_{\upsilon_o}^{\upsilon} = -\frac{\lambda}{\lambda}\ell n(m_o + \lambda t)\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\ell n\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_o}\right) = -\ell n\left(\frac{m_o + \lambda t}{m_o}\right) \Rightarrow \ell n\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_o}\right) = \ell n\left(\frac{m_o}{m_o + \lambda t}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\upsilon}{\upsilon_o} = \frac{m_o}{m_o + \lambda t} \Rightarrow \boxed{\upsilon(t) = \frac{m_o\upsilon_o}{m_o + \lambda t}} \quad (3)$$

<u>Υπολογισμός ταχύτητας με χρήση της Αρχής διατήρησης της Ορμής (β΄τρόπος)</u>

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow p = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow p(t) = p(t=0) \Rightarrow m(t)\upsilon(t) = m_o\upsilon_o \Rightarrow$$

$$\upsilon(t) = \frac{m_o\upsilon_o}{m(t)}$$

$$\boxed{\upsilon(t) = \frac{m_o\upsilon_o}{m_o + \lambda t}} \quad (3)$$

Προσδιορισμός της συνάρτησης θέσης *x(t)*

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{m_o\upsilon_o}{m_o+\lambda t} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = m_o\upsilon_o \int_0^t \frac{dt}{m_o+\lambda t} \Rightarrow$$

$$x = \frac{m_o\upsilon_o}{\lambda}\ell n\left(m_o+\lambda t\right)\Big|_0^t \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = \frac{m_o\upsilon_o}{\lambda}\ell n\left(\frac{m_o+\lambda t}{m_o}\right)}$$

Άσκηση 3η

Βαγόνι κινείται με σταθερή ταχύτητα και χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στο βαγόνι υπάρχει θερμαντήρας που ζεσταίνει ένα δοχείο με νερό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Κάποια χρονική στιγμή το νερό αρχίζει να βράζει και οι ατμοί του νερού εγκαταλείπουν το δοχείο με μηδενική σχεδόν ταχύτητα ως προς ακίνητο παρατηρητή. Βρείτε αν θα αλλάξει η ταχύτητα του οχήματος στις ακόλουθες δυο περιπτώσεις:

α. Η αρχική ταχύτητα του οχήματος είναι μηδέν.

β. Η αρχική ταχύτητα είναι μεγαλύτερη του μηδενός.

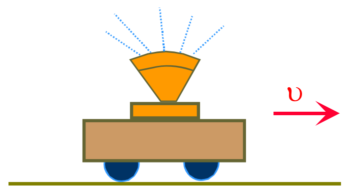
Λύση:

Έστω m_o η αρχική μάζα του συστήματος όχημα – δοχείο και ο ρυθμός με τον οποίο εξατμίζεται το νερό είναι σταθερός λ (kgr/sec). Δηλαδή:

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \int_{m_o}^{m} dm = -\lambda \int_0^t dt \quad \Rightarrow$$

$$m - m_o = -\lambda t \quad \Rightarrow$$

$$m(t) = m_o - \lambda t \qquad (1)$$



Επειδή όμως δεν εφαρμόζονται εξωτερικές δυνάμεις (το βάρος και η κάθετη αντίδραση αλληλοαναιρούνται), η ορμή του συστήματος διατηρείται. Δηλαδή:

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \sigma\tau\alpha\theta. \quad \Rightarrow \quad p_{(t=0)} = p(t) \quad \Rightarrow$$

$$m_o \upsilon_o = m(t)\upsilon(t) \quad \Rightarrow \quad \upsilon(t) = \frac{m_o \upsilon_o}{m(t)} \quad \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\upsilon(t) = \frac{m_o \upsilon_o}{m_o - \lambda t} \qquad (2)$$

α. Συνεπώς αν η αρχική ταχύτητα του οχήματος είναι μηδέν, δηλαδή αν $\upsilon_o = 0$, η (2) δίνει $\upsilon = 0$. Άρα η ταχύτητα του οχήματος δεν θα αλλάξει και θα παραμείνει ακίνητο.

β. Αν $\upsilon_o \neq 0$ η (2) δείχνει ότι η ταχύτητα του οχήματος υ θα αλλάξει με το χρόνο και μάλιστα θα <u>αυξάνεται</u> συνεχώς (μέχρι να εξατμιστεί ολόκληρη η ποσότητα νερού).

Συστήματα μεταβλητής μάζας με δεδομένη την σχετική ταχύτητα

Αν σε ένα σύστημα προστίθεται ή αφαιρείται μάζα με σταθερό ρυθμό dm/dt και με σταθερή σχετική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\sigma\chi}$, τότε η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν πάνω σε αυτό είναι:

$$\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} - \vec{\upsilon}_{\sigma\chi}\frac{dm}{dt}$$

Α. Συνεχής προσκόλληση μάζας με σταθερό ρυθμό

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t προσκολλάται μάζα dm με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\pi$ πάνω στο αρχικό σύστημα μάζας m που κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Θα είναι: $\vec{p}(t) = m\vec{\upsilon} + (dm)\vec{\upsilon}_\pi$

Μετά από στοιχειώδη χρόνο dt η μάζα του συστήματος θα έχει αυξηθεί κατά dm και η ταχύτητά του κατά $d\vec{\upsilon}$, οπότε: $\vec{p}(t+dt) = (m+dm)(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon})$

Έτσι, η μεταβολή της ορμής του συστήματος στο χρονικό διάστημα dt είναι:

$$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = (m+dm)(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon}) - \left[m\vec{\upsilon} + (dm)\vec{\upsilon}_\pi\right] \Rightarrow$$
$$d\vec{p} = \cancel{m\vec{\upsilon}} + md\vec{\upsilon} + dm\vec{\upsilon} + \cancel{dmd\vec{\upsilon}} - \cancel{m\vec{\upsilon}} - dm\vec{\upsilon}_\pi \Rightarrow$$
$$d\vec{p} = md\vec{\upsilon} - dm(\vec{\upsilon}_\pi - \vec{\upsilon}) \Rightarrow d\vec{p} = md\vec{\upsilon} - dm\vec{\upsilon}_{\sigma\chi}$$

όπου $\vec{\upsilon}_{\sigma\chi} = \vec{\upsilon}_\pi - \vec{\upsilon}$ η σχετική ταχύτητα προσκόλλησης μάζας στο σύστημα.

Άρα, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής, που ισούται με τη συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων από το 2^{ο} Νόμο του Νεύτωνα ισούται με:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} - \vec{\upsilon}_{\sigma\chi}\frac{dm}{dt}, \text{ όπου } \frac{dm}{dt} > 0$$

Β. Συνεχής απώλεια μάζας με σταθερό ρυθμό

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t το αρχικό σύστημα μάζας m κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, οπότε η ορμή του είναι: $\vec{p}(t) = m\vec{\upsilon}$

Μετά από στοιχειώδη χρόνο dt η μάζα του συστήματος θα έχει μειωθεί κατά $dm < 0$ και η ταχύτητά του θα μεταβληθεί κατά $d\vec{\upsilon}$ λόγω της αποκόλλησης στοιχειώδους μάζας $(-dm)>0$ με ταχύτητά $\vec{\upsilon}_\alpha$, οπότε: $\vec{p}(t+dt)=(m+dm)(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon})+(-dm)\vec{\upsilon}_a$

Έτσι, η μεταβολή της ορμής του συστήματος στο χρονικό διάστημα dt είναι:

$$d\vec{p}=\vec{p}(t+dt)-\vec{p}(t)=(m+dm)(\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon})+(-dm)\vec{\upsilon}_a-m\vec{\upsilon}\Rightarrow$$

$$d\vec{p}=\cancel{m\vec{\upsilon}}+md\vec{\upsilon}+dm\vec{\upsilon}+\cancel{dmd\vec{\upsilon}}-\cancel{m\vec{\upsilon}}-dm\vec{\upsilon}_a\Rightarrow$$

$$d\vec{p}=md\vec{\upsilon}-dm(\vec{\upsilon}_a-\vec{\upsilon})\Rightarrow d\vec{p}=md\vec{\upsilon}-dm\vec{\upsilon}_{\sigma\chi}$$

όπου $\vec{\upsilon}_{\sigma\chi}=\vec{\upsilon}_a-\vec{\upsilon}$ η σχετική ταχύτητα αποκόλλησης μάζας από το σύστημα.

Άρα, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής, που ισούται με τη συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων από το 2ο Νόμο του Νεύτωνα ισούται με:

$$\sum\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}-\vec{\upsilon}_{\sigma\chi}\frac{dm}{dt},\ \text{όπου}\ \frac{dm}{dt}<0$$

Άσκηση 4η

Να δειχθεί ότι η δύναμη προώθησης ενός πυραύλου λόγω της απώλειας καυσίμων με σχετική ταχύτητα $\vec{u}$ και με σταθερό ρυθμό $\lambda>0$ είναι $\vec{F}_{\pi\rho}=-\lambda\vec{u}$. Θεωρείστε για απλότητα ότι ο πύραυλος κινείται σε περιβάλλον έλλειψης βαρύτητας.

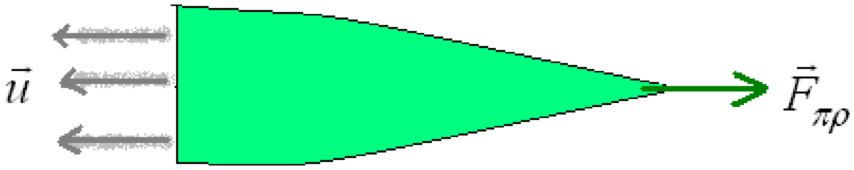
Λύση

Θα εφαρμόσουμε τη σχέση: $\sum\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}-\vec{\upsilon}_{\sigma\chi}\frac{dm}{dt}$, όπου $\frac{dm}{dt}=-\lambda<0$

Επειδή δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στον πύραυλο είναι: $\sum\vec{F}=\vec{0}$, οπότε:

$$\vec{0}=m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}-\vec{u}(-\lambda)\Rightarrow\vec{0}=m\vec{a}+\lambda\vec{u}\Rightarrow\vec{F}_{\pi\rho}=m\vec{a}=-\lambda\vec{u}$$

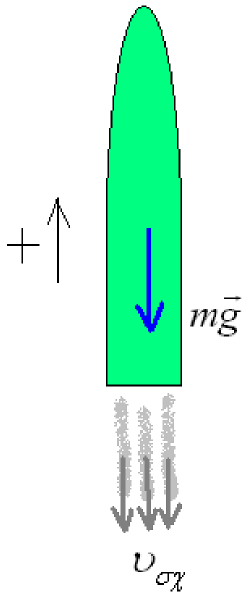
Άρα, η δύναμη προώθησης, όπως αναμένουμε, είναι αντίθετη της σχετικής ταχύτητας εκτόξευσης των καυσίμων, δηλ. $\vec{F}_{\pi\rho} \uparrow\downarrow \vec{u}$, γι' αυτό και προωθεί τον πύραυλο.



<u>Άσκηση 5η</u>

Πύραυλος μάζας $m_0 = m_\pi + m_\kappa$ (όπου m_π η μάζα του πυραύλου χωρίς καύσιμα και m_κ η μάζα των καυσίμων) εκτοξεύεται κατακόρυφα στο βαρυτικό πεδίο. Αν θεωρήσουμε ότι η κίνηση του πυραύλου γίνεται σε μικρή περιοχή σε σχέση με τις διαστάσεις τις Γης, ώστε να μπορούμε να προσεγγίσουμε το βαρυτικό πεδίο ως ομογενές, δηλ. $\vec{g} = \sigma\tau\alpha\theta.$, να βρεθεί η ταχύτητα του πυραύλου συναρτήσει του χρόνου πριν και μετά την εξάντληση των καυσίμων. Δίνεται ότι τα καύσιμα εκτοξεύονται με σταθερή ως προς τον πύραυλο σχετική ταχύτητα $\upsilon_{\sigma\chi}$ και με σταθερό ρυθμό λ (kg/s).

<u>Λύση</u>



Θεωρούμε έναν πύραυλο αρχικής μάζας m_0 ο οποίος εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Θεωρούμε ότι ο ρυθμός με τον οποίο χάνει καύσιμα είναι σταθερός και ίσος με $\lambda > 0$, οπότε:

$$\frac{dm}{dt} = -\lambda < 0 \Rightarrow \int_{m_0}^{m} dm = -\lambda \int_0^t dt \Rightarrow m - m_0 = -\lambda t \Rightarrow m = m_0 - \lambda t$$

δηλαδή η μάζα του πυραύλου μειώνεται γραμμικά ως προς το χρόνο.

Αν η καθαρή μάζα του πυραύλου είναι m_π και η μάζα των καυσίμων m_κ, τότε:

$m_0 = m_\pi + m_\kappa$, οπότε $m = m_\pi + m_\kappa - \lambda t$

Προφανώς ο πύραυλος θα χάνει καύσιμα μέχρις ότου αυτά εξαντληθούν δηλαδή μέχρι τη χρονική στιγμή $t_1 = m_\kappa / \lambda$. Μετά από αυτή τη χρονική στιγμή η μάζα του πυραύλου δεν μεταβάλλεται και παραμένει σταθερή και ίση με m_π. Άρα:

$$m(t) = \begin{cases} m_\pi + m_\kappa - \lambda t, & 0 \le t \le t_1 \\ m_\pi, & t \ge t_1 = m_\kappa / \lambda \end{cases}$$

Αν θεωρήσουμε ότι η κίνηση του πυραύλου γίνεται σε μικρή περιοχή σε σχέση με τις διαστάσεις της Γης, ώστε να λάβουμε το βαρυτικό πεδίο ως ομογενές, τότε το βάρος του πυραύλου είναι η μόνη δύναμη που δρα στο σύστημα κι έτσι:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{g} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} - \vec{\upsilon}_{\sigma\chi}\frac{dm}{dt} \text{ για χρονικές στιγμές: } 0 \le t \le t_1 = m_\kappa / \lambda$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι $\vec{g} = -g\hat{k}$, $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{k}$ και $\vec{\upsilon}_{\sigma\chi} = -\upsilon_{\sigma\chi}\hat{k}$ ή ισοδύναμα

Λαμβάνοντας ως θετική φορά τη φορά προς τα πάνω παίρνουμε:

$$-mg = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon_{\sigma\chi}\frac{dm}{dt} \Rightarrow -mg = m\frac{d\upsilon}{dt} + \upsilon_{\sigma\chi}(-\lambda) \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\lambda\upsilon_{\sigma\chi}}{m(t)} - g \Rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\lambda\upsilon_{\sigma\chi}}{m_0 - \lambda t} - g \Rightarrow \int_0^\upsilon d\upsilon = \int_0^t \frac{\lambda\upsilon_{\sigma\chi}}{m_0 - \lambda t}dt - \int_0^t g dt \Rightarrow$$

$$\upsilon = \lambda\upsilon_{\sigma\chi}\left[\frac{\ln(m_0 - \lambda t)}{-\lambda}\right]_0^t - gt \Rightarrow \upsilon = -\upsilon_{\sigma\chi}\ln\left(\frac{m_0 - \lambda t}{m_0}\right) - gt \quad \text{για}$$

$0 \le t \le t_1 = m_\kappa / \lambda$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = m_\kappa / \lambda$ είναι: $m(t_1) = m_0 - \lambda t_1 = m_\pi + m_\kappa - \lambda t_1 = m_\pi$ οπότε:

$$\upsilon_1 = \upsilon(t_1) = -\upsilon_{\sigma\chi}\ln\left(\frac{m_\pi}{m_\pi + m_\kappa}\right) - gt_1 = \upsilon_{\sigma\chi}\ln\left(\frac{m_\pi + m_\kappa}{m_\pi}\right) - gt_1$$

Σε μεγαλύτερους χρόνους η κίνηση του πυραύλου καθορίζεται μόνον από το βάρος του αφού η μάζα του πλάον δεν μεταβάλλεται, οπότε ο πύραυλος εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα άνω με ταχύτητα $\upsilon_1 = \upsilon(t_1)$. Άρα η ταχύτητά του τις επόμενες στιγμές δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -g \Rightarrow \int_{\upsilon_1}^{\upsilon} d\upsilon = -g\int_{t_1}^{t} dt \Rightarrow \upsilon - \upsilon_1 = -g(t - t_1) \Rightarrow \upsilon = \upsilon_1 - g(t - t_1) \Rightarrow$$

$$\upsilon = -\upsilon_{\sigma\chi}\ln\left(\frac{m_\pi}{m_\pi + m_\kappa}\right) - gt_1 - g(t - t_1) \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{\sigma\chi}\ln\left(\frac{m_\pi + m_\kappa}{m_\pi}\right) - gt \quad \text{για}$$

$t \ge t_1$

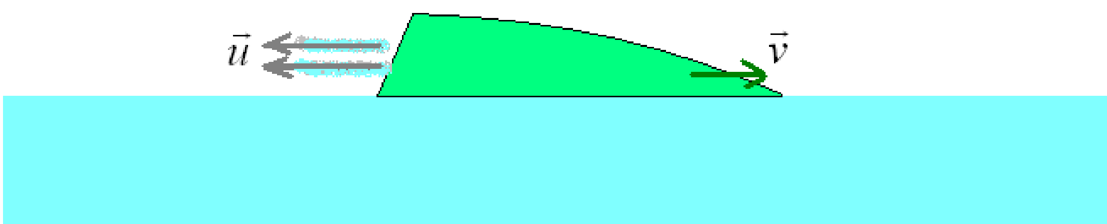
Συνοψίζοντας:

$$\upsilon(t)=\begin{cases}\upsilon_{\sigma\chi}\ln\left(\dfrac{m_\pi+m_\kappa}{m_\pi+m_\kappa-\lambda t}\right)-gt,\ 0\le t\le t_1=m_\kappa/\lambda\\ \upsilon_{\sigma\chi}\ln\left(\dfrac{m_\pi+m_\kappa}{m_\pi}\right)-gt,\ t\ge t_1=m_\kappa/\lambda\end{cases}$$

Άσκηση 6η

Ένα jet ski (ταχύπλοο που αναρροφά νερό από την καρίνα και το εκτοξεύει προς τα πίσω) ξεκινά από την ηρεμία. Αν η αντίσταση του νερού δίνεται από τη σχέση $\vec{A}=-\kappa\vec{v}$, όπου $\vec{v}$ η ταχύτητα του ταχύπλοου και κ θετική σταθερά, και το νερό εκτοξεύεται με σχετική ταχύτητα $u=35m/s$ ως προς το jet ski και με ρυθμό $\lambda=10kg/s$, υπολογίστε την τελική ταχύτητα του jet ski. Δίνεται ότι $\kappa=10N\cdot s/m$.

Λύση



Σε αυτήν την άσκηση δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση της θεωρίας που είδαμε στα προηγούμενα, διότι αυτή τη φορά η μάζα του jet-ski δεν αλλάζει, ενώ η μεταβολή της ορμής σχετίζεται με τη μάζα του νερού που διέρχεται μέσα από αυτό.

Την χρονική στιγμή t η ταχύτητα του jet-ski είναι $\vec{v}$ οπότε η ορμή του είναι:

$$\vec{p}(t)=M\vec{v}\Rightarrow p(t)=Mv \quad (1)$$

όπου M είναι η σταθερή μάζα του jet-ski που δεν γνωρίζουμε μεν, αλλά όπως θα δούμε δεν θα χρειαστεί τελικά.

Σε στοιχειώδη χρόνο dt η ταχύτητα του jet-ski μεταβάλλεται κατά $d\vec{v}$ ενώ διέρχεται μέσα από αυτό μάζα νερού $dm>0$ με ταχύτητα $\vec{V}$ ως προς ακίνητο παρατηρητή. Για να βρούμε την $\vec{V}$ συναρτήσει των δεδομένων της σχετικής ταχύτητας $\vec{u}$ και της ταχύτητας του jet-ski $\vec{v}$ χρησιμοποιούμε τον ορισμό της σχετικής ταχύτητας:

$$\vec{u}=\vec{V}-\vec{v}\Rightarrow\vec{V}=\vec{v}+\vec{u}\Rightarrow V=v-u \quad (2)$$

όπου λάβαμε τη θετική φορά προς τα δεξιά, ενώ επειδή η V δεν είναι γνωστή, συμβατικά λαμβάνεται ως θετική. Έτσι, αν προκύψει τελικά αρνητική θα σημαίνει ότι η φορά της είναι προς τα αριστερά (δες παρατήρηση στο τέλος)

Άρα, τη χρονική στιγμή $t+dt$ είναι:

$$\vec{p}(t+dt)=M(\vec{v}+d\vec{v})+dm\vec{V}\overset{(2)}{\Rightarrow}p(t+dt)=M(v+dv)+dm(v-u) \quad (3)$$

Έτσι, η μεταβολή της ορμής του συστήματος είναι:

$$d\vec{p}=\vec{p}(t+dt)-\vec{p}(t)\Rightarrow dp=M(v+dv)+dm(v-u)-Mv\Rightarrow$$
$$dp=Mdv+dm(v-u)$$

Έτσι, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με:

$$\frac{dp}{dt}=M\frac{dv}{dt}+\frac{dm}{dt}(v-u)\overset{\lambda=dm/dt}{\Rightarrow}\frac{dp}{dt}=M\frac{dv}{dt}+\lambda(v-u) \quad (4)$$

Όμως, από το δεύτερο Νόμο του Νεύτωνα, επειδή η μόνη δύναμη που δρα στη διεύθυνση της κίνησης είναι η αντίσταση του νερού, θα έχουμε:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum\vec{F}=\vec{A}\Rightarrow\frac{d\vec{p}}{dt}=-\kappa\vec{v}\Rightarrow\frac{dp}{dt}=-\kappa v\overset{(4)}{\Rightarrow}-\kappa v=M\frac{dv}{dt}+\lambda(v-u) \quad (5)$$

Η τελική ταχύτητα του jet ski είναι η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά αυτό, οπότε σε αυτή τη χρονική στιγμή θα είναι:

$$\frac{dv}{dt}=0$$

οπότε θα μηδενιστεί ο όρος που περιέχει την άγνωστη μάζα M στην (5) με αποτέλεσμα η σχέση (5) να δώσει:

$$-\kappa v = M\cdot 0+\lambda\left(v-u\right)\Rightarrow -\kappa v-\lambda v=-\lambda u\Rightarrow \kappa v+\lambda v=\lambda u\Rightarrow v=\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}u$$

Αντικαθιστώντας: $u=35m/s$, $\lambda=10kg/s$ και $\kappa=10N\cdot s/m$ παίρνουμε:

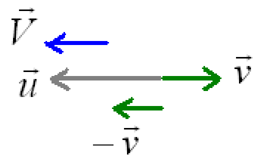
$$v=\frac{10kg/s}{10kg/s+10Ns/m}35m/s\Rightarrow v=17,5m/s$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

<u>Παρατήρηση στις μονάδες</u>: $1Ns/m=1kg\dfrac{m}{s^2}\dfrac{s}{m}=1kg/s$

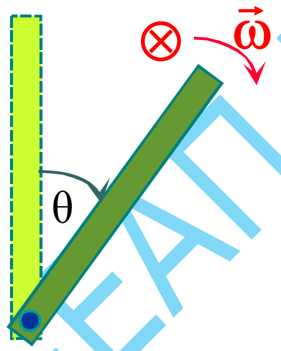
<u>Παρατήρηση στην ταχύτητα V της (2)</u>: $\left(2\right)\Rightarrow V=17,5-35=-17,5m/s$

Άρα, ένας ακίνητος παρατηρητής βλέπει το νερό να περνά μέσα από το jet-ski και να κινείται προς τα αριστερά (αντίθετα του jet-ski) αλλά με τη <u>μισή</u> ταχύτητα από αυτή που βλέπει ο οδηγός του jet-ski.



11.1 ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Έστω ένα στερεό σώμα (π.χ. η ράβδος του σχήματος) που περιστρέφεται περί άξονα που περνά από το σημείο Ο (άκρο ράβδου). Η μετακίνηση κάθε περιστρεφόμενου σώματος περιγράφεται από τη **γωνία περιστροφής θ.** Ενώ το πόσο γρήγορα περιστρέφεται, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας περιστροφής ορίζει τη **γωνιακή ταχύτητα** $\vec{\omega}$ του στερεού σώματος και είναι:



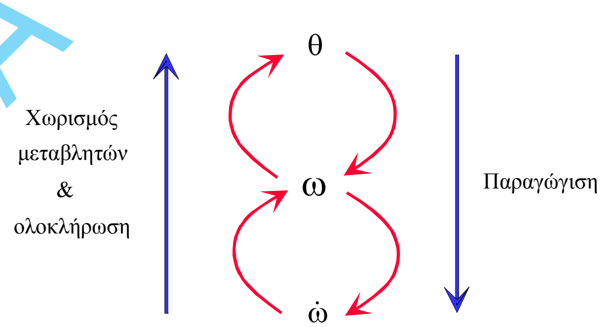
$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{z}} \qquad (\mathrm{rad/sec})$$

Δηλαδή το διάνυσμα της $\vec{\omega}$ έχει μέτρο $d\theta/dt$, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της περιστροφής και φορά καθοριζόμενη σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Τέλος ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας ω ορίζει τη **γωνιακή επιτάχυνση** $\dot{\vec{\omega}}$ του στερεού σώματος και είναι:

$$\boxed{\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}} \qquad (\mathrm{rad/sec^2})$$

Άρα τα κινηματικά μεγέθη της περιστροφικής κίνησης είναι τα θ, ω και $\dot{\omega}$ και κατά αντιστοιχία με την μεταφορική κίνηση συνδέονται μέσω της ακόλουθης σχηματικής πορείας:

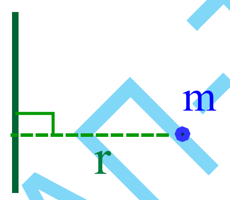


Επειδή σε κάθε στερεό σώμα που εκτελεί περιστροφική κίνηση, κάθε υλικό του σημείο διαγράφει κυκλική τροχιά με τα κέντρα όλων αυτών των κύκλων να βρίσκονται πάνω στην ευθεία που ορίζει τον άξονα περιστροφής, η σχέση που συνδέει τη γραμμική ταχύτητα κάθε υλικού σημείου με τη γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου στερεού σώματος είναι:

$$\boxed{\upsilon_i = \omega r_i}$$

όπου r_i η απόσταση του υλικού σημείου από τον άξονα περιστροφής.

✦ Χαρακτηριστικό μέγεθος της περιστροφικής κίνησης στερεού σώματος είναι η **ροπή αδράνειας I**, η οποία περιγράφει το μέτρο της αντίστασης ενός στερεού σώματος στην περιστροφή του ως κάποιο άξονα. Δηλαδή όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας ως προς κάποιο άξονα, τόσο μεγαλύτερη «προσπάθεια» απαιτείται για να περιστραφεί.



Για μια σημειακή μάζα m που βρίσκεται σε απόσταση r από τον άξονα περιστροφής, η ροπή αδράνειας ορίζεται ως:

$$\boxed{I = mr^2} \qquad \left(kgr \cdot m^2\right)$$

Ενώ για σύστημα η σημειακών μαζών m_i είναι:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

όπου r_i η απόσταση κάθε σημειακής μάζας από τον άξονα περιστροφής.

Για στερεά σώματα με συνεχή κατανομή μάζας είναι:

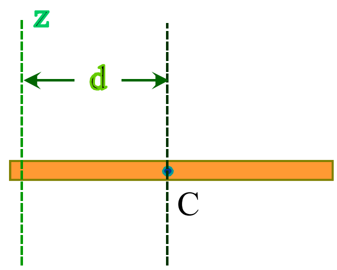
$$I = \int r^2 dm$$

όπου r η απόσταση της στοιχειώδους μάζας dm από τον άξονα περιστροφής και η ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα στα όρια όλου του σώματος.

<u>Θεωρήματα υπολογισμού ροπής αδράνειας</u>

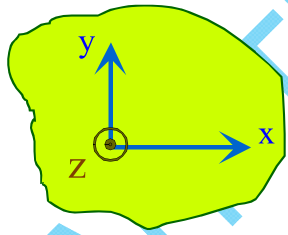
1. Θεώρημα Steiner ή παράλληλων αξόνων:

Αν I_c είναι η ροπή αδράνειας στερεού σώματος μάζας m ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, τότε η ροπή αδράνειας I_z ως προς παράλληλο άξονα σε απόσταση d από τον άξονα του κέντρου μάζας είναι:



$$\boxed{I_z = I_c + md^2}$$

2. Θεώρημα κάθετων αξόνων:



Η ροπή αδράνειας επίπεδου στερεού σώματος ως προς άξονα z κάθετο στο επίπεδό του, ισούται με το άθροισμα των ροπών αδρανείας ως προς δυο οποιουσδήποτε κάθετους μεταξύ τους άξονες x, y που βρίσκονται στο επίπεδο του σώματος και τέμνουν τον κάθετο άξονα. Δηλαδή:

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

✶ **Κινητική ενέργεια** περιστρεφόμενου στερεού σώματος:

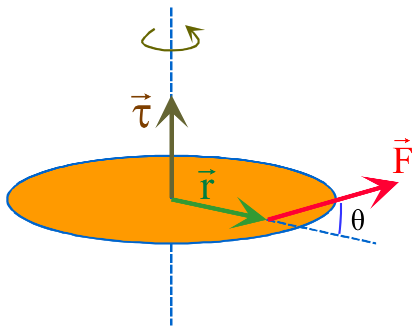
$$\boxed{K = \frac{1}{2} I_o \omega^2}$$

όπου I_o η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον εκάστοτε άξονα περιστροφής.

✶ **Ροπή δύναμης – Θεμελιώδης νόμος περιστροφικής κίνησης:**

Την ικανότητα μιας δύναμης να περιστρέφει ένα σώμα γύρω από έναν άξονα περιγράφεται από το διανυσματικό φυσικό μέγεθος της **ροπής δύναμης** $\vec{\tau}$ **,** η οποία εξαρτάται από την ασκούμενη δύναμη και το σημείο εφαρμογής της δύναμης.

Ροπή δύναμης ως προς άξονα καλείται το διανυσματικό φυσικό μέγεθος $\vec{\tau}$, το οποίο ισούται με το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ του σημείου εφαρμογής της δύναμης από τον άξονα και της δύναμης $\vec{F}$. Δηλαδή:



$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}} \quad (\mathrm{Nt \cdot m})$$

Δηλαδή το μέτρο της ροπής είναι $\tau = rF\sin\theta$ και είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{r}$, $\vec{F}$ ενώ η φορά της καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. (Για το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων ανατρέξτε στο βιβλίο ΦΥΣΙΚΗ Ι - ΜΗΧΑΝΙΚΗ Π. Φ. ΜΟΙΡΑ σελ. 6)

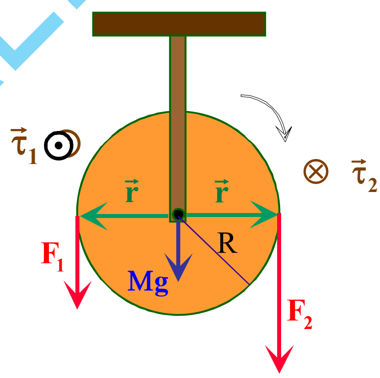
Κάθε περιστρεφόμενο στερεό σώμα υπόκειται στο **θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης** σύμφωνα με τον οποίο:

$$\boxed{\Sigma\vec{\tau}_o = I_o\dot{\vec{\omega}}}$$

όπου οι ροπές των δυνάμεων $\Sigma\vec{\tau}_o$ και η ροπή αδράνειας I_o αναφέρονται ως προς τον εκάστοτε άξονα περιστροφής και ως θετική φορά των ροπών δυνάμεων λαμβάνεται η φορά της περιστροφικής κίνησης.

<u>Παράδειγμα:</u>

Έστω μια τροχαλία μάζας M και ακτίνας R, η οποία μπορεί να περιστρέφεται περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Σε αυτήν ασκούνται εφαπτομενικά στην περιφέρεια της οι δυνάμεις F_1, F_2 και τελικά περιστρέφεται δεξιόστροφα. Επίσης ασκείται το βάρος της Mg το οποίο δεν έχει ροπή δύναμης ως προς το O αφού $\vec{r}=0$. Η ροπή της δύναμης $\vec{F}_1$ είναι:



$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}\times\vec{F}_1 = RF_1\sin 90^o\hat{z} \quad\Rightarrow\quad \vec{\tau}_1 = RF_1\hat{z}$$

Ενώ η ροπή της $\vec{F}_2$ είναι:

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}\times\vec{F}_2 = RF_2\sin 90^o(-\hat{z}) \quad\Rightarrow\quad \vec{\tau}_2 = RF_2(-\hat{z})$$

Επειδή η φορά της περιστροφικής κίνησης της τροχαλίας, όπως βρίσκεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, είναι προς τα μέσα $(-\hat{z})$ η $\vec{\tau}_2$ είναι θετική ροπή, ενώ η $\vec{\tau}_1$ είναι αρνητική ροπή. Συνεπώς η συνισταμένη των ροπών είναι:

$$\Sigma\tau_o = \tau_2 - \tau_1$$

και ο θεμελιώδης νόμος της περιστροφικής κίνησης δίνει:

$$\Sigma\vec{\tau}_o = I_o\dot{\vec{\omega}} \quad\Rightarrow\quad \tau_2-\tau_1 = I_o\dot{\omega} \quad\Rightarrow\quad RF_2 - RF_1 = I_o\dot{\omega}$$

<u>Παρατήρηση:</u>

Αν ένα στερεό σώμα περιστρέφεται υπό την επίδραση μόνο συντηρητικών δυνάμεων τότε εναλλακτικά, αντί του θεμελιώδη νόμου της περιστροφικής κίνησης μπορεί να εφαρμοστεί η αρχή διατήρησης της ενέργειας $(E=K+V=\sigma\tau\alpha\theta.)$. Το πλεονέκτημα που προσφέρει είναι η χρήση βαθμωτών μεγεθών (κινητική, δυναμική ενέργεια) κι όχι διανυσματικών μεγεθών $(\vec{\tau},\ \vec{\omega})$.

Προσέξτε ότι η δυναμική ενέργεια λόγω βάρους υπολογίζεται ως προς το κέντρο μάζας του σώματος, δηλαδή σαν όλη η μάζα του σώματος να ήταν συγκεντρωμένη στο σημείο του κέντρου μάζας και η κινητική ενέργεια περιστροφής είναι:

$$K = \frac{1}{2} I_o \omega^2$$

Έργο περιστροφικής κίνησης:

$$W = \int_{\theta_o}^{\theta} \tau d\theta$$

Ισχύς περιστροφικής κίνησης:

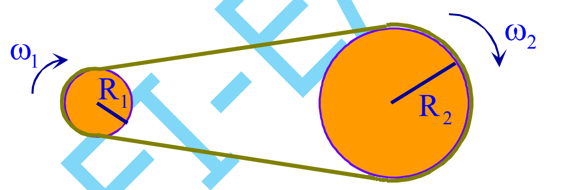
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}}$$

11.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1η

Δυο τροχοί με ακτίνες $R_1 = 0,25\text{m}$ και $R_2 = 0,5\text{m}$ συνδέονται με ιμάντα. Αν ο μικρός τροχός συνδεθεί με κινητήρα που τον περιστρέφει με συχνότητα 120 στροφές το λεπτό, να βρεθεί η συχνότητα περιστροφής του μεγάλου τροχού.

Λύση: Επειδή οι δυο τροχοί είναι συνδεδεμένοι μέσω του ιμάντα και η γραμμική ταχύτητα του ιμάντα είναι η ίδια θα ισχύει:



$$\upsilon = \text{κοινή} \quad \Rightarrow \quad \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \quad \Rightarrow$$

$$\omega_2 = \frac{R_1}{R_2}\omega_1 = \frac{0,25}{0,5}\cdot 120\text{στρ./min} \quad \Rightarrow$$

$$\omega_2 = 60\text{στροφές/min}$$

- Μετατροπή μονάδων:

$$\omega_2 = 60\frac{\text{στρ.}}{\text{min}} = 60\frac{2\pi\text{rad}}{60\sec} \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 2\pi \ \text{rad/sec}$$

Άσκηση 2η

Τρεις ίσες σημειακές μάζες βρίσκονται στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α (βλ. σχήμα) και συνδέονται μεταξύ τους με ένα αβαρές τριγωνικό φύλλο.

α. Να βρείτε τη ροπή αδράνειας I_z ως προς τον άξονα που είναι κάθετος στο τρίγωνο και περνά από το κέντρο του C.

β. Να υπολογίσετε την I_y ως προς τον άξονα y (βλ. σχήμα).

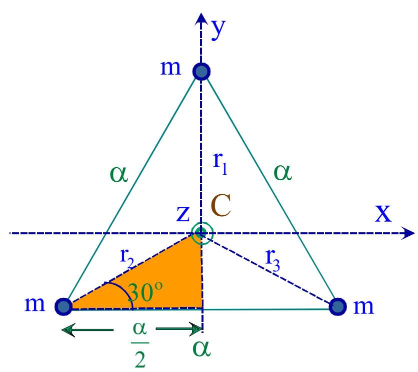
γ. Να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα των κάθετων αξόνων για να υπολογίσετε την I_x

Λύση:

α. Η ροπή αδράνειας I_z του συστήματος των μαζών είναι:

$$I_z = \Sigma m_i r_i^2 = m r_1^2 + m r_2^2 + m r_3^2 \quad (1)$$

όπου r_1, r_2, r_3 η απόσταση κάθε σημειακής μάζας από τον άξονα z.



Από το σκιασμένο ορθογώνιο τρίγωνο με γωνία 30^o είναι:

$$\cos 30^o = \frac{\alpha/2}{r_2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha}{2r_2} \Rightarrow r_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} = r_1 = r_3$$

Άρα η (1) δίνει:

$$I_z = m\frac{\alpha^2}{3} + m\frac{\alpha^2}{3} + m\frac{\alpha^2}{3} = 3m\frac{\alpha^2}{3} \Rightarrow \boxed{I_z = m\alpha^2} \quad (2)$$

β. Η ροπή αδράνειας I_y του συστήματος είναι:

$$I_y = m\cdot 0^2 + m\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + m\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = m\frac{\alpha^2}{4} + m\frac{\alpha^2}{4} = 2m\frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow$$

$$\boxed{I_y = m\frac{\alpha^2}{2}} \quad (3)$$

γ. Από το θεώρημα των κάθετων αξόνων είναι:

$$I_z = I_x + I_y \Rightarrow I_x = I_z - I_y \overset{(2,3)}{=} m\alpha^2 - m\frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow$$

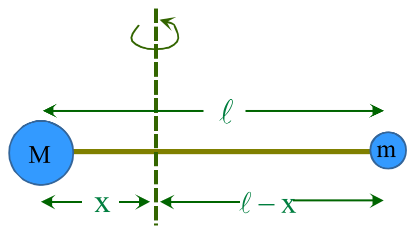
$$\boxed{I_x = m\frac{\alpha^2}{2}}$$

<u>Άσκηση 3η</u>

Δυο μάζες M και m συνδέονται με μια στερεά ράβδο μήκους ℓ και αμελητέας μάζας, όπως στο σχήμα. Για έναν άξονα κάθετο στη ράβδο αποδείξτε ότι το σύστημα έχει την ελάχιστη ροπή αδράνειας όταν ο άξονας διέρχεται από το κέντρο μάζας. Αποδείξτε ότι η ελάχιστη ροπή αδρανείας είναι $I = \mu\ell^2$, όπου $\mu = \dfrac{mM}{m+M}$

<u>Λύση:</u> Έστω ο άξονας περιστροφής που απέχει απόσταση x από τη μάζα M. Τότε η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι:

$$I = Mx^2 + m(\ell - x)^2 \quad (1)$$



Η συνάρτηση (1) αποτελεί την $I(x)$ δηλαδή τη ροπή αδράνειας συναρτήσει της απόστασης x του άξονα περιστροφής. Η ροπή αδράνειας παίρνει ακρότατη τιμή όταν:

$$\frac{dI}{dx} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2Mx + 2m(\ell - x)(-1) = 0 \Rightarrow$$

$$2Mx - 2m(\ell - x) = 0 \Rightarrow$$

$$2Mx = 2m(\ell - x) \quad \Rightarrow \quad Mx = m\ell - mx \quad \Rightarrow \quad (M+m)x = m\ell \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{m\ell}{m+M}}$$

και επειδή:

$$\left.\frac{d^2I}{dx^2}\right|_{x = m\ell/m+M} = 2M + 2m > 0$$

η τιμή $x = \dfrac{m\ell}{m+M}$ αντιστοιχεί στο ελάχιστο της ροπής αδράνειας που είναι στη θέση όπου ο άξονας διέρχεται από το κέντρο μάζας αφού:

$$x_C = \frac{M \cdot 0 + m\ell}{M+m} = \frac{m\ell}{M+m}$$

Άρα η (1) για $x = m\ell / m + M$ δίνει την ελάχιστη ροπή αδράνειας ως:

$$I_{min} = M\left(\frac{m\ell}{M+m}\right)^2 + m\left(\ell - \frac{m\ell}{M+m}\right)^2 = \frac{Mm^2\ell^2}{(M+m)^2} + m\left(\frac{\ell M + \cancel{\ell m} - \cancel{\ell m}}{M+m}\right)^2 =$$

$$= \frac{Mm^2\ell^2}{(M+m)^2} + \frac{mM^2\ell^2}{(M+m)^2} = \frac{(Mm^2 + mM^2)\ell^2}{(M+m)^2} = \frac{mM(m+M)\ell^2}{(M+m)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{I_{min} = \frac{mM}{M+m}\ell^2 = \mu\ell^2}$$

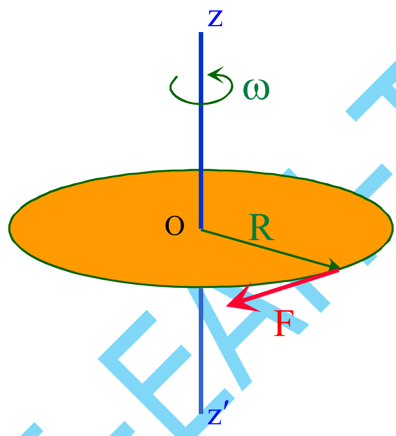
<u>Άσκηση 4η</u>

Ο τροχός του σχήματος, μάζας $m = 2kgr$ και ακτίνα $R = 0{,}5m$ στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 100 rad/sec$ γύρω από τον άξονα zz'. Τη χρονική στιγμή $t_o = 0$ αρχίζει να ασκείται στο τροχό σταθερή δύναμη F εφαπτομενική σε αυτόν, με αποτέλεσμα τη χρονική στιγμή $t = 5 sec$ ο τροχός να σταματήσει.

α. Να υπολογιστεί η γωνιακή επιβράδυνση του τροχού.
β. Να προσδιοριστεί το μέτρο της δύναμης F.
γ. Να σχηματιστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\omega(t)$.
δ. Να υπολογίσετε τη γωνία στροφής του τροχού μέχρι να σταματήσει.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής $I = \dfrac{1}{2}mR^2$.

<u>Λύση:</u>



α. Η ροπή που ασκείται στον τροχό είναι της δύναμης F και είναι:

$$\vec{\tau}_F = \vec{r}\times\vec{F} = RF\sin 90^o(-\hat{z}) \quad\Rightarrow\quad \vec{\tau}_F = RF(-\hat{z})$$

Η ροπή αυτή είναι σταθερή, αφού τα R , F είναι σταθερά. Επίσης η ροπή αδράνειας $I = \frac{1}{2}mR^2$ είναι σταθερή, οπότε από το θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης $\Sigma\vec{\tau}_o = I_o\vec{\dot{\omega}}$ προκύπτει ότι $\dot{\omega}$ είναι σταθερό, δηλαδή ο τροχός θα στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση $\dot{\omega}$. Επομένως από τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης προκύπτει:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} \quad\Rightarrow\quad \int_{100}^{0} d\omega = \dot{\omega}\int_{o}^{5} dt \quad\Rightarrow$$

$$-100 = 5\dot{\omega} \quad\Rightarrow\quad \dot{\omega} = -20\,rad/sec^2$$

$$\text{ή}\quad \dot{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega-\omega_o}{t-t_o} = \frac{0-100}{5-0} \quad\Rightarrow\quad \dot{\omega} = -20\,rad/sec^2$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η γωνιακή ταχύτητα θα μειώνεται, δηλαδή είναι γωνιακή επιβράδυνση.

β. Από το θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης προκύπτει:

$$\Sigma\vec{\tau}_o = I_o\vec{\dot{\omega}} \quad\Rightarrow\quad -\cancel{R}F = \frac{1}{2}mR^{\cancel{2}}\dot{\omega} \quad\Rightarrow\quad F = -\frac{mR\dot{\omega}}{2} = -\frac{2\cdot 0,5\cdot(-20)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{F = 10Nt}$$

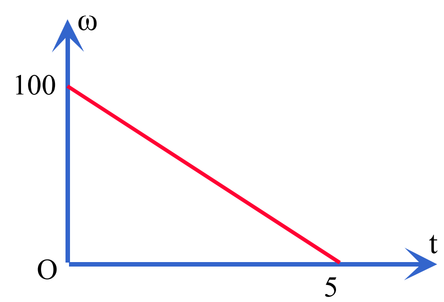
γ. Είναι:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} \quad\Rightarrow\quad -20 = \frac{d\omega}{dt} \quad\Rightarrow\quad \int_{100}^{\omega} d\omega = -20\int_{0}^{t} dt \quad\Rightarrow$$

$$\omega - 100 = -20t \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\omega(t) = 100 - 20t} \quad (A)$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω είναι η ακόλουθη:



δ. Από τον ορισμό της γωνιακής ταχύτητας προκύπτει:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \overset{(A)}{\Rightarrow} 100 - 20t = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \int_0^\theta d\theta = \int_0^5 (100-20t)dt \Rightarrow$$

$$\theta = 100t - 20\frac{t^2}{2}\Big|_0^5 = 100\cdot 5 - 20\cdot\frac{5^2}{2} = 500 - 250 \Rightarrow \boxed{\theta = 250\text{rad}}$$

ή

$$\dot\omega = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{\cancel{d\theta}^{\,\omega}}{\cancel{dt}} \Rightarrow \dot\omega = \frac{d\omega}{d\theta}\omega \Rightarrow \omega d\omega = \dot\omega d\theta \Rightarrow$$

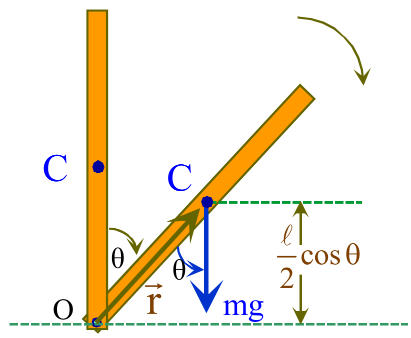
$$\int_{100}^{0}\omega d\omega = -20\int_0^\theta d\theta \Rightarrow \frac{\omega^2}{2}\Big|_{100}^{0} = -20\theta \Rightarrow -\frac{100^2}{2} = -20\theta \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{10000}{40} \Rightarrow \boxed{\theta = 250\text{rad}}$$

Άσκηση 5η

Ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους ℓ είναι στερεωμένη σε οριζόντιο άξονα O που διέρχεται από το ένα άκρο της. Αρχικά βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση και αφήνεται να πέσει ελεύθερο σε πεδίο βαρύτητας g. Να υπολογιστούν η γωνιακή επιτάχυνση και η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου ως συνάρτηση της γωνίας θ που σχηματίζει η ράβδος με την κατακόρυφο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτή που διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_C = \frac{1}{12}m\ell^2$



Λύση: Η ράβδος εκτελεί περιστροφική κίνηση υπό την επίδραση του βάρους της mg. Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης ισχύει:

$$\Sigma\vec\tau_o = I_o\vec{\dot\omega} \Rightarrow mg\frac{\ell}{2}\sin\theta = I_o\dot\omega \quad (1)$$

Αλλά από το θεώρημα Steiner είναι:

$$I_o = I_C + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2 \Rightarrow$$

$$I_o = \frac{1}{3}m\ell^2$$

Οπότε η (1) δίνει:

$$mg\frac{\ell}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}m\ell^2\dot\omega \Rightarrow \boxed{\dot\omega = \frac{3g}{2\ell}\sin\theta} \quad (2)$$

Και από τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης προκύπτει:

$$\dot{\omega}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{\cancel{d\theta}^{\,\omega}}{\cancel{dt}}\overset{(2)}{\Rightarrow}\quad \frac{3g}{2\ell}\sin\theta=\frac{d\omega}{d\theta}\omega \quad\Rightarrow$$

$$\int_0^{\omega}\omega d\omega=\frac{3g}{2\ell}\int_0^{\theta}\sin\theta d\theta \quad\Rightarrow\quad \frac{\omega^2}{\cancel{2}}=\frac{3g}{\cancel{2}\ell}\left[-\cos\theta\right]_0^{\theta}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{3g}{\ell}\left(1-\cos\theta\right)}}$$

<u>2ος τρόπος:</u>

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ της κατακόρυφης (αρχικής) θέσης και της τυχαίας (τελικής) θέσης, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνά από το Ο προκύπτει:

Α.Δ.Ε.: $K_{αρχ.}+V_{αρχ.}=K_{τελ.}+V_{τελ.} \quad\Rightarrow$

$$O+mg\frac{\ell}{2}=\frac{1}{2}I_o\omega^2+mg\frac{\ell}{2}\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\cancel{2}}I_o\omega^2=mg\frac{\ell}{\cancel{2}}\left(1-\cos\theta\right)\quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}\cancel{m}\ell^{\cancel{2}}\omega^2=\cancel{m}g\cancel{\ell}\left(1-\cos\theta\right)\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{\frac{3g}{\ell}\left(1-\cos\theta\right)}}\qquad(3)$$

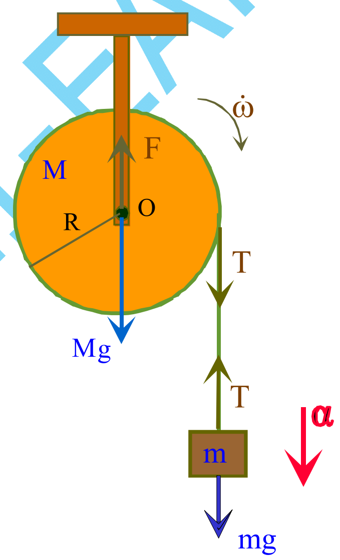
Ενώ από τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης είναι:

$$\dot{\omega}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\omega\overset{(3)}{=}\frac{\frac{3g}{\ell}\sin\theta}{2\cancel{\sqrt{\frac{3g}{\ell}\left(1-\cos\theta\right)}}}\cancel{\sqrt{\frac{3g}{\ell}\left(1-\cos\theta\right)}}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{\omega}=\frac{3g}{2\ell}\sin\theta}$$

Άσκηση 6η

Συμπαγής κύλινδρος μάζας 2kgr και ακτίνας 4cm, είναι αναγκασμένος να στρέφεται γύρω από τον άξονα του, που είναι οριζόντιος. Ένα νήμα είναι τυλιγμένο γύρω από τον κύλινδρο και το ένα άκρο του, που κρέμεται ελεύθερο, συγκρατεί μια μάζα 150gr, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε τη γραμμική επιτάχυνση της μάζας, τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου, την τάση του νήματος και την κατακόρυφη δύναμη που συγκρατεί τον κύλινδρο. Δίνεται ότι $I_o = \frac{1}{2}MR^2$



Λύση: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα τροχαλίας – μάζας φαίνονται στο σχήμα. Για την μεταφορική κίνηση της μάζας m ο 2ος νόμος του Newton δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad mg - T = m\alpha \quad (1)$$

Ενώ για την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας ο θεμελιώδης νόμος της περιστροφικής κίνησης δίνει:

$$\Sigma\vec{\tau}_o = I_o\vec{\dot{\omega}} \quad \Rightarrow \quad TR = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{MR}{2}\dot{\omega} \quad (2)$$

Επειδή όταν η τροχαλία περιστρέφεται κατά γωνία ϕ, το νήμα ξετυλίγεται κατά $s = \phi R$ και κατά το ίδιο διάστημα πέφτει η μάζα m προς τα κάτω, ισχύει:

$$s = \phi R \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2\phi}{dt^2}R \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dot{\omega}R \quad \Rightarrow$$

$$\dot{\omega} = \frac{\alpha}{R} \quad (3)$$

Οπότε η (2) λόγω της (3) δίνει:

$$T = \frac{MR}{2}\frac{\alpha}{R} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{M}{2}\alpha \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (1) παίρνουμε:

$$mg - \frac{M}{2}\alpha = m\alpha \quad \Rightarrow \quad \left(m + \frac{M}{2}\right)\alpha = mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}}$$

$$= 1,3\text{m/sec}^2$$

Και η (3) δίνει: $\boxed{\dot{\omega} = \frac{mg}{\left(m + \frac{M}{2}\right)R}} = 32,5\text{rad/sec}^2$

ενώ η (4) δίνει: $\boxed{T = \frac{Mmg}{2m + M}} = 1,3\text{Nt} \quad (5)$

Η κατακόρυφη δύναμη F που συγκρατεί τον κύλινδρό θα υπολογιστεί από τη συνθήκη μεταφορικής ισορροπίας της τροχαλίας. Δηλαδή για την τροχαλία ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F - Mg - T = 0 \quad \Rightarrow$$

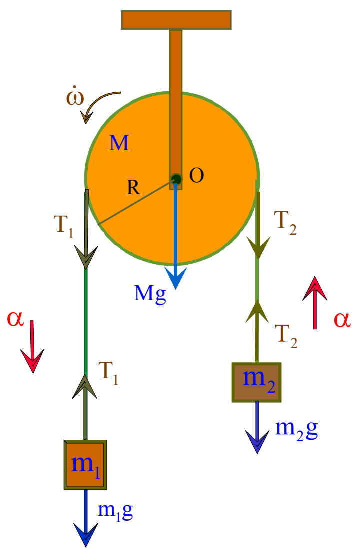
$$F = Mg + T \overset{(5)}{=} Mg + \frac{Mmg}{2m+M} = Mg\left(1 + \frac{m}{2m+M}\right) = Mg\frac{2m+M+m}{2m+M} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{F = \frac{Mg(3m+M)}{2m+M}} = 21,3Nt$$

<u>Άσκηση 7η</u>

Ένας τροχός ακτίνας $R = 0,4m$ και μάζας $M = 6kgr$ μπορεί να περιφέρεται χωρίς τριβές γύρω από έναν οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ένα ελαφρύ μη εκτακτό νήμα είναι περασμένο γύρω από τον τροχό και στα άκρα του είναι αναρτημένα δυο σώματα μάζας $m_1 = 4kgr$ και $m_2 = 3kgr$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία. Αρχικά το σύστημα είναι ακίνητο. Υπολογίστε την ολική κινητική ενέργεια του συστήματος μετά από $5sec$. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς άξονα κάθετο στην επιφάνεια του που περνά από το κέντρο του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

<u>Λύση:</u>



Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι τα βάρη m_1g, m_2g, Mg και οι τάσεις των νημάτων T_1 και T_2.

- Για την μεταφορική κίνηση της m_1 ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = m_1\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad m_1g - T_1 = m_1\alpha \quad (1)$$

- Για την μεταφορική κίνηση της m_2 ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = m_2\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad T_2 - m_2g = m_2\alpha \quad (2)$$

- Για την περιστροφική κίνηση του τροχού ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_o = I_o\vec{\dot{\omega}} \quad \Rightarrow \quad T_1R - T_2R = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} \quad \Rightarrow$$

$$T_1 - T_2 = \frac{MR}{2}\dot{\omega} \quad (3)$$

Επειδή όταν ο τροχός περιστραφεί κατά γωνία ϕ το νήμα μετατοπίζεται κατά $s=\phi R$, δηλαδή η m_1 κατεβαίνει κατά s και η m_2 ανεβαίνει κατά το ίδιο διάστημα s ισχύει:

$$s=\phi R \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d^2\phi}{dt^2}R \quad\Rightarrow\quad \alpha=\dot{\omega}R \quad\Rightarrow\quad \dot{\omega}=\frac{\alpha}{R} \quad (4)$$

Οπότε η (3) λόγω της (4) δίνει:

$$T_1-T_2=\frac{M}{2}\alpha \quad (5)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει:

$$m_1g-T_1+T_2-m_2g=(m_1+m_2)\alpha \quad\Rightarrow$$
$$T_1-T_2=(m_1-m_2)g-(m_1+m_2)\alpha \quad (6)$$

Επομένως εξισώνοντας τις (5) και (6) προκύπτει:

$$\frac{M}{2}\alpha=(m_1-m_2)g-(m_1+m_2)\alpha \quad\Rightarrow\quad \left(m_1+m_2+\frac{M}{2}\right)\alpha=(m_1-m_2)g \quad\Rightarrow$$

$$\alpha=\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+\frac{M}{2}}=\frac{(4-3)\cdot 10}{4+3+\frac{6}{2}}=\frac{10}{10} \quad\Rightarrow\quad \alpha=1m/sec^2$$

Μετά από χρόνο $t=5sec$ η ταχύτητα των σωμάτων είναι $\upsilon=\alpha t=5m/sec$ ενώ η γωνιακή ταχύτητα του τροχού είναι $\omega=\frac{\upsilon}{R}=\frac{5}{0,4}$ $\Rightarrow$ $\omega=12,5rad/sec$.

Άρα η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος μετά από $5sec$ είναι:

$$K=\frac{1}{2}m_1\upsilon^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon^2+\frac{1}{2}I_o\omega^2=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5^2+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 0,4^2\cdot 12,5^2=$$

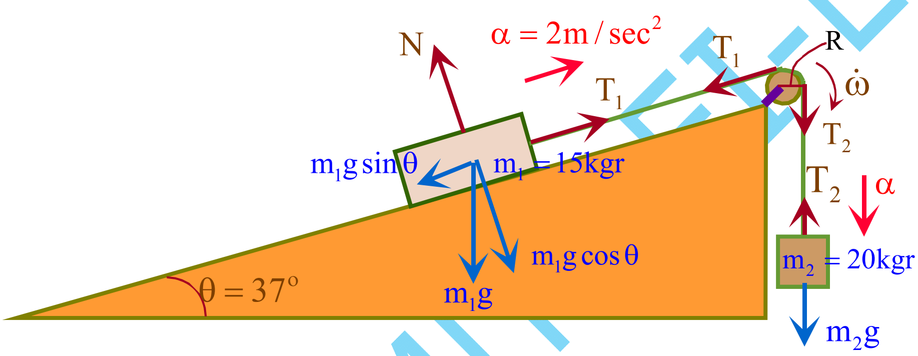
$$=50+37,5+37,5 \quad\Rightarrow\quad \boxed{K=125Joule}$$

Άσκηση 8η

Δυο σώματα συνδέονται με νήμα αμελητέας μάζας που περνά από μια τροχαλία ακτίνας $0,25\text{m}$ και ροπή αδράνειας I. Το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο κινείται προς τα πάνω χωρίς τριβές και με σταθερή επιτάχυνση $2\text{m}/\sec^2$. (βλ. σχήμα).

α. Προσδιορίστε τις τάσεις T_1 και T_2 στα δυο τμήματα του νήματος.

β. Βρείτε τη ροπή αδρανείας I της τροχαλίας.



Λύση:

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα φαίνονται στο σχήμα. Ο 2ος νόμος του Newton για το σώμα m_1 δίνει:

$$\Sigma\vec{F}_x = m_1\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad T_1 - m_1 g\sin\theta = m_1\alpha \quad \Rightarrow$$

$$T_1 = m_1 g\sin\theta + m_1\alpha = 15\cdot 10\cdot \sin 37^o + 15\cdot 2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{T_1 = 120\text{Nt}}$$

Ενώ ο 2ος νόμος του Newton για το σώμα m_2 δίνει:

$$\Sigma\vec{F}_y = m_2\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad m_2 g - T_2 = m_2\alpha \quad \Rightarrow$$

$$T_2 = m_2 g - m_2\alpha = m_2(g-\alpha) = 20\cdot(10-2) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{T_2 = 160\text{Nt}}$$

β. Η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας είναι:

$$\dot{\omega} = \frac{\alpha}{R} = \frac{2}{0,25} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = 8\text{rad}/\sec^2$$

Η τροχαλία περιστρέφεται λόγω της ροπής των δυνάμεων T_1 και T_2 κι' επομένως ο θεμελιώδης νόμος της περιστροφικής κίνησης δίνει:

$$\Sigma\vec{\tau} = I\vec{\dot{\omega}} \quad \Rightarrow \quad T_2 R - T_1 R = I\dot{\omega} \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{(T_2 - T_1)R}{\dot{\omega}} = \frac{(160-120)\cdot 0,25}{8} = \frac{10}{8} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{I = 1,25 kgr \cdot m^2}$$

Άσκηση 9η

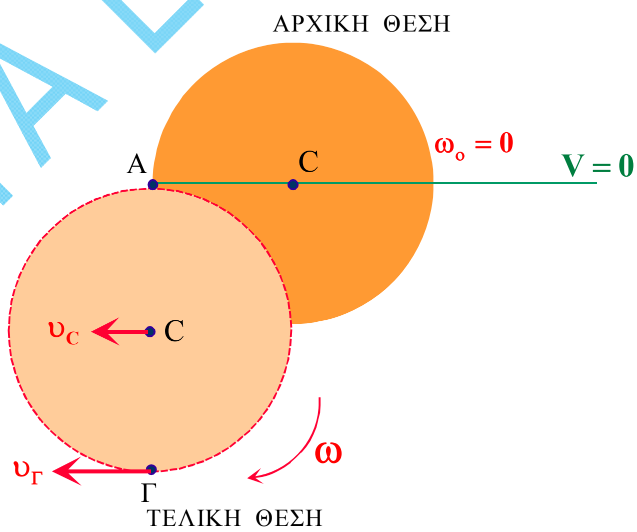
Ένας ομογενής συμπαγής δίσκος ακτίνας R και μάζας m μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα και χωρίς τριβές γύρω από ένα σταθερό σημείο Α της περιφέρειας του, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο δίσκος αφήνεται να κινηθεί χωρίς αρχική ταχύτητα υπό την επίδραση του βάρους του, από τη θέση που δείχνει ο γραμμοσκιασμένος κύκλος του σχήματος. Να βρείτε:

α. Την ταχύτητα του κέντρου μάζας του.

β. Την ταχύτητα του κατώτερου σημείου της περιφέρειας του, όταν ο δίσκος βρεθεί στη θέση που δείχνει ο διακεκομμένος κύκλος του σχήματος.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του συμπαγή δίσκου ως προς άξονα κάθετο στην επιφάνεια του που περνά από το κέντρο του είναι $I_C = \frac{1}{2}mR^2$.

Λύση:



Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης και θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο προκύπτει:

Α.Δ.Ε.: $$K_{αρχ.} + V_{αρχ.} = K_{τελ.} + V_{τελ.} \quad \Rightarrow$$

$$0+0=\frac{1}{2}I_A\omega^2-mgR \quad \Rightarrow \quad mgR=\frac{1}{2}I_A\omega^2 \quad (1)$$

Αλλά από το θεώρημα Steiner είναι:

$$I_A=I_C+mR^2=\frac{1}{2}mR^2+mR^2 \quad \Rightarrow \quad I_A=\frac{3}{2}mR^2 \quad (2)$$

Οπότε η (1) λόγω της (2) δίνει:

$$\cancel{m}g\cancel{R}=\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cancel{m}R^{\cancel{2}}\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2=\frac{4g}{3R} \quad \Rightarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{4g}{3R}} \quad (3)$$

α. Άρα η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:

$$\upsilon_C=\omega R\overset{(3)}{=}\sqrt{\frac{4g}{3R}}\cdot R \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_C=2\sqrt{\frac{gR}{3}}}$$

β. Ενώ η ταχύτητα του κατώτερου σημείου Γ είναι:

$$\upsilon_\Gamma=\omega 2R=2\omega R\overset{(3)}{=}2\sqrt{\frac{4g}{3R}}\cdot R \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon_\Gamma=4\sqrt{\frac{gR}{3}}}$$

<u>Άσκηση 10η</u>

Μια ευθύγραμμη μεταλλική ράβδος μήκους 3ℓ λυγίζεται ώστε να σχηματίζει ορθή γωνία και τοποθετείται πάνω σε ένα τραπέζι, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το μήκος του ενός τμήματος είναι διπλάσιο του μήκους του άλλου, ενώ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ ράβδου και τραπεζιού είναι μ. Ένα ελαφρύ νήμα συνδέεται με την κορυφή της γωνίας και στη συνέχεια τραβάμε με το νήμα τη λυγισμένη ράβδο ώστε αυτή να κινείται με σταθερή ταχύτητα. Βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει το μεγαλύτερο τμήμα της ράβδου με το νήμα.

<u>Λύση:</u> Αφού το μήκος του μεγαλύτερου κομματιού της ράβδου είναι διπλάσιο από το μήκος του άλλου, η μάζα του και επομένως το βάρος του είναι διπλάσιο. Συνεπώς και η δύναμη τριβής είναι διπλάσια, οπότε αν Τ είναι η τριβή που ασκείται στο μικρότερο τμήμα θα είναι 2Τ η τριβή που ασκείται στο μεγαλύτερο.

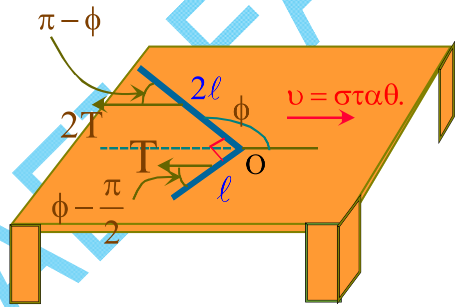
Θεωρώντας ότι η δύναμη της τριβής ασκείται στο κέντρο μάζας κάθε τμήματος, τότε η ροπή της τριβής ως προς το σημείο Ο του μεγάλου τμήματος είναι:

$$\vec{\tau}_1 = 2T\ell\sin(\pi-\phi)\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_1 = 2T\ell\sin\phi\hat{z} \quad (1)$$

Ενώ για το μικρό τμήμα είναι:

$$\vec{\tau}_2 = T\frac{\ell}{2}\sin\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)(-\hat{z}) = -T\frac{\ell}{2}\cos\phi(-\hat{z}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_2 = T\frac{\ell}{2}\cos\phi\hat{z} \quad (2)$$

όπου λόγω παραπληρωματικότητας $\sin(\pi-\phi)=\sin\phi$ και λόγω συμπληρωματικότητας $\sin\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\phi$.



Άρα αφού η ράβδος δεν περιστρέφεται, η συνθήκη περιστροφής ισορροπίας δίνει:

$$\Sigma\vec{\tau}=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_1+\vec{\tau}_2=0 \quad \overset{(1),(2)}{\Rightarrow}$$

$$2T\ell\sin\phi\cdot\hat{z}+T\frac{\ell}{2}\cos\phi\cdot\hat{z}=0 \quad \Rightarrow$$

$$2T\ell\sin\phi=-T\frac{\ell}{2}\cos\phi \quad \Rightarrow \quad \tan\phi=-\frac{1}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\phi=\tan^{-1}(-0,25) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi=166^{o}}$$

Άσκηση 11η

Αβαρές νήμα σταθερού μήκους τυλίγεται αρκετές φορές γύρω από ένα συμπαγή, ομογενή κύλινδρο μάζας $M=5kgr$ και διαμέτρου $2R=0,1m$, ο οποίος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από έναν ακλόνητο άξονα. Το ελεύθερο άκρο του νήματος έλκεται με σταθερή δύναμη μέτρου $F=10Nt$ για μια απόσταση $d=2m$. Αν ο κύλινδρος αρχικά ήταν ακίνητος να υπολογιστούν:

α. Η τελική γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου.
β. Η τελική ταχύτητα του νήματος.

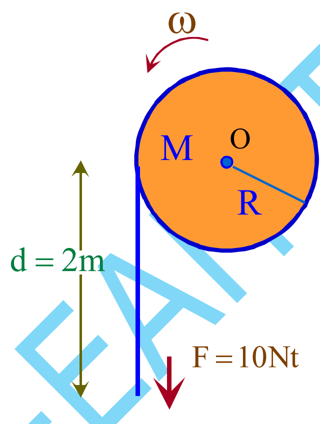
Λύση:

α. Σύμφωνα με το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας η μεταβολή της περιστροφικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου ισούται με το έργο της δύναμης F. Δηλαδή:

$$W_F = \Delta K = K_{τελ.} - K_{αρχ.} \quad (1)$$

όπου $K_{τελ.} = \frac{1}{2} I_o \omega^2$, $K_{αρχ.} = 0$ και

$$W_F = \int_0^d \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^d F\cos 0 dx = F\int_0^d dx \Rightarrow \quad W_F = Fd$$



Οπότε η (1) δίνει:

$$Fd = \frac{1}{2} I_o \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2Fd}{I_o}}$$

με $I_o = \frac{1}{2} MR^2$ οπότε:

$$\omega = \sqrt{\frac{4Fd}{MR^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot 2}{5 \cdot (0,05)^2}} = \sqrt{\frac{80}{0,0125}} = \sqrt{6400} \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = 80 rad / sec}$$

β. Η τελική γραμμική ταχύτητα του νήματος συνδέεται με τη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου με τη σχέση:

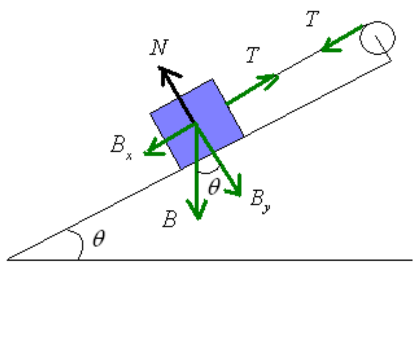
$$\upsilon = \omega R = 80 \frac{rad}{sec} \cdot 0,05 m \quad \Rightarrow \quad \boxed{\upsilon = 4 m / sec}$$

Άσκηση 12η

Σώμα μάζας $m = 15kg$ είναι δεμένο με νήμα που είναι τυλιγμένο γύρω από τροχό ακτίνας $r = 10cm$. Η επιτάχυνση του σώματος προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου είναι σταθερή και ίση με $a = 2,5 m/s^2$. Αν θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν τριβές να υπολογιστούν: α) η τάση του νήματος, β) η ροπή αδρανείας του τροχού και γ) η γωνιακή του ταχύτητα μετά από 2sec, αν αρχικά είναι ακίνητος.

Λύση

α) Ο 2ος Νόμος του Newton δίνει στην διεύθυνση κίνησης (x):



$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow B_x - T = ma \Rightarrow$$

$$mg\sin\theta - T = ma \Rightarrow$$

$$T = m(g\sin\theta - a) \Rightarrow T = 52,5N$$

β) Η ροπή που παράγει η τάση του νήματος ως προς τον άξονα συμμετρίας του τροχού είναι:

$$\tau = Tr = 5,25 N \cdot m$$

Έχουμε: $u = \omega r \Rightarrow a = \dot{\omega} r \Rightarrow \dot{\omega} = \dfrac{a}{r} \Rightarrow \dot{\omega} = 25 rad/s$

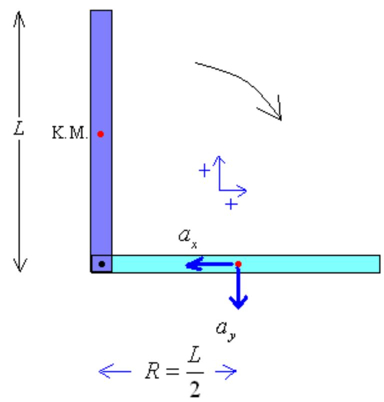
κι έτσι: $\tau = I\dot{\omega} \Rightarrow I = \dfrac{\tau}{\dot{\omega}} \Rightarrow I = 0,21 kg \cdot m^2$

γ) Είναι: $\dot{\omega} = \dfrac{d\omega}{dt} \Rightarrow \int_0^{\omega} d\omega = \dot{\omega}\int_0^t dt \Rightarrow \omega = \dot{\omega} t \overset{t=2s}{\Rightarrow} \omega = 50 rad/s$

Άσκηση 13η

Μια ομογενής ράβδος μάζας M και μήκους L είναι στερεωμένη και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το ένα άκρο της. Αν αρχικά βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση και αφεθεί ελεύθερη, να βρείτε τη στιγμή που περνά από την οριζόντια θέση: α) την γωνιακή της ταχύτητα, β) την γωνιακή επιτάχυνση γ) την επιτάχυνση του Κ.Μ. και δ) την αντίδραση του άξονα στήριξης.

Λύση



α) Η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας δίνει:

$$E_{καθ} = E_{ορ} \Rightarrow Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} \quad (1)$$

β) Στην οριζόντια θέση το βάρος της ράβδου παράγει ροπή:

$$\tau = Mg\frac{L}{2} \Rightarrow I\dot{\omega} = Mg\frac{L}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}ML^2\dot{\omega} = Mg\frac{L}{2} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{3g}{2L} \quad (2)$$

γ) Η x-επιτάχυνση είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση:

$$a_x = -\frac{u^2}{R} = -\omega^2 R = -\omega^2\frac{L}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} a_x = -\frac{3}{2}g \quad (3)$$

Η y-ταχύτητα του Κ.Μ. στην οριζόντια θέση είναι: $u_y = -\omega R = -\omega \frac{L}{2}$

όπου το πρόσημο «-» το λάβαμε για να δείξουμε ότι η φορά της είναι προς τα κάτω.

Παραγωγίζοντας παίρνουμε την y-επιτάχυνση: $a_y = -\dot{\omega}\frac{L}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} a_y = -\frac{3}{4}g$

(4)

Άρα, η επιτάχυνση του Κ.Μ. είναι: $\vec{a}_{KM} = -\frac{3}{2}g\hat{i} - \frac{3}{4}g\hat{j} = -\frac{3}{4}g\left(2\hat{i} + \hat{j}\right)$

δ) Ο 2ος Νόμος του Newton δίνει σε κάθε άξονα:

$$\Sigma F_x = Ma_x \Rightarrow N_x = Ma_x \overset{(3)}{\Rightarrow} N_x = -\frac{3}{2}Mg$$

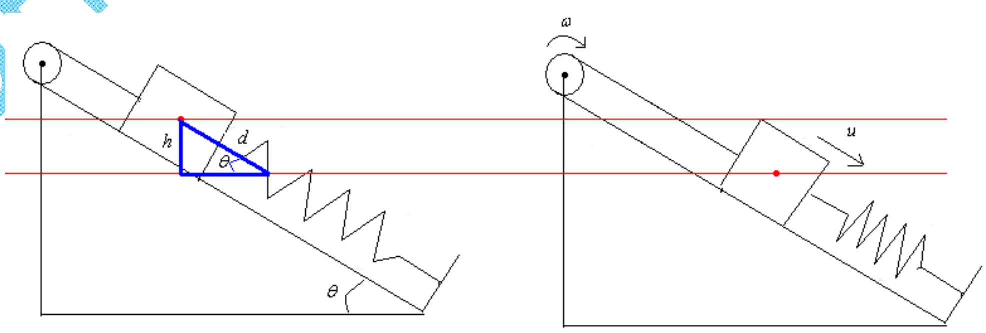
$$\Sigma F_y = Ma_y \Rightarrow N_y - Mg = Ma_y \Rightarrow N_y = M\left(a_y + g\right) \overset{(4)}{\Rightarrow} N_y = \frac{1}{4}Mg$$

οπότε η αντίδραση του άξονα στήριξης είναι: $\vec{N} = -\frac{3}{2}Mg\hat{i} + \frac{1}{4}Mg\hat{j} = \frac{Mg}{4}\left(\hat{j} - 6\hat{i}\right)$

<u>Άσκηση 14η</u>

Δίνεται η διάταξη του σχήματος που περιλαμβάνει σώμα μάζας m που βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ. Το σώμα είναι δεμένο από το ένα άκρο με νήμα που είναι τυλιγμένο γύρω από τροχαλία ροπής αδρανείας I και ακτίνας R, ενώ συνδέεται από το άλλο άκρο με ελατήριο σταθεράς k. Τυλίγουμε το νήμα ώστε το ελατήριο να επιμηκυνθεί κατά d από το φυσικό του μήκος και στη συνέχεια το αφήνουμε ελεύθερο. Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της τροχαλίας τη στιγμή που το ελατήριο επανέρχεται στο φυσικό του μήκος.

<u>Λύση</u>



Η Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας δίνει:

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow E_{\delta,\mathrm{B}} + E_{\delta,\varepsilon\lambda} = E_{\kappa,\pi\varepsilon\rho} + E_{\kappa,m} \Rightarrow mgh + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mu^2 \overset{u=\omega R}{\Rightarrow}$$

$$mgd\sin\theta + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2 \Rightarrow 2mgd\sin\theta + kd^2 = \left(I + mR^2\right)\omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{2mgd\sin\theta + kd^2}{I + mR^2} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2mgd\sin\theta + kd^2}{I + mR^2}}}$$

12. ΣΥΝΘΕΤΗ ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Σύνθετη Κίνηση Στερεού Σώματος = Μεταφορά + Περιστροφή

Η κίνηση ενός στερεού σώματος μάζας Μ είναι εν γένει συνδυασμός δυο κινήσεων:

1) της μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας του για την οποία ισχύει:

$\Sigma\vec{F} = M\dfrac{d\vec{\upsilon}_{cm}}{dt}$, όπου $\Sigma\vec{F}$ η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων

2) της περιστροφικής κίνησης του στερεού γύρω από το κέντρο μάζας του για την οποία ισχύει:

$\Sigma\vec{\tau} = I\dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$, όπου $\Sigma\vec{\tau}$ είναι η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών.

Έτσι, η ολική κινητική ενέργεια του στερεού γράφεται ως άθροισμα της κινητικής ενέργειας του Κ.Μ. λόγω μεταφοράς και της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής:

$$E_{K,o\lambda} = E_{K,\mu\varepsilon\tau} + E_{K,\pi\varepsilon\rho} = \frac{1}{2}\left(M\upsilon_{cm}^2 + I_{cm}\omega^2\right)$$

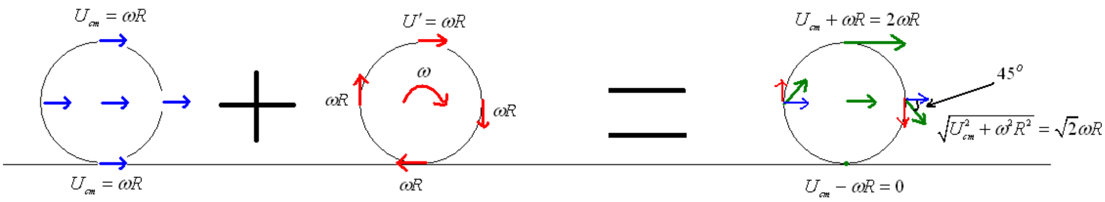
Κύλιση τροχού

Η ταχύτητα ενός σημείου της περιφέρειας ενός κυλιόμενου τροχού είναι το διανυσματικό άθροισμα της ταχύτητας $\vec{U}_{cm}$ του Κ.Μ. και της ταχύτητας $\vec{U}'$ του σημείου ως προς το Κ.Μ. λόγω της περιστροφής του τροχού:

$\vec{U} = \vec{U}_{cm} + \vec{U}'$ (1), όπου $U' = \omega R$

Για να κυλίεται ο τροχός χωρίς να ολισθαίνει θα πρέπει το σημείο επαφής του με το δάπεδο να έχει μηδενική στιγμιαία ταχύτητα, δηλαδή θα πρέπει η ταχύτητα λόγω περιστροφής να εξουδετερώνει τη μεταφορική κίνηση του Κ.Μ. Αυτό συμβαίνει εφόσον:

$\vec{U} = \vec{0} \Rightarrow \vec{U}_{cm} = -\vec{U}' \Rightarrow U_{cm} = U' \Rightarrow U_{cm} = \omega R$ **(συνθήκη κύλισης)**



Παρατηρείστε ότι ενώ το κάτω σημείο επαφής έχει μηδενική ταχύτητα, το πάνω σημείο (αντιδιαμετρικό του) έχει ταχύτητα: $U_{cm}+U'=2\omega R$ διπλάσια του Κ.Μ.

12.1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1η

Γύρω από τον τροχό του σχήματος μάζας $m = 4kgr$ και ακτίνας $R = 0,2m$ είναι τυλιγμένο αβαρές σχοινί, στο ελεύθερο άκρο του οποίου ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 12Nt$. Αν ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει να υπολογιστούν:

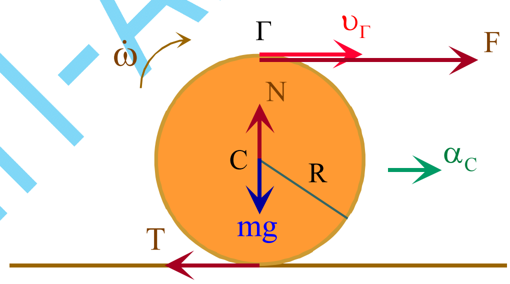
α. Η επιτάχυνση του κέντρου C του τροχού, η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού και η επιτάχυνση του σημείου εφαρμογής της δύναμης F.

β. Οι τιμές του συντελεστή στατικής τριβής για τις οποίες ο τροχός θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο του είναι $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Λύση:

α. Για τη μεταφορική κίνηση του τροχού ισχύει η σχέση:



$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_C \quad \Rightarrow$$

$$F - T = m\alpha_C \quad (1)$$

Ενώ για την περιστροφική του κίνηση ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_C = I_C\vec{\dot{\omega}} \quad \Rightarrow$$

$$FR + TR = \frac{1}{2}mR^2\dot{\omega} \quad \Rightarrow$$

$$F + T = \frac{mR}{2}\dot{\omega} \quad (2)$$

Επειδή ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει η σχέση:

$$\upsilon_C = \omega R \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon_C}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R \quad \Rightarrow \quad \alpha_C = \dot{\omega}R \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{\alpha_C}{R} \quad (3)$$

Οπότε η (2) λόγω της (3) γίνεται:

$$F + T = \frac{m}{2}\alpha_C \quad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (4) προκύπτει:

$$2F = \frac{3}{2}m\alpha_C \quad \Rightarrow \quad \alpha_C = \frac{4F}{3m} = \frac{4\cdot 12}{3\cdot 4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_C = 4m/sec^2}$$

Ενώ η (3) τώρα δίνει:

$$\dot{\omega} = \frac{\alpha_C}{R} = \frac{4}{0,2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\omega} = 20rad/sec^2}$$

Η ταχύτητα του σημείου Γ εφαρμογής της δύναμης F λόγω της μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης του τροχού θα είναι:

$\upsilon_\Gamma = \upsilon_C + \omega R$ και επειδή $\upsilon_C = \omega R$ λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση τελικά είναι:

$$\upsilon_\Gamma = \upsilon_C + \upsilon_C \quad \Rightarrow \quad \upsilon_\Gamma = 2\upsilon_C \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon_\Gamma}{dt} = 2\frac{d\upsilon_C}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_\Gamma = 2\alpha_C = 2\cdot 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_\Gamma = 8m/sec^2}$$

β. Η δύναμη της τριβής σύμφωνα με τη σχέση (1) είναι:

$$T = F - m\alpha_C = 12 - 4\cdot 4 = 12 - 16 \quad \Rightarrow \quad T = -4Nt$$

Το αρνητικό πρόσημο της τριβής υποδηλώνει ότι η στατική τριβή θα έχει φορά προς τα δεξιά και όχι προς τα αριστερά, όπως τη θεωρήσαμε αρχικά. Δηλαδή το μέτρο της στατικής τριβής είναι $T = 4Nt$.

Συνεπώς να κυλίεται ο τροχός χωρίς να ολισθαίνει θα πρέπει να ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} T < \mu N \\ \text{Αλλά:} \quad \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg \end{array}\right\} \Rightarrow \quad T < \mu mg \quad \Rightarrow \quad \mu > \frac{T}{mg} \quad \Rightarrow$$

$$\mu > \frac{4}{4\cdot 10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu > 0{,}1}$$

<u>Άσκηση 2η</u>

Γύρω από έναν κύλινδρο μάζας M και ακτίνας R είναι τυλιγμένο ένα νήμα. Κρατώντας το ελεύθερο άκρο του νήματος αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει. Να υπολογιστούν:

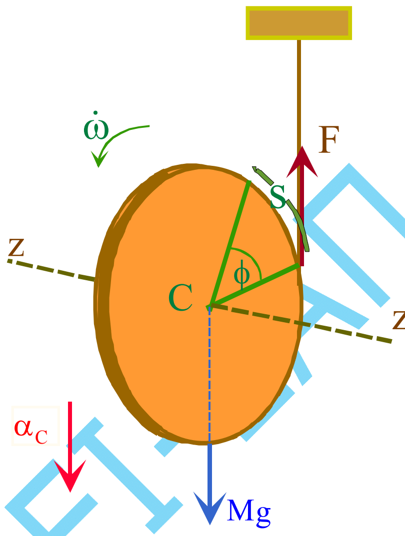
α. Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας και η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.

β. Η δύναμη F που ασκείται στο νήμα.

γ. Ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνει η στροφορμή του κυλίνδρου ως προς τον άξονα zz'.

δ. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου όταν ο κύλινδρος έχει κατέβει κατά h. Δίνεται: $I_{\underset{zz'}{\text{κυλ.}}} = \frac{1}{2}MR^2$

Λύση:



α. Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση, οπότε για τη μεταφορική του κίνηση ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = M\vec{\alpha}_C \quad \Rightarrow \quad Mg - F = M\alpha_C \quad (1)$$

Ενώ για την περιστροφική του κίνηση ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_C = I_C\dot{\vec{\omega}} \quad \Rightarrow \quad FR = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} \quad \Rightarrow$$

$$F = \frac{MR}{2}\dot{\omega} \quad (2)$$

Επειδή όταν ο τροχός περιστρέφεται κατά γωνία ϕ το νήμα ξετυλίγεται κατά $s = \phi R$ και κατά το ίδιο διάστημα κατεβαίνει προς τα κάτω το κέντρο μάζας του κυλίνδρου ισχύει:

$$s = \phi R \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2\phi}{dt^2}R \quad \Rightarrow \quad \alpha_C = \dot{\omega}R \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{\alpha_C}{R} \quad (3)$$

Έτσι η (2) λόγω της (3) δίνει:

$$F = \frac{M}{2}\alpha_C \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (1) προκύπτει:

$$Mg - \frac{M}{2}\alpha_C = M\alpha_C \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}M\alpha_C = Mg \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_C = \frac{2}{3}g} \quad (5)$$

Και η (3) δίνει:

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{2g}{3R}} \quad (6)$$

β. Η δύναμη F που ασκείται στο νήμα (δηλαδή η τάση του νήματος) σύμφωνα με τις (4), (5) είναι:

$$F = \frac{M}{2}\frac{2}{3}g \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{Mg}{3}} \quad (7)$$

γ. Ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνει η στροφορμή του κυλίνδρου είναι:

$$\frac{dL_C}{dt} = \Sigma\tau_C = FR \overset{(7)}{\Rightarrow} \boxed{\frac{dL_C}{dt} = \frac{MgR}{3}}$$

δ. Από τον ορισμό της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας προκύπτει:

$$\alpha_C = \frac{d\upsilon_C}{dt} \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{2}{3}g = \frac{d\upsilon_C}{dt} = \frac{d\upsilon_C}{dy}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{2}{3}g = \frac{d\upsilon_C}{dy}\upsilon_C \Rightarrow$$

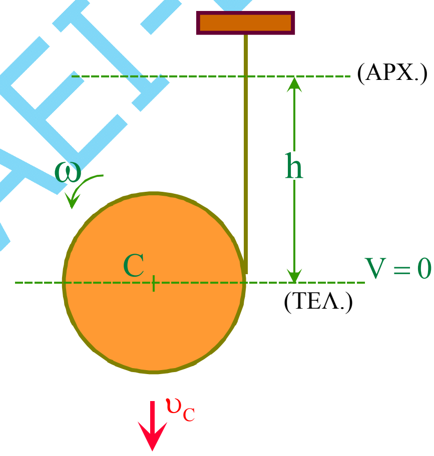
$$\int_0^{\upsilon_C} \upsilon_C d\upsilon_C = \frac{2}{3}g\int_0^h dy \Rightarrow \frac{\upsilon_C{}^2}{2} = \frac{2}{3}gh \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_C = \sqrt{\frac{4}{3}gh}}$$

<u>2ος τρόπος:</u>

Με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας:

Α.Δ.Ε.:



$$K_{αρχ.} + V_{αρχ.} = K_{τελ.} + V_{τελ} \Rightarrow$$

$$0 + Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_C{}^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 + 0 \overset{(\upsilon_C=\omega R)}{\Rightarrow}$$

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon_C{}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}M\cancel{R^2}\frac{\upsilon_C{}^2}{\cancel{R^2}} \Rightarrow$$

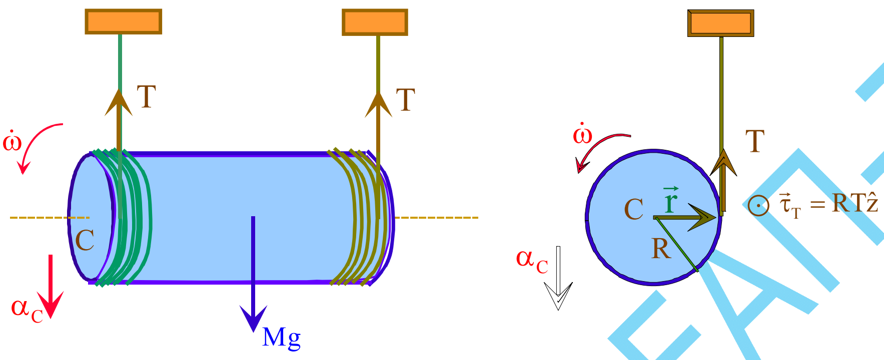
$$\cancel{M}gh = \frac{3}{4}\cancel{M}\upsilon_C{}^2 \Rightarrow \boxed{\upsilon_C = \sqrt{\frac{4}{3}gh}}$$

<u>Άσκηση 3η</u>

Ένας κύλινδρος μήκους ℓ και ακτίνας R έχει μάζα M. Γύρω από τον κύλινδρο τυλίγονται δυο νήματα, ένα σε κάθε άκρη και τα άκρα των νημάτων στερεώνονται στην οροφή. Ο κύλινδρος οριζοντιώνεται, με τα δυο νήματα ακριβώς κατακόρυφα, όπως δείχνει το σχήμα και αφήνεται ελεύθερος. Βρείτε την τάση των νημάτων καθώς ξετυλίγονται και προσδιορίστε τη γραμμική επιτάχυνση του κυλίνδρου κατά την πτώση του.

Δίνεται ότι η ροπή αδρανείας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

<u>Λύση:</u>



Για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = M\vec{\alpha}_C \quad \Rightarrow \quad Mg - T - T = M\alpha_C \quad \Rightarrow \quad Mg - 2T = M\alpha_C \quad (1)$$

Για την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_C = I_C\vec{\dot{\omega}} \quad \Rightarrow \quad TR + TR = \frac{1}{2}MR^2\dot{\omega} \quad \Rightarrow \quad 2T = \frac{MR}{2}\dot{\omega} \quad (2)$$

Επειδή όταν ο κύλινδρος περιστραφεί κατά γωνία ϕ τα νήματα ξετυλίγονται κατά $s = \phi R$ και κατά το ίδιο διάστημα κατεβαίνει προς τα κάτω το κέντρο μάζας ισχύει:

$$s = \phi R \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2\phi}{dt^2}R \quad \Rightarrow \quad \alpha_C = \dot{\omega}R \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{\alpha_C}{R} \quad (3)$$

Έτσι η (2) λόγω της (3) γίνεται:

$$2T = \frac{M}{2}\alpha_C \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (1) προκύπτει:

$$Mg - \frac{M}{2}\alpha_C = M\alpha_C \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}M\alpha_C = Mg \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_C = \frac{2}{3}g} \quad (5)$$

Τέλος η (4) λόγω της (5) δίνει:

$$2T = \frac{M}{2}\frac{2}{3}g \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{Mg}{6}}$$

Άσκηση 4η

Συμπαγής και ομογενής σφαίρα μάζας $m = 10kgr$ και ακτίνας $R = 0,1m$ κυλίεται ευθύγραμμα χωρίς ολίσθηση ανερχόμενη κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας ϕ με $\sin\phi = 0,56$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κέντρο μάζας της σφαίρας έχει ταχύτητα με μέτρο $\upsilon_o = 8m/sec$. Να υπολογίσετε για τη σφαίρα:

α. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής της τη χρονική στιγμή $t = 0$.

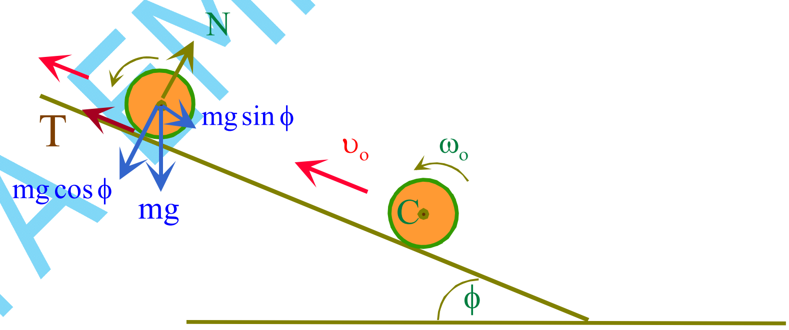
β. Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της.

γ. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της, κατά τη διάρκεια της κίνησης της.

δ. Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της καθώς ανεβαίνει, τη στιγμή που έχει διαγράψει $30/\pi$ περιστροφές.

Δίνοντας η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της $I = \frac{2}{5}mR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/sec^2$.

Λύση:



α. Επειδή η σφαίρα κυλίεται χωρίς ολίσθηση σε κάθε χρονική στιγμή ισχύει ότι $\upsilon_C = \omega R$. Οπότε τη χρονική στιγμή $t = 0$ θα είναι:

$$\upsilon_o = \omega_o R \quad \Rightarrow \quad \omega_o = \frac{\upsilon_o}{R} = \frac{8m/sec}{0,1m} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega_o = 80rad/sec}$$

β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι το βάρος της mg, που αναλύεται στις συνιστώσες $mg\sin\phi$ και $mg\cos\phi$, η κάθετη αντίδραση N και η τριβή T, η οποία έχει κατεύθυνση προς τα πάνω έτσι ώστε να δίνει αρνητική ροπή και να επιβραδύνει περιστροφικά τη σφαίρα. Για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας ισχύει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_C \quad \Rightarrow \quad T - mg\sin\phi = m\alpha_C \quad (1)$$

Για την περιστροφική κίνηση της σφαίρας ισχύει:

$$\Sigma\vec{\tau}_C = I_C\dot{\vec{\omega}} \quad \Rightarrow \quad -TR = \frac{2}{5}mR^2\dot{\omega} \quad \Rightarrow \quad -T = \frac{2mR}{5}\dot{\omega} \quad (2)$$

Λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση ισχύει:

$$\upsilon_C = \omega R \quad \Rightarrow \quad \frac{d\upsilon_C}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R \quad \Rightarrow \quad \alpha_C = \dot{\omega}R \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{\alpha_C}{R}$$

(3)

Η (2) λόγω της (3) δίνει:

$$-T = \frac{2mR}{5}\frac{\alpha_C}{R} \quad \Rightarrow \quad T = -\frac{2}{5}m\alpha_C \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (1) προκύπτει:

$$-\frac{2}{5}m\alpha_C - mg\sin\theta = m\alpha_C \quad \Rightarrow \quad -\frac{7}{5}m\alpha_C = mg\sin\theta \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_C = -\frac{5}{7}g\sin\theta} \quad \Rightarrow \quad \alpha_C = -\frac{5}{7}\cdot 10\cdot 0,56 = -\frac{28}{7} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_C = -4\,m/\sec^2}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την επιβραδυνόμενη κίνηση της σφαίρας.

γ. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής της σφαίρας είναι:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = TR \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{dL}{dt} = \frac{2}{5}mR^2\dot{\omega} \overset{(3)}{=} \frac{2}{5}mR^{\cancel{2}}\frac{\alpha_C}{\cancel{R}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2}{5}mR\alpha_C = \frac{2}{5}\cdot 10\cdot 0,1\cdot 4 = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = 1,6\,Nt\cdot m}$$

δ. Από τον ορισμό της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας είναι:

$$\alpha_C = \frac{d\upsilon_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad -4 = \frac{d\upsilon_C}{dt} = \frac{d\upsilon_C}{dx}\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad -4 = \frac{d\upsilon_C}{dx}\upsilon_C \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_o}^{\upsilon_C} \upsilon_C d\upsilon_C = -4\int_0^{\ell} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon_C^{\ 2}}{2} - \frac{\upsilon_o^{\ 2}}{2} = -4\ell \quad \Rightarrow \quad \upsilon_C^{\ 2} = \upsilon_o^{\ 2} - 8\ell \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_C = \sqrt{\upsilon_o^{\ 2} - 8\ell} \qquad (5)$$

Αλλά όταν η σφαίρα θα έχει διαγράψει $30/\pi$ περιστροφές, δηλαδή θα έχει περιστραφεί κατά γωνία $\phi = 2\cancel{\pi}\frac{30}{\cancel{\pi}}\text{rad} = 60\text{rad}$, το κέντρο μάζας θα έχει μετατοπιστεί κατά απόσταση $\ell = \phi R = 60 \cdot 0{,}1\text{m} \Rightarrow \ell = 6\text{m}$.

Άρα η (5) δίνει:

$$\upsilon_C = \sqrt{8^2 - 8\cdot 6} = \sqrt{64-48} = \sqrt{16} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_C = 4\text{m}/\text{sec}}$$

δηλαδή μετά από $30/\pi$ περιστροφές έχει μειωθεί στο μισό σε σχέση με την αρχική της τιμή.

Άσκηση 5η

Μικρός κοίλος κύλινδρος ακτίνας $r = h/5$ και μάζας m αφήνεται να κυλήσει χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου από ύψος h, όπως στο σχήμα και στη συνέχεια εισέρχεται σε τεταρτοκύκλιο ακτίνας $R = h/3$. Στο σημείο Δ εγκαταλείπει το τεταρτοκύκλιο και ανυψώνεται μέχρι το σημείο Ε, όπως δείχνει το σχήμα. Να υπολογιστούν:

α. Η ταχύτητα του κυλίνδρου όταν βρίσκεται στο άκρο Δ του τεταρτοκυκλίου.

β. Η δύναμη (προέλευση και μέτρο) που δέχεται ο κύλινδρος όταν βρίσκεται στο άκρο Δ.

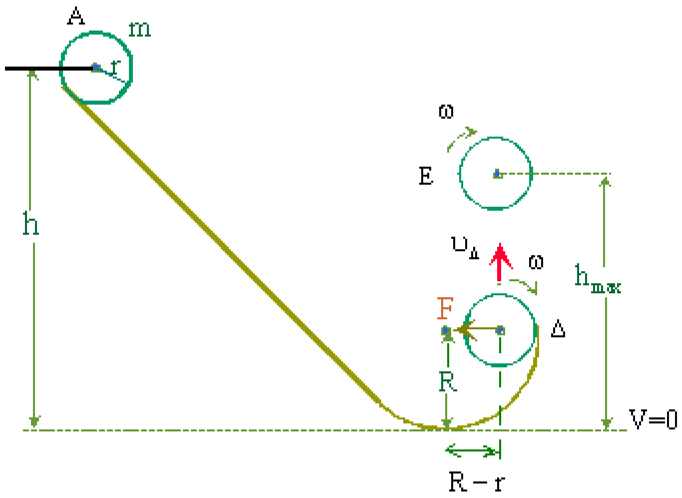
γ. Η γωνιακή ταχύτητα κύλισης του κυλίνδρου στο σημείο Δ.

δ. Το μέγιστο ύψος h_{max} στο οποίο θα ανέλθει το κέντρο μάζας του κυλίνδρου από το οριζόντιο επίπεδο.

ε. Δικαιολογήστε γιατί $h_{max} < h$.

Δίνεται η ροπή αδρανείας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = mr^2$ και το g.

Λύση



α. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των σημείων Α και Δ, θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο προκύπτει:

$$\text{Α.Δ.Ε.}_{(Α\to Δ)}: K_A + V_A = K_Δ + V_Δ \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mυ_Δ{}^2 + \frac{1}{2}I_C ω^2 + mgR$$

$\Rightarrow$

$$mg(h-R) = \frac{1}{2}mυ_Δ{}^2 + \frac{1}{2}I_C ω^2 \quad (1)$$

Λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση είναι: $υ_Δ = ωr \quad \Rightarrow \quad ω = \frac{υ_Δ}{r}$

οπότε η (1) δίνει: $mg(h-R) = \frac{1}{2}mυ_Δ{}^2 + \frac{1}{2}m\cancel{r^2}\cdot\frac{υ_Δ{}^2}{\cancel{r^2}} \Rightarrow$

$\cancel{m}g(h-R) = \cancel{m}υ_Δ{}^2 \quad \Rightarrow$

$$υ_Δ = \sqrt{g(h-R)} = \sqrt{g\left(h-\frac{h}{3}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{υ_Δ = \sqrt{\frac{2}{3}gh}} \quad (2)$$

β. Η δύναμη F που δέχεται ο κύλινδρος στο σημείο Δ είναι η κάθετη αντίδραση από την επιφάνεια του τεταρτοκυκλίου και παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης της κυκλικής κίνησης που εκτελεί το κέντρο μάζας του κυλίνδρου. Επομένως ισχύει:

$$F_K = m\alpha_K \;\Rightarrow\; F = m\frac{\upsilon_\Delta^{\,2}}{R-r} \overset{(2)}{=} \frac{m}{R-r}\left(\frac{2}{3}gh\right) = \left(\frac{m}{\frac{h}{3}-\frac{h}{5}}\right)\left(\frac{2}{3}gh\right) = \left(\frac{m}{\frac{2h}{15}}\right)\frac{2}{3}gh = \;\Rightarrow \boxed{F = 5mg}$$

γ. Η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου στο σημείο Δ είναι:

$$\upsilon_\Delta = \omega r \quad\Rightarrow\quad \omega = \frac{\upsilon_\Delta}{r} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}gh}}{h/5} = 5\sqrt{\frac{2}{3}g\frac{\cancel{h}}{h^{\cancel{2}}}} \;\Rightarrow\; \boxed{\omega = 5\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{g}{h}}}$$

δ. Από το Δ έως το ανώτερο σημείο Ε η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σώματος δεν αλλάζει διότι η μοναδική δύναμη που δρα σε αυτό, δηλ. το βάρος, δεν παράγει ροπή. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας προκύπτει:

$$\text{Α.Δ.Ε.}_{(\Delta\to E)} : K_\Delta + V_\Delta = K_E + V_E \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_\Delta^{\,2} + \cancel{\frac{1}{2}I\omega^2} + mgR = \cancel{\frac{1}{2}I\omega^2} + mgh_{max} \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

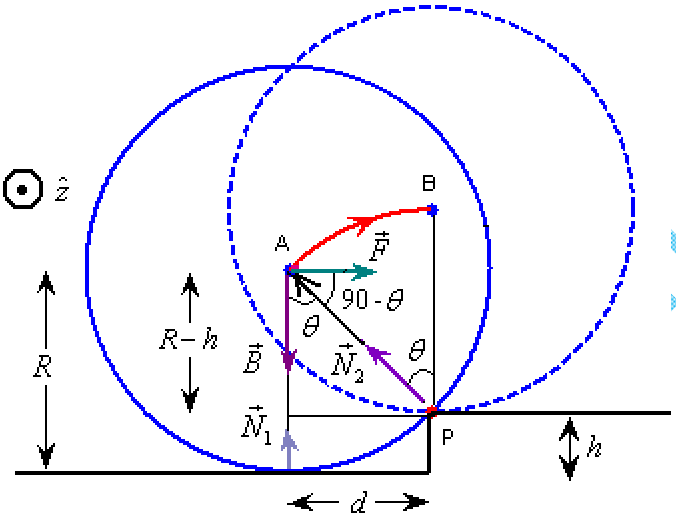
$$\frac{1}{2}m\frac{2}{3}gh + mgR = mgh_{max} \quad\Rightarrow h_{max} = R + \frac{h}{3} \quad \overset{(R=h/3)}{\Rightarrow} \boxed{h_{max} = \frac{2h}{3}}$$

ε. Από την τελευταία σχέση παρατηρείται ότι $h_{max} < h$ επειδή στο ανώτατο σημείο Ε το σώμα έχει σταματήσει μεν τη μεταφορική του κίνηση $(\upsilon_E = 0)$, αλλά περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, οπότε μέρος της αρχικής δυναμικής του ενέργειας έχει μετατραπεί σε περιστροφική κινητική ενέργεια.

Άσκηση 6η

Ποια είναι η ελάχιστη οριζόντια δύναμη F που πρέπει να εφαρμοστεί πάνω στον άξονα μιας ρόδας ακτίνας R και μάζας m, ώστε να ανέβει πάνω σ' ένα πεζοδρόμιο ύψους h;

Λύση:



Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ρόδα είναι το βάρος της $\vec{B}$, η δύναμη $\vec{F}$ στον άξονα της, η κάθετη αντίδραση $\vec{N}_1$ από το οριζόντιο δάπεδο και η αντίδραση $\vec{N}_2$ από τη γωνία του σκαλοπατιού. Όταν η ρόδα ακουμπήσει στο σημείο P του σκαλοπατιού θα αρχίσει να περιστρέφεται γύρω από το σημείο αυτό. Επίσης όταν η ρόδα θα αρχίσει να ανεβαίνει το πεζοδρόμιο χάνει την επαφή του με το έδαφος, δηλαδή είναι $N_1 = 0$, οπότε $\vec{\tau}_{N_1} = \vec{0}$. Επιπλέον, είναι $\vec{\tau}_{N_2} = \vec{0}$ γιατί ο φορέας της $\vec{N}_2$ διέρχεται από το P.

Άρα, για να καταφέρει να περιστραφεί η ρόδα θα πρέπει η ροπή της οριζόντιας δύναμης $\vec{F}$ να ξεπεράσει τη ροπή του βάρους. Είναι:

$$\vec{\tau}_F = \vec{r} \times \vec{F} = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right|(-\hat{z}) = RF\sin(90-\theta)(-\hat{z}) = -FR\cos\theta\hat{z}$$

$$\vec{\tau}_B = \vec{r} \times \vec{B} = \left|\vec{r} \times \vec{B}\right|\hat{z} = Rmg\sin\theta\hat{z}$$, όπου $\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{PA}}$

Οι ροπές αυτές είναι όντως αντίθετες και για να περιστραφεί η ρόδα θα πρέπει:

$$\left|\vec{\tau}_F\right| \geq \left|\vec{\tau}_B\right| \Rightarrow FR\cos\theta \geq Rmg\sin\theta \Rightarrow F \geq mg\tan\theta \Rightarrow F_{\min} = mg\tan\theta$$

Αλλά από το σχήμα είναι: $\tan\theta = \dfrac{d}{R-h}$ και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$R^2 = d^2 + (R-h)^2 \Rightarrow R^2 = d^2 + R^2 + h^2 - 2Rh \Rightarrow d^2 = 2Rh - h^2 \Rightarrow$$

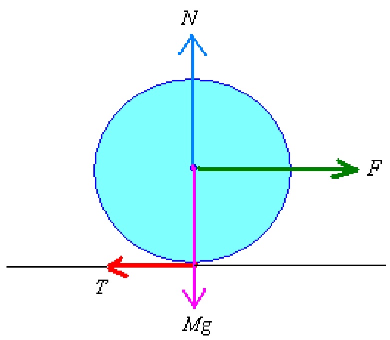
$$d = \sqrt{h(2R-h)}$$

οπότε:
$$F_{\min} = mg\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$$

Άσκηση 7η

Μια σταθερή οριζόντια δύναμη F ασκείται σε μια μηχανή κουρέματος χόρτου που έχει το σχήμα ομογενούς συμπαγούς κυλίνδρου ακτίνας R και μάζας M. Αν ο κύλινδρος κυλά χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια να βρείτε την επιτάχυνση του Κ.Μ. του και τον ελάχιστο συντελεστή τριβής που είναι απαραίτητος για να αποτρέψει την ολίσθησή του. Δίνεται η ροπή αδρανείας του κυλίνδρου: $I = MR^2/2$.

Λύση



Ο 2ος Νόμος του Newton στη διεύθυνση κίνησης δίνει:

$$F - T = Ma_c \quad (1)$$

ενώ στην κατακόρυφη διεύθυνση το βάρος εξουδετερώνεται από την κάθετη αντίδραση του δαπέδου:

$$N = Mg \quad (2)$$

Η συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση είναι:

$$u = \omega R \Rightarrow a_c = \dot{\omega} R \quad (3)$$

Ο Θεμελιώδης Νόμος της Περιστροφικής Κίνησης δίνει:

$$\Sigma\tau = I\dot{\omega} \Rightarrow T\cancel{R} = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}}\dot{\omega} \overset{(3)}{\Rightarrow} 2T = Ma_c \overset{(1)}{\Rightarrow} 2T = F - T \Rightarrow F = 3T \Rightarrow T = \frac{F}{3}$$

(4)

Όπου λάβαμε υπόψη μας ότι η δύναμη F δεν παράγει ροπή ως προς τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου, όπως επίσης και το βάρος και η κάθετη αντίδραση.

Έτσι: $(1) \Rightarrow a_c = \frac{F-T}{M} \overset{(4)}{\Rightarrow} a_c = \frac{2F}{3M}$

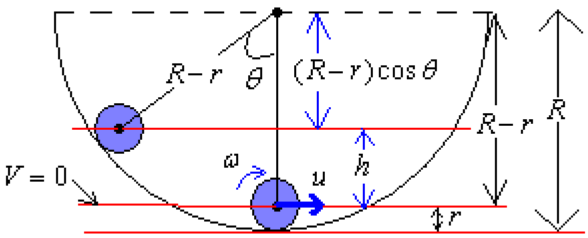
Επειδή έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση, το σημείο επαφής είναι ακίνητο κι έτσι η τριβή που ασκείται στον κύλινδρο είναι στατική:

$$T \le \mu N \overset{(2)}{=} \mu Mg \Rightarrow \mu \ge \frac{T}{Mg} \Rightarrow \mu_{\min} = \frac{T}{Mg} \overset{(4)}{\Rightarrow} \mu_{\min} = \frac{F}{3Mg}$$

Άσκηση 8η

Μια ομογενής συμπαγής σφαίρα ακτίνας r τοποθετείται στην εσωτερική επιφάνεια ενός ημισφαιρικού κυπέλου ακτίνας R. Η σφαίρα αφήνεται ακίνητη από μια θέση όπου σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο και κυλά χωρίς να ολισθαίνει. Προσδιορίστε την γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας όταν φθάνει στο χαμηλότερο σημείο του κυπέλου. Δίνεται η ροπή αδρανείας της σφαίρας: $I = 2mr^2/5$.

Λύση



Θεωρώ ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας ($V = 0$) αυτό που περνά από το Κ.Μ. της σφαίρας στο χαμηλότερο σημείο του κυπέλου. Λαμβάνοντας υπόψη μας την ακτίνα r της σφαίρας, η υψομετρική διαφορά των θέσεων του Κ.Μ. μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης είναι:

$$h=(R-r)-(R-r)\cos\theta \Rightarrow h=(R-r)(1-\cos\theta) \quad (1)$$

Αρχικά η σφαίρα είναι ακίνητη κι έτσι έχει μόνο δυναμική ενέργεια:

$$E_{\alpha\rho\chi}=mgh \overset{(1)}{\Rightarrow} E_{\alpha\rho\chi}=mg(R-r)(1-\cos\theta) \quad (2)$$

Στην τελική θέση (κατώτερο σημείο του κυπέλου) η σφαίρα δεν έχει δυναμική ενέργεια (λόγω της επιλογής του επιπέδου δυναμικής ενέργειας), αλλά έχει κινητική ενέργεια τόσο λόγω της μεταφορικής κίνησης όσο και λόγω της περιστροφικής κίνησης της σφαίρας:

$$E_{\tau\varepsilon\lambda}=E_{\mu\varepsilon\tau}+E_{\pi\varepsilon\rho}=\frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3)$$

Η ροπή αδρανείας της ομογενούς συμπαγούς σφαίρας μάζας m και ακτίνας r δίνεται από τη σχέση:

$$I=\frac{2}{5}mr^2 \quad (4)$$

Η <u>συνθήκη κύλισης</u> χωρίς ολίσθηση είναι: $u=\omega r$ (5)

Έτσι: $(3)\underset{(5)}{\overset{(4)}{\Rightarrow}} E_{\tau\varepsilon\lambda}=\frac{1}{2}m\omega^2r^2+\frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\omega^2 \Rightarrow E_{\tau\varepsilon\lambda}=\frac{7}{10}m\omega^2r^2$ (6)

Η Α.Δ.Μ.Ε. δίνει:

$$E_{\alpha\rho\chi}=E_{\tau\varepsilon\lambda}\underset{(6)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}}\cancel{m}g(R-r)(1-\cos\theta)=\frac{7}{10}\cancel{m}\omega^2r^2 \Rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{10g(R-r)(1-\cos\theta)}{7r^2}}$$

<u>Άσκηση 9η</u>

Ένα μεγάλο κυλινδρικό ρολό λεπτού χαρτιού αρχικής ακτίνας R βρίσκεται πάνω σε μια οριζόντια επιφάνεια μεγάλου μήκους με το εξωτερικό άκρο του χαρτιού στερεωμένο στην επιφάνεια ώστε να μπορεί να ξετυλίγεται εύκολα. Σπρώχνουμε ελαφρά ($\upsilon_0 \approx 0$) το ρολό που αρχίζει να ξετυλίγεται. Προσδιορίστε την ταχύτητα του Κ.Μ. του ρολού οταν η ακτίνα του ελαττωθεί σε r. Εφαρμόστε για $R = 6m$ και $r = 1mm$. Δίνεται η ροπή αδρανείας συμπαγούς ομογενούς κυλίνδρου: $I = MR^2/2$. *<u>Υπόδειξη</u>: Υποθέστε ότι το ρολό έχει σταθερή πυκνότητα και εφαρμόστε ενεργειακές μεθόδους.*

<u>Λύση</u>

Όταν το ρολό έχει ακτίνα R καταλαμβάνει όγκο $l\pi R^2$ (όπου l το μήκος του) οπότε έχει μάζα:

$$M_R = \rho l \pi R^2$$

Όταν το ρολό έχει ακτίνα r καταλαμβάνει όγκο $l\pi r^2$ οπότε έχει μάζα: $M_r = \rho l \pi r^2$

Με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε: $M_r = \dfrac{M_R}{R^2} r^2$ (1)

Αρχικά, επειδή η ταχύτητα του ρολού είναι $\upsilon_0 \approx 0$ το ρολό έχει μόνο δυναμική ενέργεια (θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο δάπεδο), ενώ στη συνέχεια εκτός από δυναμική έχει και κινητική ενέργεια τόσο λόγω μεταφορικής όσο και λόγω της περιστροφικής του κίνησης. Η Α.Δ.Μ.Ε. δίνει:

$$M_R g R = M_r g r + \frac{1}{2} M_r \upsilon_c^2 + \frac{1}{2} I_r \omega^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} M_R g R = \frac{M_R}{R^2} r^2 g r + \frac{1}{2}\frac{M_R}{R^2} r^2 \upsilon_c^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{1}{2}\overbrace{\left(\frac{M_R}{R^2} r^2\right)}^{M_r} r^2\right]}_{I_r}\omega^2$$

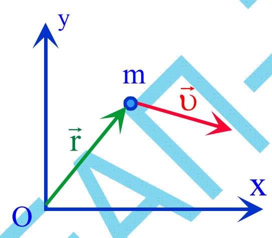
$$gR = \frac{g}{R^2} r^3 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\upsilon_c^2 + \frac{1}{4}\frac{r^4}{R^2}\omega^2 \overset{\upsilon_c = \omega r}{\Rightarrow} gR = \frac{g}{R^2} r^3 + \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\upsilon_c^2 + \frac{1}{4}\frac{r^2}{R^2}\upsilon_c^2 \overset{\cdot(4R^2)}{\Rightarrow}$$

$$4gR^3 = 4gr^3 + 2r^2\upsilon_c^2 + r^2\upsilon_c^2 \Rightarrow 4g\left(R^3 - r^3\right) = 3r^2\upsilon_c^2 \Rightarrow \upsilon_c = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{g\left(R^3 - r^3\right)}{3}}$$

Για $R = 6m$ και $r = 1mm = 10^{-3}m$ προκύπτει: $\upsilon_c = 53665,6m/s \simeq 53.7km/s$

13.1 ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ – ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ

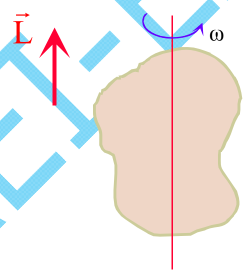
- **Στροφορμή υλικού σημείου** ως προς σημείο Ο:



$\boxed{\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon}}$ (Μονάδες S.I.: $kgr \cdot m^2 / sec$)

όπου m η μάζα του υλικού σημείου, $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του υλικού σημείου ως προς το σημείο Ο και $\vec{\upsilon}$ το διάνυσμα της ταχύτητας του.

- **Στροφορμή στερεού σώματος** ως προς τον άξονα περιστροφής του:



$$\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$

όπου Ι η ροπή αδράνειας του στερεού σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής του και $\vec{\omega}$ το διάνυσμα της γωνιακής του ταχύτητας. Παρατηρείται ότι τα διανύσματα $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ είναι συγγραμμικά.

- **Σχέση ροπής δύναμης – στροφορμής:**

$$\boxed{\Sigma\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός σώματος ισούται με το άθροισμα των ροπών δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό.

- **Αρχή διατήρησης στροφορμής:**

Αν $\Sigma\vec{\tau} = 0$ τότε $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ δηλαδή $\vec{L} = σταθ.$ (Α.Δ.Σ.)

- Αναλυτικότερη παρουσίαση της θεωρίας της στροφορμής στο κεφ. 7 σελ 177 του βιβλίου: ΦΥΣΙΚΗ Ι – ΜΗΧΑΝΙΚΗ Π. Φ. ΜΟΙΡΑ.

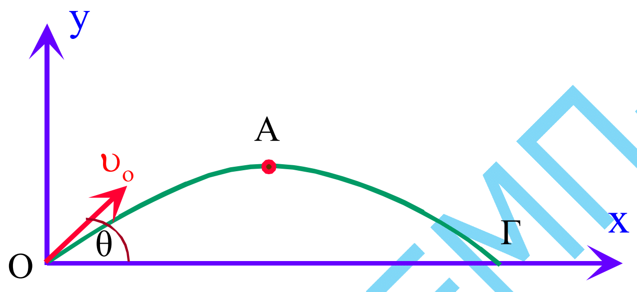
13.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1η

Ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων με αρχική ταχύτητα υ_o που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα κινείται στο βαρυτικό πεδίο της Γης. Βρείτε τη στροφορμή του σώματος ως προς την αρχή των συντεταγμένων όταν το σώμα βρίσκεται:

α. Στην αρχή των συντεταγμένων.
β. Στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς του.
γ. Στο σημείο ακριβώς προτού προσκρούσει στο έδαφος.
δ. Ποια ροπή προκαλεί μεταβολές της στροφορμής του;

Λύση:



Η στροφορμή γενικά του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon} \quad (1)$$

α. Στο σημείο Ο το διάνυσμα θέσης του σώματος είναι $\vec{r} = 0$, οπότε η (1) προφανώς δίνει:

$$\vec{L}_o = 0$$

β. Στο ψηλότερο σημείο της τροχιάς Α είναι:

$$\upsilon_y = 0 \qquad \text{και} \qquad \upsilon_x = \upsilon_o \cos\theta$$

Ενώ:

$$\upsilon_y = \upsilon_o \sin\theta - gt \quad \Rightarrow \quad 0 = \upsilon_o \sin\theta - gt_A \quad \Rightarrow \quad t_A = \frac{\upsilon_o \sin\theta}{g}$$

Οπότε:

$$x = \upsilon_o \cos\theta \cdot t \quad \Rightarrow \quad x_A = \upsilon_o \cos\theta \frac{\upsilon_o \sin\theta}{g} \quad \Rightarrow$$

$$x_A = \frac{\upsilon_o^{\,2}}{g} \cos\theta \cdot \sin\theta$$

και $y = \upsilon_o \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y_A = \upsilon_o \sin\theta \frac{\upsilon_o \sin\theta}{g} - \frac{1}{2} \cancel{g} \frac{\upsilon_o^2 \sin^2\theta}{g^{\cancel{2}}}$

$$\Rightarrow$$

$$y_A = \frac{\upsilon_o^2 \sin^2\theta}{2g}$$

Άρα το διάνυσμα θέσης είναι:

$$\vec{r}_A = x_A \hat{x} + y_A \hat{y} = \frac{\upsilon_o^2}{g} \cos\theta \sin\theta \hat{x} + \frac{\upsilon_o^2 \sin^2\theta}{2g} \hat{y}$$

Άρα:

$$\vec{L}_A = m\vec{r}_A \times \vec{\upsilon}_A = m \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\upsilon_o^2}{g}\cos\theta\sin\theta & \frac{\upsilon_o^2 \sin^2\theta}{2g} & 0 \\ \upsilon_o \cos\theta & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= m\left[0\hat{x} - 0\hat{y} + \left(0 - \frac{\upsilon_o^3 \sin^2\theta \cos\theta}{2g}\right)\hat{z}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{L}_A = -\frac{m\upsilon_o^3}{2g} \sin^2\theta \cos\theta \hat{z}}$$

γ. Στο σημείο πρόσκρουσης Γ είναι $y = 0$, $x = \frac{2\upsilon_o^2}{g}\cos\theta\sin\theta$ (βεληνεκές) και $\upsilon_x = \upsilon_o \cos\theta$, $\upsilon_y = -\upsilon_o \sin\theta$. Επομένως:

$$\vec{L}_\Gamma = m\vec{r}_\Gamma \times \vec{\upsilon}_\Gamma = m \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{2\upsilon_o^2}{g}\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ \upsilon_o \cos\theta & -\upsilon_o \sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= m\left[0\hat{x} - 0\hat{y} - \frac{2\upsilon_o^3}{g}\cos\theta\sin^2\theta\hat{z}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{L}_\Gamma = -m\frac{2\upsilon_o^3}{g}\cos\theta\sin^2\theta\hat{z}}$$

δ. Όπως παρατηρείται η στροφορμή αλλάζει τιμή σε κάθε σημείο της τροχιάς, δηλαδή μεταβάλλεται με το χρόνο κι' αυτό οφείλεται στη ροπή της δύναμης του βάρους που έχει την κατεύθυνση $-z$ επαληθεύοντας τη σχέση $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$.

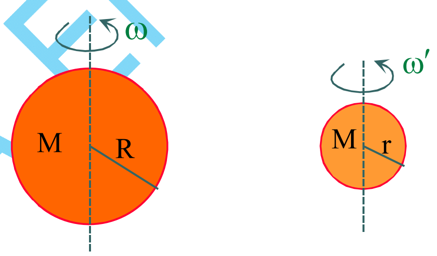
Άσκηση 2η

Σφαιρικός αστέρας μάζας M και ακτίνας R περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα που συμπίπτει με μια διάμετρο του. Κάποια χρονική στιγμή αφού έχει εξαντλήσει τα πυρηνικά του καύσιμα, υφίσταται βαρυτική κατάρρευση και όλη η μάζα του συγκεντρώνεται σε σφαίρα ακτίνας r $(r << R)$. Βρείτε την τελική γωνιακή του ταχύτητα περιστροφής (διεύθυνση, φορά και μέτρο). Κατά τη βαρυτική κατάρρευση στον αστέρα ασκούνται μόνο εσωτερικές δυνάμεις και η μάζα του παραμένει ίδια.

Δίνεται ότι η ροπή αδρανείας μιας σφαίρας ως προς μια διάμετρο της είναι $I = \frac{2}{5}MR^2$.

Λύση:

Επειδή κατά τη βαρυτική κατάρρευση ασκούνται στον αστέρα μόνο εσωτερικές δυνάμεις, η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών είναι μηδέν και επομένως η στροφορμή είναι σταθερή. Άρα η αρχή διατήρησης της στροφορμής δίνει:



Α.Δ.Σ.: $\vec{L}_{αρχ.} = \vec{L}_{τελ.} \Rightarrow I_{αρχ.}\vec{\omega} = I_{τελ.}\vec{\omega}' \Rightarrow \frac{2}{5}MR^2\vec{\omega} = \frac{2}{5}Mr^2\vec{\omega}'$
$\Rightarrow$

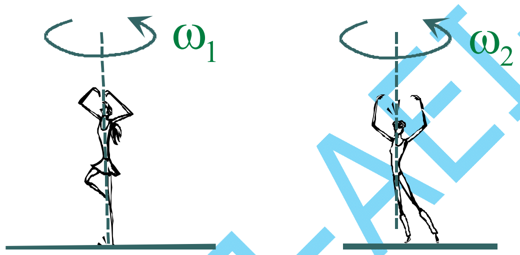
$$\boxed{\vec{\omega}' = \frac{R^2}{r^2}\vec{\omega}}$$

Δηλαδή η τελική γωνιακή ταχύτητα του αστέρα έχει την ίδια φορά και διεύθυνση όπως και πριν την κατάρρευση, αλλά μέτρο σημαντικά μεγαλύτερο (αφού R>>r)
0

Άσκηση 3η

Χορεύτρια στον πάγο περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_o. Τι θα συμβεί αν ξαφνικά η χορεύτρια, καθώς περιστρέφεται, εκτείνει τα χέρια της; Συγκεκριμένα δείξτε ότι η γωνιακή της ταχύτητα θα μεταβληθεί. Εκφράστε το λόγο της αρχικής προς την τελική γωνιακή ταχύτητα συναρτήσει των ροπών αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής. Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής ελαττώνεται. Που καταναλώθηκε η ενέργεια;

Λύση:



Κατά την περιστροφή της χορεύτριας δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές με αποτέλεσμα η στροφορμή της να διατηρείται. Έτσι η αρχή διατήρησης της στροφορμής δίνει:

Α.Δ.Σ.: $L_{αρχ.} = L_{τελ.} \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow$

$$\boxed{\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1} \quad (1)$$

Επειδή όταν η χορεύτρια εκτείνει τα χέρια της η ροπή αδρανείας της ως προς τον άξονα περιστροφής μεγαλώνει (αφού η ροπή αδράνειας εξαρτάται από την απόσταση της μάζας από τον άξονα περιστροφής), δηλαδή $I_2 > I_1$ οπότε $\frac{I_1}{I_2} < 1$ και η (1) δίνει ότι $\omega_2 < \omega_1$. Δηλαδή κατά την έκταση των χεριών της χορεύτριας η γωνιακή ταχύτητα της ελαττώνεται. Από την (1) ο λόγος ω_1/ω_2 είναι:

$$\boxed{\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{I_2}{I_1}}$$

Η αρχική κινητική ενέργεια περιστροφής είναι:

$$K_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 \quad (2)$$

Ενώ η τελική κινητική ενέργεια περιστροφής είναι:

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} K_2 = \frac{1}{2} I_2 \frac{I_1^2}{I_2^2} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{I_1^2}{I_2} \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \frac{I_1}{I_2}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} K_2 = K_1 \frac{I_1}{I_2}$$

Κι' επειδή $I_1 / I_2 < 1$ είναι $K_2 < K_1$ δηλαδή η κινητική ενέργεια μειώνεται κατά την έκταση των χεριών της χορεύτριας. Η ενέργεια καταναλώθηκε για την απομάκρυνση των χεριών της χορεύτριας από το σώμα της.

<u>Άσκηση 4η</u>

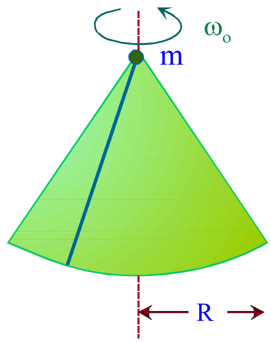
Ένας κώνος ύψους h και ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονά του με γωνιακή ταχύτητα ω_o. Πάνω στην επιφάνεια του κώνου υπάρχει ένα αυλάκι, όπως φαίνεται στο σχήμα όπου μπορεί να τοποθετείται ένα μικρό σώμα μάζας m. Θεωρείστε ότι η ροπή αδρανείας του κώνου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι I_o.

Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος κώνος – μικρό σώμα;

α. Όταν το μικρό σώμα βρίσκεται στην κορυφή του κώνου.

β. Όταν το σώμα βρίσκεται στη βάση του κώνου.

Αγνοήστε τις επιδράσεις της βαρύτητας.



<u>Λύση:</u> Αγνοώντας τις επιδράσεις της βαρύτητας στο σύστημα κώνος – μικρό σώμα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές οπότε η στροφορμή διατηρείται.

α. Άρα σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της στροφορμής όταν το σώμα βρίσκεται στην κορυφή του κώνου προκύπτει:

Α.Δ.Σ.: $L_{αρχ.} = L_{τελ.} \quad I_o \omega_o = I_{συσ.} \omega \quad (1)$

όπου $I_{συσ.} = I_{κώνου} + I_m = I_o + m0^2 = I_o$

Άρα η (1) δίνει:

$$I_o \omega_o = I_o \omega \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_o}$$

Δηλαδή δεν μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος.

β. Όταν το σώμα βρίσκεται στη βάση του κώνου η αρχή διατήρησης της στροφορμής δίνει:

Α.Δ.Σ.: $L_{αρχ.} = L_{τελ.} \Rightarrow I_o \omega_o = I_{συσ.} \omega \quad (2)$

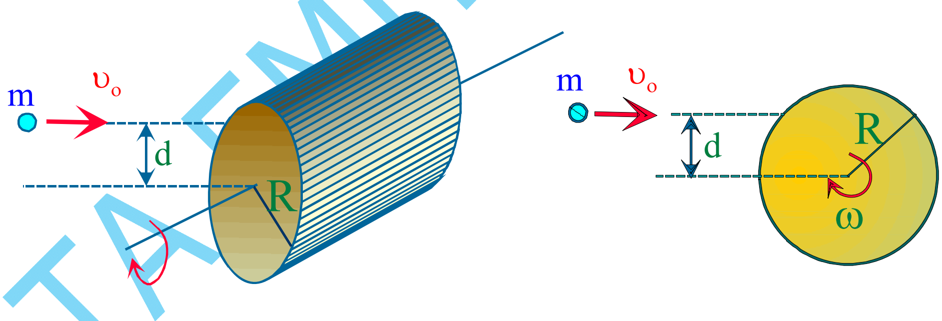
όπου $I_{συστ.} = I_{κώνου} + I_m = I_o + mR^2$. Άρα η (2) δίνει:

$$I_o\omega_o = \left(I_o + mR^2\right)\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{I_o\omega_o}{I_o + mR^2}}$$

Άσκηση 5η

Ένα βλήμα μάζας m και αρχικής ταχύτητας υ_o εκτοξεύεται εναντίον κυλίνδρου μάζας M και ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο κύλινδρος βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας και είναι εξαρτημένος σε ένα σταθερό οριζόντιο άξονα που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του. Η τροχιά του βλήματος είναι κάθετη στον άξονα και σε απόσταση $d<R$ πάνω από τον άξονα. Το βλήμα χτυπάει τον κύλινδρο και ενσωματώνεται σε αυτόν. Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει το σύστημα κύλινδρος – βλήμα. Αγνοείστε το βάρος του βλήματος. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα συμμετρίας του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$

Λύση:



Αγνοώντας το βάρος του βλήματος, η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών στο σύστημα είναι μηδέν και επομένως η στροφορμή του συστήματος διατηρείται. Άρα εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής προκύπτει:

Α.Δ.Σ.: $L_{αρχ.} = L_{τελ.} \quad \Rightarrow \quad m\upsilon_o d + 0 = I_{συστ.}\omega \quad (1)$

όπου $I_{υστ.} = I_{κυλ} + I_{βλημ.} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$ οπότε η (1) γίνεται:

$$m\upsilon_o d = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{m\upsilon_o d}{\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2}}$$

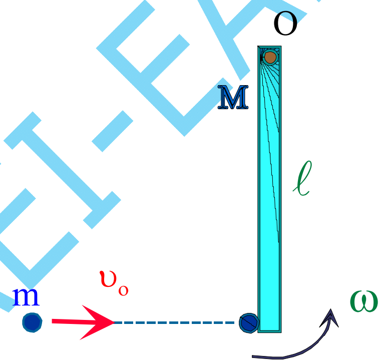
Άσκηση 6η

Ράβδος μάζας M και μήκους ℓ είναι αναρτημένη από το πάνω άκρο της. Ένα βλήμα μάζας m και αρχικής ταχύτητας υ_o εκτοξεύεται εναντίον της ράβδου και χτυπά σε αυτήν στο κάτω άκρο της. Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει η ράβδος ακριβώς μετά την κρούση αν:

α. Το βλήμα προσκολλάται στο κάτω άκρο της ράβδου.

β. Το βλήμα διαφεύγει με ταχύτητα $\upsilon_o/2$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της $I_C = \frac{1}{12}M\ell^2$.



Λύση:

α. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής ακριβώς πριν και ακριβώς μετά την κρούση του βλήματος με τη ράβδο προκύπτει:

Α.Δ.Σ.: $L_{\pi\rho\iota\nu} = L_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow m\upsilon_o\ell + 0 = I_{o\ \sigma\upsilon\sigma\tau.}\omega \quad (1)$

όπου $I_{o\ \sigma\upsilon\sigma\tau.} = I_{o\ \rho\alpha\beta\delta.} + I_{o\ \beta\lambda\eta\mu} = \frac{1}{3}M\ell^2 + m\ell^2$

από το θεώρημα Steiner:

$$I_{o\ \rho\alpha\beta\delta} = I_{C\ \rho\alpha\beta\delta} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{4}M\ell^2 = \frac{1}{3}M\ell^2$$

Άρα η (1) δίνει:

$$m\upsilon_o\ell = \left(\frac{M}{3} + m\right)\ell^2\omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{m\upsilon_o}{\left(\frac{M}{3} + m\right)\ell}}$$

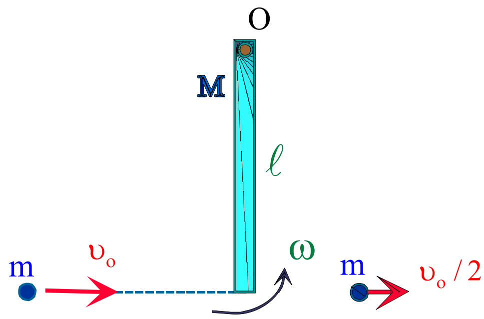
β. Η αρχή διατήρησης της στροφορμής δίνει:

Α.Δ.Σ.: $L_{\pi\rho\iota\nu} = L_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow$

$$m\upsilon_o\ell + 0 = I_{o\ \rho\alpha\beta\delta.}\omega + m\frac{\upsilon_o}{2}\ell \Rightarrow$$

$$m\upsilon_o\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}M\ell^2\omega \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \frac{3m\upsilon_o}{2M\ell}}$$



Άσκηση 7η

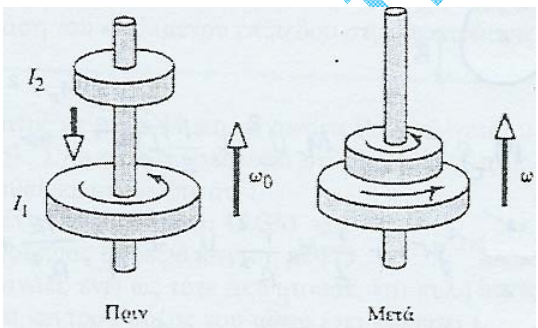
Ένας κύλινδρος με ροπή αδρανείας I_1 περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0 γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα χωρίς τριβή. Ένας δεύτερος κύλινδρος με ροπή αδρανείας I_2 που αρχικά δεν περιστρέφεται πέφτει πάνω στον αρχικό κύλινδρο. Επειδή οι επιφάνειες είναι τραχιές, οι δυο κύλινδροι αποκτούν τελικά την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω. α)Υπολογίστε την ω, β) αποδείξτε ότι υπάρχει απώλεια κινητικής ενέργειας και γ) υπολογίστε το λόγο της τελικής προς την αρχική κινητική ενέργεια.

Λύση

α) Η Α.Δ.Σ. δίνει:

$$I_1\omega_0 = (I_1 + I_2)\omega \Rightarrow$$

$$\omega = \left(\frac{I_1}{I_1 + I_2}\right)\omega_0 \quad (1)$$



β) Η αρχική κινητική ενέργεια είναι:

$$K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2 \quad (2)$$

Η τελική κινητική ενέργεια είναι:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{I_1^{\,2}}{I_1 + I_2}\right)\omega_0^2 \quad (3)$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}\left(\frac{I_1^{\,2}}{I_1 + I_2}\right)\omega_0^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_0^2 = \frac{1}{2}I_1\omega_0^2\left(\frac{I_1}{I_1 + I_2} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Delta K = -\frac{1}{2}\frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}\omega_0^2 < 0$$

δηλαδή έχουμε απώλεια κινητικής ενέργειας.

γ) Ο λόγος της τελικής προς την αρχική κινητική ενέργεια με βάση τις (2), (3) είναι:

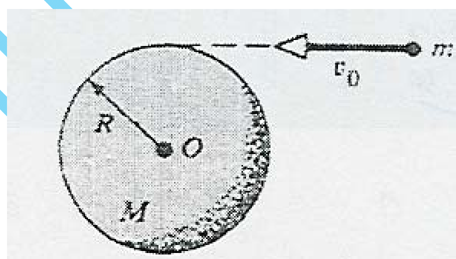
$$\frac{K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{I_1^2}{I_1+I_2}\right)\omega_0^2}{\frac{1}{2}I_1\omega_0^2}\Rightarrow \frac{K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}}=\frac{I_1}{I_1+I_2}<1$$

Άσκηση 8η

Ένα σώμα μάζας $m=10kg$ και ταχύτητας $\upsilon_0=5m/s$ συγκρούεται και προσκολλάται στην εξωτερική επιφάνεια μιας ομογενούς στερεάς σφαίρας μάζας $M=2kg$ και ακτίνας $R=20cm$. Αν η σφαίρα είναι αρχικά ακίνητη και στερεωμένη σε έναν άξονα (χωρίς τριβές) που διέρχεται από το Ο και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας, να προσδιορίσετε α) τη γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση και β) την απώλεια ενέργειας.

Λύση

α) Αρχικά η στροφορμή του συστήματος οφείλεται στο βλήμα:



$$L_{\alpha\rho\chi}=m\upsilon_0R=0,01\cdot5\cdot0,2=0,01kgm^2/s$$

Μετά την κρούση το σύστημα σφαίρα βλήμα έχει ολική ροπή αδρανείας:

$$I_{o\lambda}=\frac{2}{5}MR^2+mR^2=0,4\cdot2\cdot0,2^2+0,01\cdot0,2^2\simeq0,0324kgm^2$$

Η Α.Δ.Σ. δίνει:

$$L_{\alpha\rho\chi}=L_{\tau\varepsilon\lambda}\Rightarrow L_{\alpha\rho\chi}=I_{o\lambda}\omega\Rightarrow\omega=\frac{L_{\alpha\rho\chi}}{I_{o\lambda}}\Rightarrow\omega\simeq0.31rad/s$$

β) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\Delta K=K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=\frac{1}{2}I_{o\lambda}\omega^2-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2\simeq-0,123J<0$$

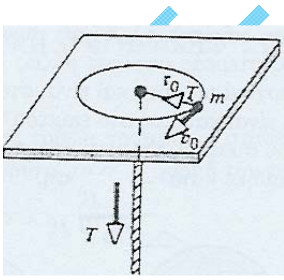
δηλαδή έχουμε απώλεια κινητικής ενέργειας.

Άσκηση 9η

Μια μάζα m είναι δεμένη σε έναν σπάγκο που περνάει μέσα από μια μικρή τρύπα και βρίσκεται πάνω σε οριζόντια λεία επιφάνεια (βλ. σχήμα). Η μάζα αρχικά περιστρέφεται με ταχύτητα υ_0 σε κύκλο ακτίνας r_0. Ο σπάγκος αρχίζει να τραβιέται αργά ελαττώνοντας την ακτίνα του κύκλου σε r. Βρείτε:
α) τη νέα ταχύτητα υ της μάζας .
β) την τάση του νήματος ως συνάρτηση της r
γ) το έργο που παράχθηκε

Λύση

α) α) Η Α.Δ.Σ. δίνει:



$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m\upsilon_0 r_0 = m\upsilon r \Rightarrow \boxed{\upsilon = \upsilon_0 \frac{r_0}{r}}$$
(1)

β) Η τάση του νήματος λειτουργεί ως κεντρομόλος:

$$T = F_\kappa \Rightarrow T = m\frac{\upsilon^2}{r} \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{T = m\frac{\upsilon_0^2 r_0^2}{r^3}}$$

γ) Το έργο που παράχθηκε μπορεί να υπολογιστεί με εφαρμογή του Θ.Ε.Κ.Ε.:

$$W = \Delta K = K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{W = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2\left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right)}$$

Άσκηση 10η

Δίδεται ράβδος μήκους 2l=10m. Το μισό της τμήμα είναι μεταλλικό και έχει μάζα 4kg και το άλλο μισό είναι από ξύλο και έχει μάζα 2kg. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το μέσο της (από το σημείο που ενώνονται τα δύο τμήματά της). Αρχικά η ράβδος συγκρατείται ακίνητη σε οριζόντια θέση και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερη να κινηθεί.

α). Να υπολογίσετε τη ροπή αδρανείας της ράβδου ως προς τον άξονα που περνάει από το μέσο της.

β) Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου τη στιγμή της εκκίνησης και όταν η ράβδος βρίσκεται σε κατακόρυφη θέση.

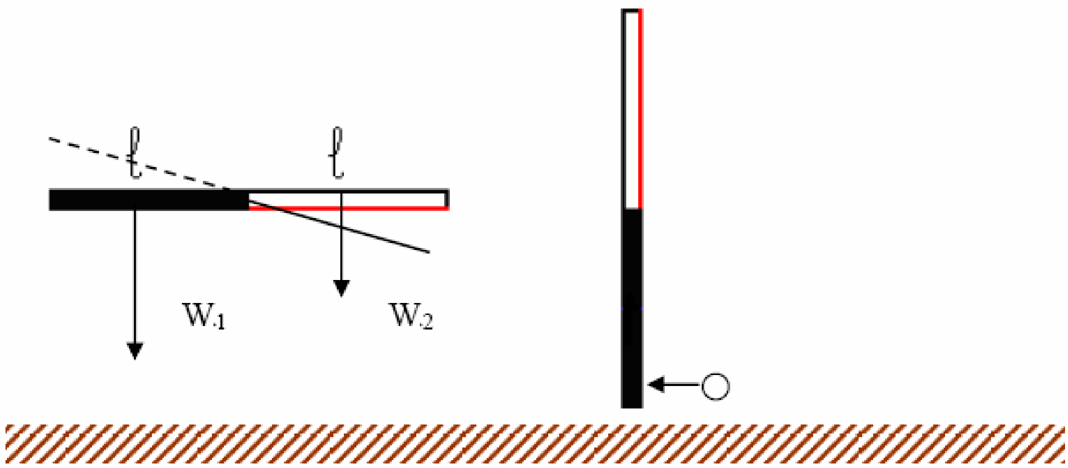
γ) Ποια η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν είναι σε κατακόρυφη θέση;

δ) Ποια είναι η γραμμική ταχύτητα των άκρων της;

ε) Ποια είναι η στροφορμή της ράβδου στη κατακόρυφη θέση;

στ) Τη στιγμή που βρίσκεται στη κατακόρυφη θέση προσκρούει στο κατώτερο σημείο της ράβδου κομμάτι στόκου μαζας m_s=0,1 kg που κινείται οριζόντια προς τη ράβδο με ταχύτητα u=10m/s . Μετά τη σύγκρουση το κομμάτι στόκου προσκολλάται στη ράβδο. Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος μετά τη κρούση;

(Δίνεται ότι η ροπή αδρανείας ομογενούς ράβδου μήκους L και μάζας m ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στην ράβδο: $(1/12)mL^2$)



Λύση

α) Θα υπολογίσουμε τη ροπή αδρανείας του κάθε τμήματος ως προς το κέντρο της ράβδου. Το κέντρο της ράβδου συμπίπτει με το ένα άκρο του κάθε τμήματος. Έτσι, με βάση το θεώρημα Steiner:

ξύλινο τμήμα: $I_1 = \frac{1}{12}m_1 l^2 + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_1 l^2$, όπου $m_1 = 2kg$

μεταλλικό τμήμα: $I_2 = \frac{1}{12}m_2 l^2 + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}m_2 l^2$, όπου $m_2 = 4kg$

Άρα, η ράβδος έχει ροπή αδρανείας ως προς άξονα που διέρχεται κάθετα από το κέντρο της:

$$I = I_1 + I_2 \Rightarrow I = \frac{1}{3}(m_1 + m_2)l^2 \Rightarrow I = \frac{1}{3}(2+4)5^2 = 50kgm^2$$

β) Από το θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης έχουμε τη στιγμή της εκκίνησης:

$$\Sigma\tau = I\dot{\omega} \Rightarrow m_2 g\frac{l}{2} - m_1 g\frac{l}{2} = I\dot{\omega} \Rightarrow 100 - 50 = 50\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = 1rad/s^2$$

ενώ στην κατακόρυφη θέση, επειδή τα βάρη διέρχονται από τον άξονα περιστροφής, δεν παράγουν ροπή και συνεπώς είναι: $\Sigma\tau = 0 \Rightarrow \dot{\omega} = 0$

γ) Από την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας και θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας την αρχική θέση της ράβδου παίρνουμε:

$$0 = \frac{1}{2}I\omega^2 + m_1 g\frac{l}{2} - m_2 g\frac{l}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{gl(m_2 - m_1)}{I}} = \sqrt{2}rad/s$$

δ) Η γραμμική ταχύτητα των άκρων της ράβδου είναι: $\upsilon = \omega l = 5\sqrt{2}m/s$

ε) Η στροφορμή της ράβδου είναι: $L = I\omega = 50\sqrt{2}kgm^2/s$

στ) Η Α.Δ.Σ. για το σύστημα ράβδου – στόκου δίνει:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow I\omega - m_s ul = \left(I + m_s l^2\right)\omega' \Rightarrow \omega' = \frac{I\omega - m_s ul}{I + m_s l^2} = 1,25rad/s$$

όπου λάβαμε ως θετική φορά τη φορά προς τα έξω από τη σελίδα, δηλ. αυτή που αντιστοιχεί σε περιστροφή αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού (γι αυτό και το κομμάτι στόκου έχει αρνητική στροφορμή, δηλ. προς το εσωτερικό της σελίδας).

14. ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ – ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Η περιοδική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας καλείται ταλάντωση.

Απλή αρμονική ταλάντωση

Απλή αρμονική ταλάντωση είναι η κίνηση που προκύπτει ως λύση της εξίσωσης:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$$ (Εξίσωση απλής αρμονικής ταλάντωσης)

όπου ω αίναι η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης που συνδέεται με την περίοδο Τ και τη συχνότητα ν ταλάντωσης μέσω των σχέσεων:

$$\omega=\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\Leftrightarrow \mathrm{T}=\frac{2\pi}{\omega}$$ και $$\omega=2\pi\nu\Leftrightarrow \nu=\frac{1}{\mathrm{T}}=\frac{\omega}{2\pi}$$

Η λύση της εξίσωσης αρμονικής ταλάντωσης μπορεί να γραφεί στη μορφή:

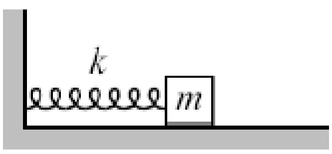
$x=A\sin(\omega t+\phi)$,

όπου το A καλείται πλάτος ταλάντωσης, ενώ το ϕ καλείται αρχική φάση της ταλάντωσης (για t=0).

Η λύση της εξίσωσης αρμονικής ταλάντωσης μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στις μορφές :

$x=B\cos(\omega t+\phi)$ ή $x=C\sin\omega t+D\cos\omega t$

Το πλάτος και η αρχική φάση ταλάντωσης εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος. Αντίθετα, η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης ω εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του φυσικού συστήματος που μελετάμε.



Μάζα συνδεδεμένη με ελατήριο

$$\vec{F}_{\varepsilon\lambda}=m\vec{a}\Rightarrow -kx\hat{i}=ma\hat{i}\Rightarrow a+\frac{k}{m}x=0\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

Α.Α.Τ. με κυκλική συχνότητα $\omega=\sqrt{k/m}$

Η κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{k / m}$ εξαρτάται από τη μάζα του σώματος που ταλαντώνεται και τη σταθερά του ελατηρίου. Αντίθετα, το πλάτος και η αρχική φάση ταλάντωσης προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος (δηλ. την αρχική θέση και ταχύτητα της μάζας).

Άσκηση 1

Μάζα m είναι συνδεδεμένη με ελατήριο σταθεράς k. Να υπολογιστεί η θέση και η ταχύτητα της μάζας συναρτήσει του χρόνου, αν αρχικά $x_0 = 0$, $u_0 = 1$.

Λύση

Η μάζα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{k/m}$.

Τρόπος 1

$$x = A\sin(\omega t + \phi) \Rightarrow u = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

$x(0) = 0 = A\sin\phi$ (1) και $u(0) = 1 = A\omega\cos\phi$ (2)

Η τετριμμένη λύση $A = 0$ απορρίπτεται, διότι δε θα ικανοποιούνταν η (2) οπότε παίρνουμε: $\phi = 0$ και $A = 1/\omega$. Η λύση είναι:

$$x(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \text{ και } u(t) = \cos(\omega t)$$

Τρόπος 2

$$x = B\cos(\omega t + \phi) \Rightarrow u = -B\omega\sin(\omega t + \phi)$$

$x(0) = 0 = B\cos\phi$ (3) και $u(0) = 1 = -B\omega\sin\phi$ (4)

Η τετριμμένη λύση $B = 0$ απορρίπτεται, διότι δε θα ικανοποιούνταν η (4) οπότε παίρνουμε: $\phi = \pi/2$ και $B = -1/\omega$. Η λύση είναι:

$$x(t) = -\frac{\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}{\omega} = \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \text{ και } u(t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t)$$

Τρόπος 3

$$x = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t) \Rightarrow u = C\omega\cos(\omega t) - D\omega\sin(\omega t)$$

$x(0) = 0 = D$ και $u(0) = 1 = C\omega$

οπότε παίρνουμε: $D = 0$ και $C = 1/\omega$.

Η λύση είναι: $x(t) = \dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}$ και $u(t) = \cos(\omega t)$

<u>Συμπέρασμα</u>: Το τελικό αποτέλεσμα, όπως αναμένουμε και θεωρητικά, δεν εξαρτάται από το ποια ακριβώς ισοδύναμη μορφή της λύσης θα θεωρήσουμε. Ωστόσο, ενδέχεται να απλοποιήσουμε ή να περιπλέξουμε τους υπολογισμούς μας ανάλογα με το αν θα θεωρήσουμε την καταλληλότερη, ή όχι, ισοδύναμη μορφή λύσης αντίστοιχα. Στο παραπάνω απλό παράδειγμα, ο τρόπος 3 είναι ο πιο σύντομος, ενώ ο τρόπος 2 ο πιο εκτενής.

Ενέργεια

Η κινητική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή ισούται με:

$$E_K = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

Η δυναμική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι:

$$E_\Delta = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

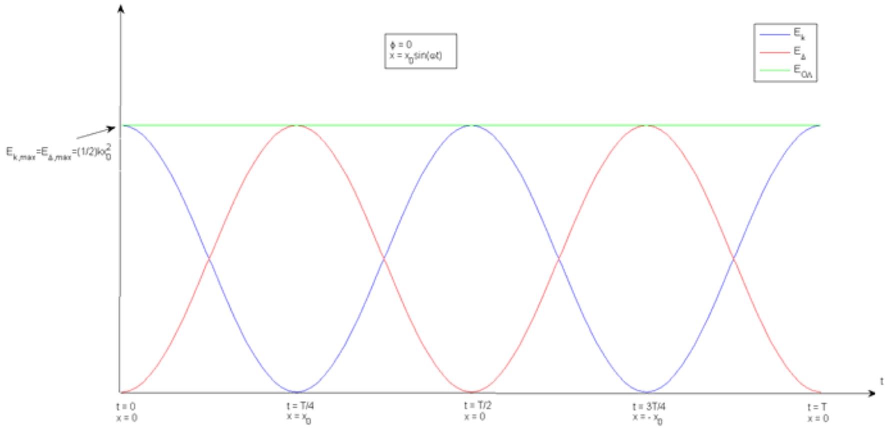
όπου παραπάνω θεωρήσαμε λύση $x = A\sin(\omega t + \phi)$, οπότε $u = \dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$.

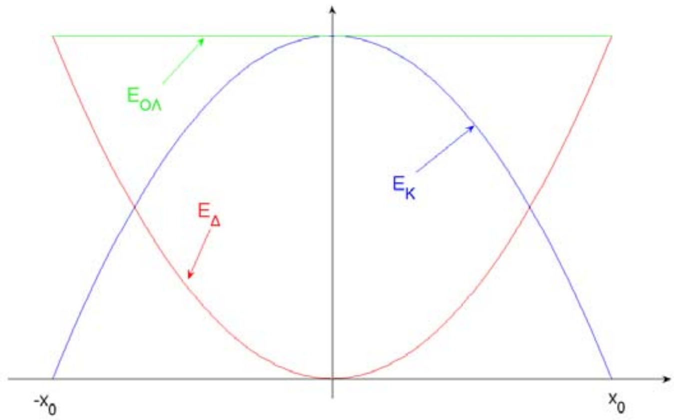
Έτσι, η ολική ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή δίνεται από τη σχέση:

$$E_{O\Lambda} = E_K + E_\Delta = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Συνεπώς, η ολική ενέργεια του Α.Α.Τ. διατηρείται. Αυτό επιτυγχάνεται με τη συνεχή μετατροπή κινητικής ενέργειας σε δυναμική και αντιστρόφως.

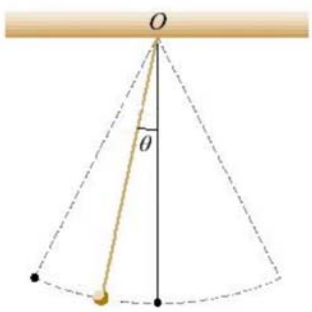
Παρακάτω, σχεδιάζουμε ως συναρτήσεις του χρόνου την κινητική και τη δυναμική ενέργεια, καθώς και τη συνολική ενέργεια (που διατηρείται), θεωρώντας αρχικές συνθήκες: $x(0) = x_0$, $u(0) = 0$, οπότε το πλάτος ταλάντωσης είναι $A = x_0$, ενώ η αρχική φάση $\phi = 0$ (από τα αποτελέσματα της άσκησης 2).





Απλό μαθηματικό εκκρεμές

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση απλού μαθηματικού εκκρεμούς μήκους l στο κάτω άκρο του οποίου υπάρχει σημειακή μάζα m.



$$F_{\varepsilon} = ma_{\varepsilon} \Rightarrow -mg\sin\theta = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow -g\sin\theta = l\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

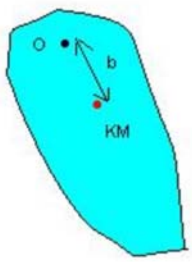
Αν η γωνία απόκλισης θ από τη θέση ισορροπίας είναι μικρή, τότε: $\sin\theta \simeq \theta$, οπότε η ταλάντωση του εκκρεμούς περιγράφεται από την εξίσωση: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$

Η λύση μπορεί να γραφεί στη μορφή: $\theta(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \phi\right)$

Η περίοδος του απλού μαθηματικού εκκρεμούς είναι ίση με: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Φυσικό εκκρεμές

Αν οι διαστάσεις της μάζας m που ταλαντώνεται γύρω από ένα σημείο Ο δεν μπορούν να αγνοηθούν, τότε το εκκρεμές καλείται φυσικό.



Αν b η απόσταση του κέντρου μάζας (Κ.Μ.) από τον άξονα περιστροφής Ο και I η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής, τότε:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow -mgb\sin\theta = I\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I}\sin\theta = 0$$

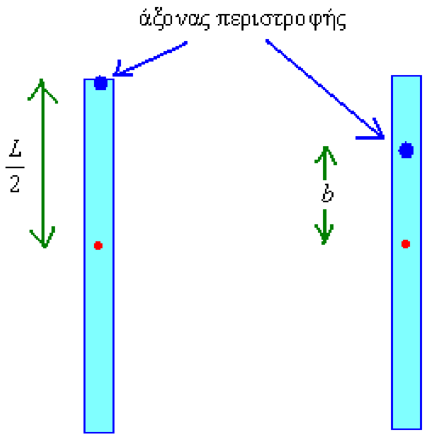
Αν η γωνία απόκλισης θ από τη θέση ισορροπίας είναι μικρή, τότε: $\sin\theta \simeq \theta$, οπότε η ταλάντωση του φυσικού εκκρεμούς περιγράφεται από την εξίσωση Α.Α.Τ.: $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I}\theta = 0$ με λύση $\theta(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{mgb}{I}}t + \phi\right)$

Η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση: $\omega = \sqrt{\frac{mgb}{I}}$ και

άρα η περίοδος ισούται με $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}$.

<u>Άσκηση 2</u>

Βρείτε την περίοδο ταλάντωσης ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους L γύρω από άξονα α) που διέρχεται από το ένα άκρο της και β) που απέχει b από το κέντρο της. Δίνεται η ροπή της αδρανείας ως προς άξονα που διέρχεται κάθετα από το Κ.Μ. της ως: $I_c = ML^2/12$.



<u>Λύση</u>

α) $I = I_c + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$

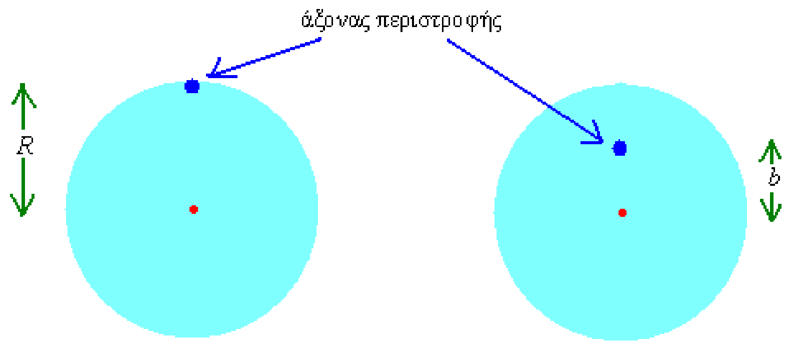
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mg\left(\frac{L}{2}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg\left(\frac{L}{2}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{L}{g}}$$

β) $I = I_c + Mb^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Mb^2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}ML^2 + Mb^2}{Mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{L^2 + 12b^2}{12gb}} = \pi\sqrt{\frac{L^2 + 12b^2}{3gb}}$$

<u>Άσκηση 3</u>

Βρείτε την περίοδο ταλάντωσης ομογενούς δίσκου μάζας M και ακτίνας R γύρω από άξονα α) που διέρχεται κάθετα από ένα σημείο της περιφέρειάς του και β) που απέχει b από το κέντρο του. Δίνεται η ροπή της αδρανείας ως προς άξονα που διέρχεται κάθετα από το Κ.Μ. του ως: $I_c = MR^2/2$.



<u>Λύση</u>

α) $I = I_c + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}}$$

β) $I = I_c + Mb^2 = \frac{1}{2}MR^2 + Mb^2$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}MR^2 + Mb^2}{Mgb}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + 2b^2}{2gb}}$$

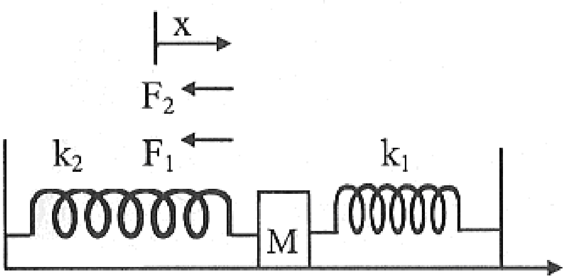
<u>Άσκηση 4</u>

Μια μάζα M είναι συνδεδεμένη με δυο ελατήρια σταθερών k_1 και k_2, αντίστοιχα, και κινείται στο οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Στη θέση ισορροπίας τα δυο ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος. Να υπολογιστούν: α) η κυκλική συχνότητα και η περίοδος ταλάντωσης της μάζας αν αυτή απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας και αφεθεί ελεύθερη β) η θέση της και η ταχύτητά της ως συναρτήσεις του χρόνου αν αρχικά $x(0) = -A$ και $u(0) = 0$ γ) η νέα κυκλική συχνότητα ταλάντωσης ω' και το πλάτος ταλάντωσης A' αν τη στιγμή που η μάζα περνά από τη θέση ισορροπίας της πέσει κατακόρυφα πάνω της και συσσωματωθεί σε αυτή μάζα m.

<u>Λύση</u>

α) Έστω τυχούσα χρονική στιγμή στην οποία η μάζα βρίσκεται δεξιά της θέσης ισορροπίας της, οπότε το δεξί ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά x, ενώ το αριστερό επιμηκυμένο κατά x. Ο 2[ος] Νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -k_1x - k_2x = M\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{k_1 + k_2}{M}}_{\omega^2}x = 0 \quad (1)$$



Η μάζα εκτελεί Α.Α.Τ. με κυκλική συχνότητα: $\boxed{\omega=\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{M}}}$ (2)

Η περίοδος ταλάντωσης είναι: $T=\dfrac{2\pi}{\omega}\Rightarrow \boxed{T=2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k_1+k_2}}}$ (3)

β) Η γενική λύση της (1) είναι: $x(t)=B\sin(\omega t+\phi)\Rightarrow u(t)=\dot{x}=B\omega\cos(\omega t+\phi)$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε:

$x(0)=-A\Rightarrow B\sin\phi=-A$ και $B\omega\cos\phi=0\Rightarrow \cos\phi=0\Rightarrow \phi=\pi/2$

Άρα: $B=-A$ κι έτσι:

$x(t)=-A\sin\left(\omega t+\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \boxed{x(t)=-A\cos\left(\omega t\right)}$ και

$u(t)=\dfrac{dx}{dt}\Rightarrow \boxed{u(t)=A\omega\sin(\omega t)}$

γ) Από το (α) ερώτημα συμπεραίνουμε ότι μετά την πλαστική κρούση, επειδή θα αλλάξει η μάζα από M σε $M+m$, η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης και η περίοδος θα είναι αντίστοιχα:

$\boxed{\omega'=\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{M+m}}}$ (4) και $T'=\dfrac{2\pi}{\omega'}\Rightarrow \boxed{T'=2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k_1+k_2}}}$ (5)

Η μάζα M περνά από τη θέση ισορροπίας $x=0$ όταν $\omega t=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2\omega}=T/4$ οπότε κι έχει ταχύτητα: $u(T/4)=A\omega\sin(\pi/2)=A\omega=u_{\max}$.

Επειδή η m δεν έχει οριζόντια ταχύτητα κατά την πλαστική κρούση, η Α.Δ.Ο. στην διεύθυνση κίνησης δίνει:

$p_{x,\alpha\rho\chi}=p_{x,\tau\varepsilon\lambda}\Rightarrow Mu_{\max}+m\cdot 0=\left(M+m\right)u'_{\max}\Rightarrow M\cdot\left(A\omega\right)=\left(M+m\right)A'\omega'$

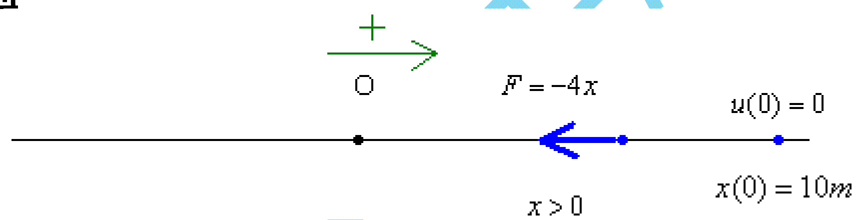
$$A' = \frac{MA\omega}{(M+m)\omega'} \overset{(2)}{\underset{(4)}{\Rightarrow}} A' = \frac{MA}{(M+m)} \frac{\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{M}}}{\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{M+m}}} \Rightarrow A' = \frac{MA}{(M+m)}\sqrt{\frac{M+m}{M}} \Rightarrow$$

$$\boxed{A' = A\sqrt{\frac{M}{M+m}}}$$

Άσκηση 5

Σωματίδιο μάζας $m = 1kg$ κινείται πάνω στον άξονα x και έλκεται από την αρχή Ο με μια δύναμη μέτρου $F = 4x$ (Nt). Αν αρχικά $x(0) = 10m$ και $u(0) = 0$, να γράψετε την διαφορική εξίσωση κινήσεως, να προσδιορίσετε την περίοδο ταλάντωσης και να υπολογίσετε τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου.

Λύση



α) Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -4x = \ddot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 4x = 0}\ (1)$$

Άρα το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με κυκλική συχνότητα $\omega = \sqrt{4} = 2rad/s$ και περίοδο:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = \pi \sec}$$

β) Η γενική λύση της (1) μπορεί να γραφεί ως:

$$x = A\sin(2t+\phi) \overset{d/dt}{\Rightarrow} u = 2A\cos(2t+\phi)$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε:

$$x = A\sin(2t+\phi) \overset{t=0}{\Rightarrow} 10 = A\sin\phi$$

και

EMC²

$$u = 2A\cos(2t+\phi) \overset{t=0}{\Rightarrow} 0 = 2A\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \pi/2$$

Άρα, $10 = A\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow A = 10$

Έτσι: $x = 10\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{x(t) = 10\cos 2t \ \ (\mathrm{m})}$

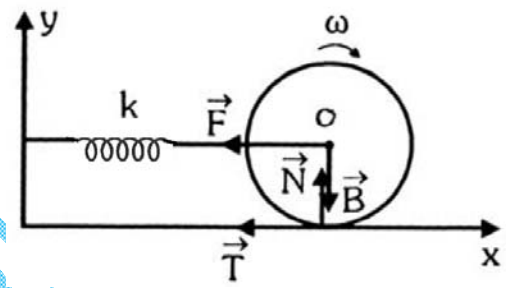
Με παραγώγιση: $\boxed{u(t) = -20\sin 2t \ \ (\mathrm{m/s})}$

<u>Άσκηση 6</u>

Κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R στηρίζεται σε οριζόντια επιφάνεια με ελατήριο σταθεράς k, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει να βρεθεί η κυκλική συχνότητα και η περίοδος ταλάντωσης που εκτελεί το Κ.Μ. του. Δίνεται: $I_O = MR^2/2$.

<u>Λύση</u>

Θεωρούμε τυχούσα θέση του κυλίνδρου στην οποία το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά x. Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση.



Για την μεταφορική κίνηση του Κ.Μ. ο 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = M\vec{a} \Rightarrow -kx - T = M\ddot{x} \ \ (1)$$

Ο Θεμελιώδης Νόμος της Περιστροφικής Κίνησης δίνει:

$$\Sigma\vec{\tau} = I_O\dot{\vec{\Omega}} \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2\dot{\Omega} \ \ (2)$$

όπου συμβολίσαμε με $\vec{\Omega}$ τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του κυλίνδρου για να τη διακρίνουμε από την κυκλική συχνότητα ω ταλάντωσης.

Η συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση δίνει:

$$u_c = \Omega R \Rightarrow \dot{x} = \Omega R \Rightarrow \ddot{x} = \dot{\Omega} R \Rightarrow \dot{\Omega} = \frac{\ddot{x}}{R} \quad (3)$$

Έτσι: $(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} TR = \frac{1}{2} M R^2 \frac{\ddot{x}}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2} M \ddot{x} \quad (4)$

και $(1) \overset{(4)}{\Rightarrow} -kx - \frac{1}{2} M\ddot{x} = M\ddot{x} \Rightarrow \frac{3}{2} M\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{2k}{3M} x = 0}$

που είναι εξίσωση Α.Α.Τ. με κυκλική συχνότητα: $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}}}$

και άρα περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{3M}{2k}}}$