ΦΥΣΙΚΗ ΙΙ
ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ……….........……...………..………………………. 3

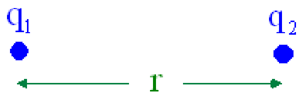
2. ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ.........................……………………………………………………………………. 32

3. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ.........................…………………….. 50

4. ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ.................................………..………..……………………………………....... 63

1. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

◈ Δύναμη Coulomb:



$$\boxed{\vec{F} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}} \qquad \left(K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)$$

Η ηλεκτροστατική δύναμη δυο φορτίων διευθύνεται πάντα στην ευθεία που ενώνει τα φορτία. Αν τα q_1, q_2 είναι ομόσημα η δύναμη είναι απωστική, ενώ αν τα q_1, q_2 είναι ετερόσημα, η δύναμη είναι ελκτική.

◈ **Ηλεκτροστατικό πεδίο:** Είναι ο χώρος στον οποίο αν βρεθεί ένα φορτίο Q, θα του ασκηθεί δύναμη:

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

όπου $\vec{E}$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

Για ένα σημειακό φορτίο q, είναι:

$$\vec{E} = K\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

◈ **Ηλεκτρική ροή:** Περιγράφει τον αριθμό των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών που διαπερνούν μια επιφάνεια S και δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S E\cos\theta dS$$

όπου $d\vec{S}$ το κάθετο διάνυσμα σε κάθε στοιχειώδη επιφάνεια και θ η γωνία που σχηματίζει με την $\vec{E}$. (Μονάδες: $\frac{Nt}{Cb}\cdot m^2$)

◈ **Νόμος Gauss:** Η ηλεκτρική ροή που διαπερνά **οποιαδήποτε** κλειστή επιφάνεια ισούται με το περικλειόμενο φορτίο της επιφάνειας προς τη διηλεκτρική σταθερά του κενού.

Δηλαδή:

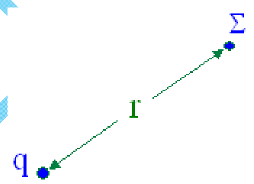
$$\Phi_{E_{\text{κλειστής επιφάνειας}}} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_o}$$

◈ **<u>Ηλεκτρικό δυναμικό V</u>** (Volt): Αποτελεί το αντίστοιχο μέγεθος της δυναμικής ενέργειας που είδαμε στη Μηχανική. Δηλαδή είναι το βαθμωτό μέγεθος το οποίο περιγράφει το ηλεκτροστατικό πεδίο, που χαρακτηρίζεται επίσης σε κάθε σημείο του από την ένταση $\vec{E}$.

Η χρησιμότητα του είναι η χρησιμοποίηση βαθμωτού μεγέθους (V) αντί διανυσματικού $\left(\vec{E}\right)$ σε προβλήματα ηλεκτροστατικής, όπως αντίστοιχα στη Μηχανική χρησιμοποιήσαμε τη δυναμική ενέργεια V αντί των δυνάμεων $\vec{F}$.

◈ Για ένα σημειακό φορτίο q είναι:

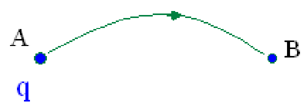
$$\boxed{V = K\frac{q}{r}}$$



Για σύστημα σημειακών φορτίων το δυναμικό σε ένα σημείο του χώρου υπολογίζεται ως το αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών κάθε σημείου.

◈ **<u>Έργο μετακίνησης φορτίου σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο:</u>**

Για την μετακίνηση ενός φορτίου q από το σημείο Α στο σημείο Β ενός ηλεκτροστατικού πεδίου το έργο είναι:



$$\boxed{W_{A\to B} = q\left(V_A - V_B\right)}$$

όπου V_A, V_B το ηλεκτρικό δυναμικό των σημείων Α και Β αντίστοιχα.

◈ **<u>Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια</u>** $U(\text{Joule})$:

Ένα φορτίο q βρισκόμενο σε ένα σημείο Σ ηλεκτροστατικού πεδίου έχει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια:

$$\boxed{U = qV_\Sigma}$$

όπου V_Σ το δυναμικό του σημείου Σ (που προφανώς θα οφείλεται σε άλλα φορτία του γύρω χώρου).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα ηλεκτρόνιο εκτοξεύεται κατά μήκος του άξονα που περνά από το μέσο οριζοντίων πλακιδίων μήκους $d = 4cm$ με αρχική ταχύτητα $\upsilon_o = 8 \cdot 10^6\ m/sec$. Ανάμεσα από τα πλακίδια υπάρχει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με ένταση $E = 6 \cdot 10^3 N/Cb$ με κατεύθυνση προς τα πάνω, όπως δείχνει το σχήμα.

α. Να βρεθεί η κατακόρυφη απομάκρυνση του ηλεκτρονίου από τον άξονα εκτόξευσης όταν φτάσει στο τέλος των πλακιδίων.

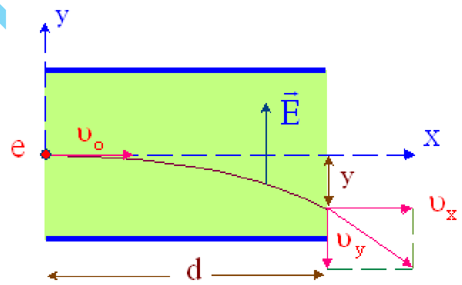
β. Ποια είναι η ταχύτητα του όταν φτάσει στο τέλος των πλακιδίων;

Λύση:

α. Η δύναμη που θα ασκηθεί στο ηλεκτρόνιο είναι:

$$\vec{F} = q\vec{E} = -eE\vec{j}$$

όπου $-e$ το φορτίο του ηλεκτρονίου $\left(e = 1,6 \cdot 10^{-19} Cb\right)$. Άρα σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton είναι:



$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$-eE\vec{j} = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{\alpha} = -\frac{eE}{m}\vec{j}$$

όπου το βάρος αμελείται και m η μάζα του ηλεκτρονίου $\left(m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} kg\right)$. Δηλαδή στον άξονα x η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή $\left(\alpha_x = 0\right)$, ενώ στον άξονα y είναι ομαλά επιβραδυνόμενη $\left(\alpha_y < 0\right)$. Άρα το ηλεκτρόνιο εκτελεί οριζόντια βολή με αρχική ταχύτητα υ_o και επιτάχυνση $\vec{\alpha} = -e\frac{E}{m}\vec{j}$. Από τους τύπους της οριζόντιας βολής παίρνουμε:

$$x = \upsilon_o t \quad (1) \qquad \text{και} \qquad y = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (2)$$

Άρα για $x = d$ η (1) δίνει το χρόνο κίνησης του ηλεκτρονίου κατά μήκος των πλακών ως:

$$d = \upsilon_o t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{\upsilon_o}$$

και αντικαθιστώντας στην (2) προκύπτει:

$$y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{d^2}{\upsilon_o{}^2} = \frac{1,6\cdot10^{-19}\cdot6\cdot10^3\cdot0,04^2}{2\cdot3,1\cdot10^{-31}\cdot8^2\cdot10^{12}} \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{y = 1,32\,m}$$

β. Οι συνιστώσες της ταχύτητας στην οριζόντια βολή είναι:

$$\upsilon_x = \upsilon_o \quad \text{και} \quad \upsilon_y = \alpha t$$

οπότε για $t = d/\upsilon_o$ είναι:

$$\boxed{\upsilon_x = \upsilon_o = 8\cdot10^6\, m/sec}$$

και

$$\upsilon_y = \frac{eE}{m}\frac{d}{\upsilon_o} = \frac{1,6\cdot10^{-19}\cdot6\cdot10^3\cdot4\cdot10^{-2}}{3\cdot10^{-31}\cdot8\cdot10^6} = \frac{38,4\cdot10^{-18}}{24\cdot10^{-25}} = 1,6\cdot10^7\, m/sec$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_y = 16\cdot10^6\, m/sec}$$

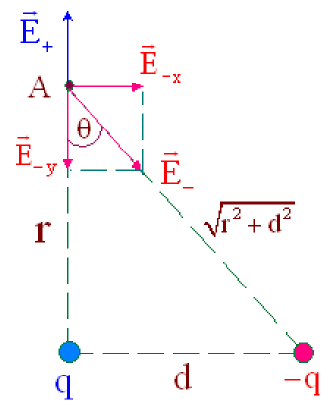
ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα ηλεκτρικό δίπολο έχει φορτία q και $-q$ σε σταθερή απόσταση d. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και το δυναμικό στο σημείο Α που απέχει από το φορτίο q απόσταση $r = \sqrt{3}d$.

Λύση:

Μέτρα:

$$E_+ = K\frac{q}{r^2} \quad (1) \qquad \text{και} \qquad E_- = K\frac{q}{r^2+d^2} \quad (2)$$



Αναλύοντας την $\vec{E}_-$ παίρνουμε τις συνιστώσες:

$$E_{-x} = E_-\sin\theta \overset{(2)}{=} K\frac{q}{r^2+d^2}\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}} \quad\Rightarrow$$

$$E_{-x} = K\frac{qd}{\left(r^2+d^2\right)^{3/2}} \overset{r=\sqrt{3}d}{=} K\frac{qd}{8d^3} = \frac{Kq}{8d^2}$$

και

$$E_{-y} = E_-\cos\theta \overset{(2)}{=} K\frac{q}{r^2+d^2}\frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}} \quad\Rightarrow$$

$$E_{-y} = K\frac{qr}{\left(r^2+d^2\right)^{3/2}} = \frac{Kq\sqrt{3}}{8d^2}$$

Άρα η ολική ένταση στο σημείο Α είναι:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = K\frac{q}{3d^2}\hat{y} + K\frac{q}{8d^2}\hat{x} - K\frac{q\sqrt{3}}{8d^2}\hat{y} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{E}_A = \frac{Kq}{d^2}\left[\frac{1}{8}\hat{x} + \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)\hat{y}\right]$$

Το δυναμικό στο σημείο Α είναι:

$$V_A = V_+ + V_- = K\frac{q}{r} + K\frac{(-q)}{\sqrt{r^2+d^2}} = K\frac{q}{\sqrt{3}d} - K\frac{q}{\sqrt{3d^2+d^2}} = K\frac{q}{\sqrt{3}d} - K\frac{q}{2d}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{V_A = \frac{Kq}{d}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\right)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

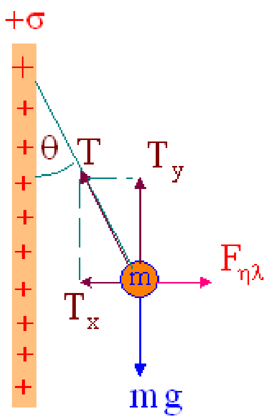
Μικρή σφαίρα μάζας $m = 0,4gr$ φέρνει ηλεκτρικό φορτίο $q = 3\cdot10^{-10}Cb$ και είναι δεμένη στο άκρο αβαρούς μονωτικού νήματος με μήκος $L = 8cm$. Το άλλο άκρο του νήματος στηρίζεται σε μεγάλο κατακόρυφο επίπεδο φύλλο μονωτικού υλικού, που φέρνει επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου $\sigma = 25\cdot10^{-6}C/m^2$. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το νήμα με το κατακόρυφο φύλλο όταν η σφαίρα ισορροπεί.

Λύση:

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη σφαίρα είναι το βάρος της mg, η τάση του νήματος Τ, που αναλύεται στις κάθετες συνιστώσες:

$$T_x = T\sin\theta \quad \text{και} \quad T_y = T\cos\theta$$

και η ηλεκτρική δύναμη $F_{\eta\lambda}$ λόγω του ηλεκτρικού πεδίου Ε που δημιουργεί το άπειρο φορτισμένο φύλλο.



Η συνθήκη ισορροπίας της σφαίρας δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow T_x = F_{\eta\lambda} \Rightarrow T\sin\theta = qE & (1) \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y = mg \Rightarrow T\cos\theta = mg & (2) \end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{qE}{mg} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta=\frac{qE}{mg}$$

όπου $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}$ το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί το φύλλο.

Άρα:

$$\tan\theta=\frac{q\sigma}{2\varepsilon_o mg}=\frac{3\cdot10^{-10}\cdot25\cdot10^{-6}}{2\cdot8{,}85\cdot10^{-12}\cdot4\cdot10^{-4}\cdot10} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta=0{,}106 \quad \Rightarrow$$

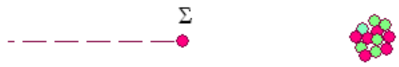
$$\theta=\tan^{-1}\left(0{,}106\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta=6{,}05^{o}}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4</u>

Ένα πρωτόνιο βάλλεται από άπειρη απόσταση, με ταχύτητα μέτρου $\upsilon=400\,\mathrm{m/sec}$, προς ακίνητο πυρήνα άνθρακα (που αποτελείται από 6 πρωτόνια και 6 νετρόνια) και διεύθυνση προς το κέντρο του πυρήνα. Να υπολογιστεί η ελάχιστη απόσταση από τον πυρήνα στην οποία θα φτάσει το πρωτόνιο. Υποθέστε ότι ο πυρήνας παραμένει ακίνητος σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου και ότι έχει αμελητέες διαστάσεις.

<u>Λύση:</u> Το φορτίο του πυρήνα του άνθρακα είναι $Q=6e$, όπου e το φορτίο του ηλεκτρονίου.



Στο πλησιέστερο σημείο Σ προς τον πυρήνα στο οποίο φτάνει το πρωτόνιο, η ταχύτητα του μηδενίζεται. Επομένως εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας για το πρωτόνιο από το άπειρο μέχρι το πλησιέστερο σημείο Σ προκύπτει:

Θ.Ε.Κ.Ε.: $$W_{\infty\to\Sigma}=K_\Sigma-K_\infty$$

όπου:

$$K_\Sigma=0, \quad K_\infty=\frac{1}{2}m_p\upsilon^2 \quad \text{και} \quad W_{\infty\to\Sigma}=q_p\left(V_\infty-V_\Sigma\right)=e\left(0-V_\Sigma\right)=-eV_\Sigma$$

όπου m_p η μάζα του πρωτονίου και $q_p = +e$ το φορτίο του, ενώ το δυναμικό που δημιουργεί ο πυρήνας στο σημείο Σ, αν r είναι η απόσταση πυρήνα – σημείου Σ είναι:

$$V_\Sigma = K\frac{Q}{r} = K\frac{6e}{r}$$

Δηλαδή:

$$W_{\infty\to\Sigma} = -K\frac{6e^2}{r}$$

Άρα η (1) σύμφωνα με τα προηγούμενα δίνει:

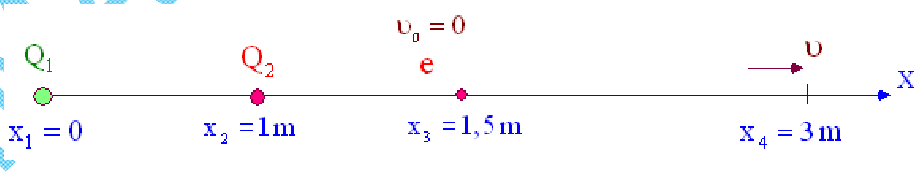
$$-K\frac{6e^2}{r} = -\frac{1}{2}m_p\upsilon^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{r = \frac{12Ke^2}{m_p\upsilon^2} = \ldots = 10{,}8\cdot 10^{-6}\,m}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δυο σημειακά ηλεκτρικά φορτία $Q_1 = 2{,}4\cdot 10^{-10}\,Cb$ και $Q_2 = -1.2\cdot 10^{-10}\,Cb$ αντίστοιχα στερεώνονται στον άξονα x. Το Q_1 τοποθετείται στην αρχή των αξόνων $(x_1 = 0)$ ενώ το Q_2 στη θέση με $x_2 = 1\,m$. Ένα ηλεκτρόνιο αφήνεται με μηδενική ταχύτητα στη θέση $x_3 = 1{,}5\,m$. Ποια η ταχύτητα του όταν βρεθεί στη θέση $x_4 = 3\,m$;

Αγνοείστε την επίδραση της βαρύτητας.

Λύση:



Σύμφωνα με το θεώρημα έργου – κινητικής ενέργειας, το έργο της μετακίνησης του ηλεκτρονίου από τη θέση x_3 στη θέση x_4 ισούται με τη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας. Δηλαδή:

$$W_{x_3\to x_4} = \Delta K = K_{(x_4)} - K_{(x_3)} = \frac{1}{2}m_e\upsilon^2 - 0 \quad\Rightarrow W_{x_3\to x_4} = \frac{1}{2}m_e\upsilon^2 \quad (1)$$

Αλλά:

$$W_{x_3\to x_4} = q_e\left(V_{(x_3)} - V_{(x_4)}\right) \quad \Rightarrow$$

$$W_{x_3\to x_4} = -e\left(K\frac{Q_1}{x_3} + K\frac{Q_2}{x_3 - x_2} - K\frac{Q_1}{x_4} - K\frac{Q_2}{x_4 - x_2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$W_{x_3\to x_4} = -Ke\left(\frac{Q_1}{x_3} + \frac{Q_2}{x_3 - x_2} - \frac{Q_1}{x_4} - \frac{Q_2}{x_4 - x_2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$W_{x_3\to x_4} = -9\cdot 10^9\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\left(\frac{2,4\cdot 10^{-10}}{1,5} + \frac{-1,2\cdot 10^{-10}}{0,5} - \frac{2,4\cdot 10^{-10}}{3} - \frac{-1,2\cdot 10^{-10}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$W_{x_3\to x_4} = -14,4\cdot 10^{-10}\left(1,6\cdot 10^{-10} - 2,4\cdot 10^{-10} - 0,8\cdot 10^{-10} + 0,6\cdot 10^{-10}\right) \quad \Rightarrow$$

$$W_{x_3\to x_4} = -14,4\cdot 10^{-10}\left(-1\cdot 10^{-10}\right) \quad \Rightarrow \quad W_{x_3\to x_4} = 14,4\cdot 10^{-20}\,\text{Joule} \quad (2)$$

Άρα η (1) λόγω της (2) δίνει:

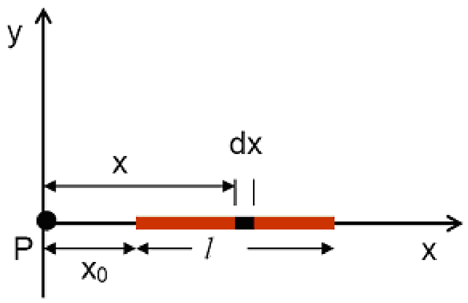
$$14,4\cdot 10^{-20} = \frac{1}{2}9,1\cdot 10^{-31}\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon^2 = \frac{28,8\cdot 10^{-20}}{9,1\cdot 10^{-31}} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = 3,16\cdot 10^{11} = 31,6\cdot 10^{10} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \sqrt{31,6\cdot 10^{10}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = 5,62\cdot 10^5\,{}^{m}\!/_{sec}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Μια μονωτική ράβδος μήκους l φέρει ομογενώς κατανεμημένο θετικό φορτίο Q και βρίσκεται στον x-άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα x και σε απόσταση x_0 από το άκρο της. Εξετάστε την περίπτωση $x_0 \gg l$.



Λύση

Εφόσον η ράβδος είναι ομογενώς φορτισμένη η γραμμική της πυκνότητα είναι σταθερή και ίση με $\lambda = Q/l > 0$. Χωρίζουμε τη ράβδο σε στοιχειώδη τμήματα dx φορτίου $dq = \lambda dx > 0$. Η ένταση του πεδίου στο σημείο P θα υπολογιστεί λαμβάνοντας τη συνολική συνεισφορά όλων των στοιχειωδών εντάσεων $d\vec{E}$ των στοιχειωδών φορτίων dq:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r} \underset{\hat{r}=-\hat{i}}{\overset{r=x}{\Rightarrow}} d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{x^2}\left(-\hat{i}\right)$$

όπου λάβαμε υπόψη μας ότι η φορά του ηλεκτρικού πεδίου είναι προς την αρνητική x διεύθυνση μιας και η ράβδος είναι θετικά φορτισμένη.

Με ολοκλήρωση σε όλο το μήκος της ράβδου παίρνουμε:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_{x_0}^{x_0+l}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\right]\hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x}\right]_{x_0}^{x_0+l}\hat{i} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x_0+l} - \frac{1}{x_0}\right)\hat{i} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x_0 - x_0 - l}{x_0\left(x_0+l\right)}\right)\hat{i} = -\frac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 x_0\left(x_0+l\right)}\hat{i} \overset{Q=\lambda l}{\Rightarrow} \boxed{\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x_0\left(x_0+l\right)}\hat{i}}$$

Στο όριο $x_0 \gg l$ παίρνουμε: $\boxed{\vec{E} \approx -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x_0^2}\hat{i}}$

δηλαδή καταλήγουμε στην ένταση ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται σε σημειακό φορτίο σε απόσταση x_0 από το σημείο P. Αυτό είναι απόλυτα λογικό, αφού σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη ράβδο, οι διαστάσεις της τελευταίας δεν παίζουν σημαντικό ρόλο και συμπεριφέρεται προσεγγιστικά ως σημειακό φορτίο.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Θεωρούμε λεπτό ευθύγραμμο σύρμα μήκους L στον θετικό x-ημιάξονα που είναι ομοιόμορφα φορτισμένο με γραμμική πυκνότητα λ. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}(y)$ στην τυχούσα θέση y του άξονα y.

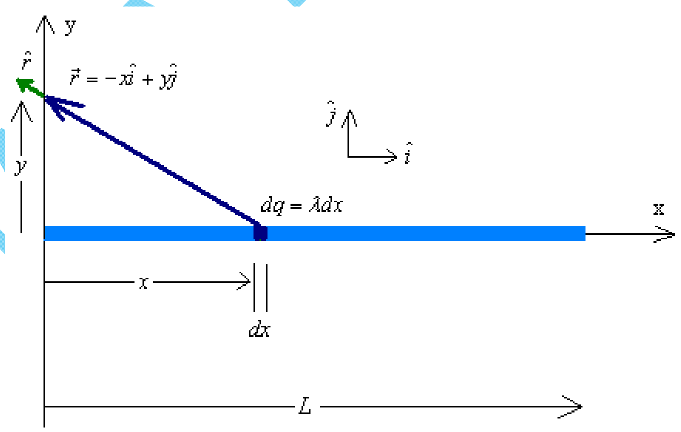
Λύση

Το σύρμα είναι ομογενώς φορτισμένο με γραμμική πυκνότητα $\lambda(x) = \lambda = \sigma\tau\alpha\theta$. Έτσι, κάθε στοιχειώδες τμήμα του μήκους dx είναι φορτισμένο με φορτίο: $dq = \lambda dx$.

Επιθυμούμε να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και το δυναμικό σε ένα τυχόν σημείο $P(0, y, 0)$ του άξονα y. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να υπολογίσουμε τις επιμέρους στοιχειώδεις συνεισφορές από κάθε τμήμα dx του σύρματος και να ολοκληρώσουμε σε όλο το μήκος του.

Το $P(0, y, 0)$ έχει διάνυσμα θέσης ως προς το τμήμα dx που βρίσκεται στη θέση $(x, 0, 0)$:

$$\vec{r} = (0, y, 0) - (x, 0, 0) = (-x, y, 0) = -x\hat{i} + y\hat{j}\text{, οπότε } r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Γράφουμε τη συνεισφορά του στοιχειώδους τμήματος dx με φορτίο dq στην ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P και ολοκληρώνουμε σε όλο το μήκος του σύρματος:

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\hat{r} = k\frac{dq}{r^3}\vec{r} \Rightarrow d\vec{E} = k\frac{\lambda dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\left(-x\hat{i}+y\hat{j}\right) \Rightarrow \vec{E} = k\int_0^L \frac{\lambda(x)\left(-x\hat{i}+y\hat{j}\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}dx \Rightarrow$$

$$\vec{E} = k\lambda\left[\int_0^L \frac{-xdx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\hat{i} + y\int_0^L \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\hat{j}\right] \quad (1)$$

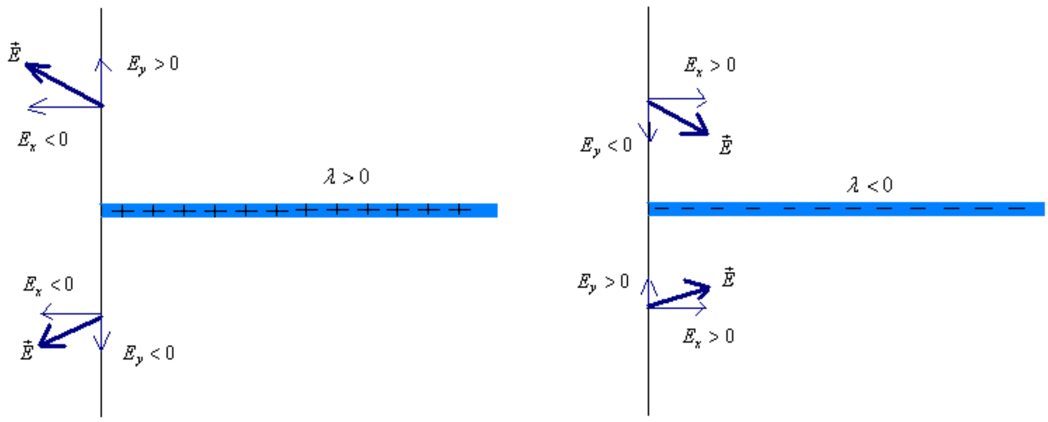
Για να υπολογίσουμε την ένταση χρειαζόμαστε τα εξής ολοκληρώματα (τα αόριστα ολοκληρώματα λαμβάνονται από πίνακες ολοκληρωμάτων):

$$\int_0^L \frac{-xdx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_0^L = \frac{1}{\sqrt{L^2+y^2}} - \frac{1}{|y|} \quad (2)$$

$$\int_0^L \frac{dx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \left[\frac{x}{y^2\sqrt{y^2+x^2}}\right]_0^L = \frac{L}{y^2\sqrt{L^2+y^2}} \quad (3)$$

Έτσι: $(1)\overset{(2)}{\underset{(3)}{\Rightarrow}}$ $\vec{E} = k\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{L^2+y^2}} - \frac{1}{|y|}\right)\hat{i} + k\lambda\frac{L}{y\sqrt{y^2+L^2}}\hat{j}$ (4)

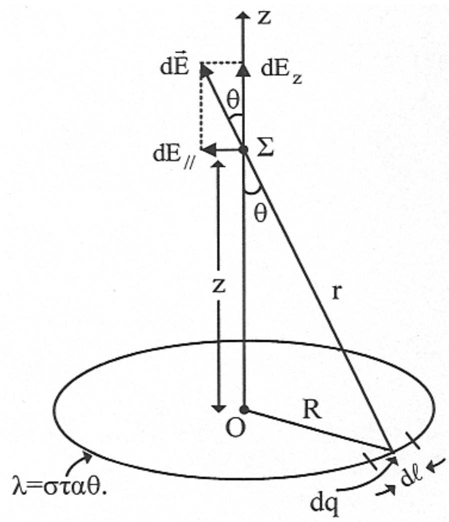
που δηλώνει ότι η ένταση έχει x-συνιστώσα που δείχνει προς τα αρνητικά x αν $\lambda > 0$ ή προς τα θετικά x αν $\lambda < 0$, ανεξάρτητα από το πρόσημο του y, που είναι λογικό μιας και το σύρμα βρίσκεται στον θετικό x-ημιάξονα. Αντίθετα, η y-συνιστώσα εξαρτάται από το πρόσημο του y, π.χ. είναι προς τα πάνω για $y > 0$ και προς τα κάτω για $y < 0$, εφόσον $\lambda > 0$ (ή ακριβώς αντίθετα στην περίπτωση $\lambda < 0$).



ΑΣΚΗΣΗ 8

Θεωρούμε λεπτό κυκλικό δακτύλιο με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα R που είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με γραμμική πυκνότητα λ. Να βρεθεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}(z)$ στο τυχόν σημείο Σ που βρίσκεται στον άξονα z σε απόσταση z από το Ο. Εξετάστε τί συμβαίνει για $z \gg R$.

Λύση



Χωρίζουμε το δακτύλιο σε στοιχειώδη τμήματα $d\ell$ που αντιστοιχούν σε φορτίο $dq = \lambda d\ell$. Ένα τέτοιο στοιχειώδες τμήμα του δακτυλίου δημιουργεί στο σημείο Σ ένταση μέτρου:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\ell}{r^2}$$

Λόγω συμμετρίας οι παράλληλες προς το επίπεδο του δίσκου συνιστώσες της έντασης $d\vec{E}$ αλληλοεξουδετερώνονται, οπότε η ένταση στο σημείο Σ είναι στη z-διεύθυνση κι έχει μέτρο $E = E_z = \int dE_z$, όπου:

$$dE_z = dE\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cos\theta\frac{\lambda d\ell}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r}\frac{\lambda d\ell}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z d\ell}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Άρα: $E = \int dE_z = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\oint d\ell = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z2\pi R}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}} \Rightarrow$

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\hat{k}$$

Στο όριο μεγάλων z, δηλ. για $z \gg R$, παίρνουμε:

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}\hat{k} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{z^3\left[1+\left(\frac{R}{z}\right)^2\right]^{3/2}}\hat{k} \approx \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{1}{z^2}\hat{k} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{z^2}\hat{k}$$

που είναι το πεδίο που οφείλεται σε σημειακό φορτίο ίσο με το συνολικό φορτίο του δακτυλίου $Q = \lambda 2\pi R$. Αυτό είναι λογικό, αφού σε μεγάλες αποστάσεις z οι διαστάσεις του δακτυλίου δεν παίζουν ρόλο και πρακτικά ο δακτύλιος συμπεριφέρεται ως σημειακό φορτίο.

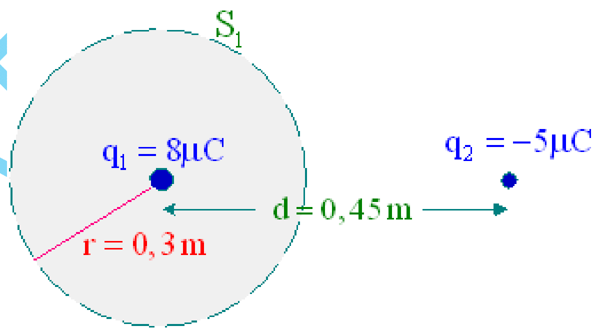
<u>ΑΣΚΗΣΗ 9</u>

Δυο φορτία $8\mu C$ και $-5\mu C$ βρίσκονται σε απόσταση (σταθερή) $d = 0,45\,m$. Θεωρείστε σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το φορτίο $8\mu C$ και ακτίνα r. Ποια είναι η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια; αν:

α. $r = 0,3\,m$ β. $r = 0,5\,m$

<u>Λύση:</u>

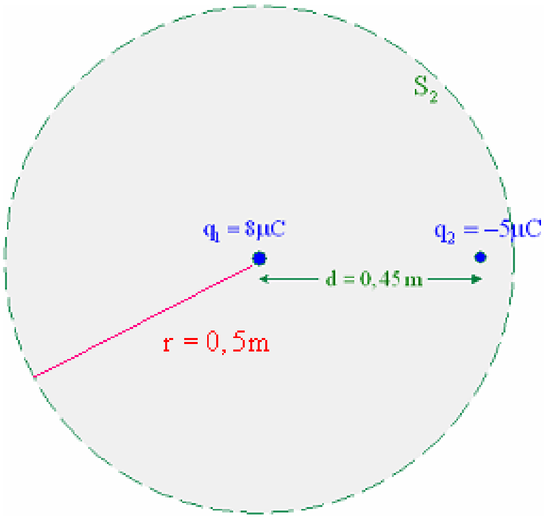
α.



Σύμφωνα με το νόμο Gauss είναι:

$$\Phi_{S_1} = \frac{q_{enc\ell}}{\varepsilon_o} = \frac{q_1}{\varepsilon_o} = \frac{8\cdot 10^{-6}\,C}{8,85\cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{N\cdot m^2}} = 0,9\cdot 10^6\,\frac{N}{C}\cdot m^2$$

β.



Είναι:

$$\Phi_{S_2} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_o} = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow$$

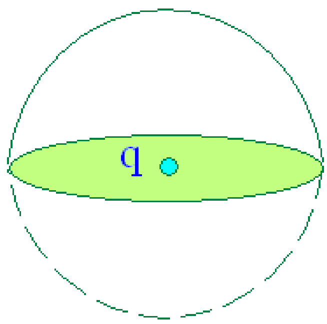
$$\Phi_{S_2} = \frac{8\cdot 10^{-6} - 5\cdot 10^{-6}\,Cb}{8,85\cdot 10^{-12}\,Cb^2 / N\cdot m^2} = \frac{3\cdot 10^{6}}{8,85}\frac{Nt}{Cb}\cdot m^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_{S_2} = 0,34\cdot 10^{6}\,\frac{Nt}{Cb}\cdot m^2}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 10</u>

Θεωρείστε μια ημισφαιρική επιφάνεια ακτίνας R στο κέντρο της οποίας τοποθετείται ένα φορτίο q. Να υπολογιστεί η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την ημισφαιρική αυτή επιφάνεια.

<u>Λύση:</u>



Επειδή το σημειακό αυτό φορτίο δεν είναι περικλειόμενο στην επιφάνεια (αφού βρίσκεται πάνω σε αυτή) δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο νόμος του Gauss.

Για το λόγο αυτό θεωρούμε ολόκληρη την κλειστή επιφάνεια της σφαίρας και ο νόμος του Gauss δίνει:

$$\Phi_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_o} = \frac{q}{\varepsilon_o} \quad (1)$$

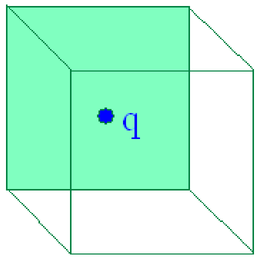
Λόγω συμμετρίας όμως η ίδια ροή θα περνά από κάθε ημισφαίριο οπότε:

$$\Phi_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = 2\Phi_{\eta\mu\iota\sigma\varphi.} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{q}{\varepsilon_o} = 2\Phi_{\eta\mu\iota\sigma\varphi.} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_{\eta\mu\iota\sigma\varphi.} = \frac{q}{2\varepsilon_o}}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 11</u>

Θεωρούμε ένα κύβο στο κέντρο του οποίου τοποθετείται ένα σημειακό φορτίο q. Υπολογίστε την ηλεκτρική ροή που διέρχεται από κάθε έδρα του κύβου.



<u>Λύση:</u>

Επειδή ο κύβος είναι κλειστή επιφάνεια ο νόμος Gauss δίνει:

$$\Phi_{\kappa\acute{\upsilon}\beta o\upsilon} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_o} = \frac{q}{\varepsilon_o} \quad (1)$$

Λόγω συμμετρίας όμως, επειδή το φορτίο βρίσκεται στο κέντρο του κύβου, η ίδια ροή θα διέρχεται από κάθε έδρα του κύβου (συνολικά έχει 6 έδρες). Οπότε:

$$\Phi_{\kappa\acute{\upsilon}\beta o\upsilon} = 6\Phi_{\acute{\varepsilon}\delta\rho\alpha\varsigma} \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{q}{\varepsilon_o} = 6\Phi_{\acute{\varepsilon}\delta\rho\alpha\varsigma} \Rightarrow$$

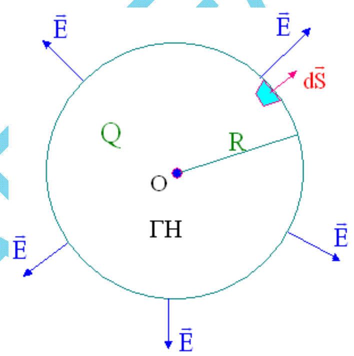
$$\boxed{\Phi_{\acute{\varepsilon}\delta\rho\alpha\varsigma} = \frac{q}{6\varepsilon_o}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Η ένταση του γήινου ηλεκτρικού πεδίου κοντά στην επιφάνεια της γης η οποία μπορεί να θεωρηθεί σφαιρική με ακτίνα $R = 3458\,km$ είναι περίπου $130\,Nt/Cb$ και διευθύνεται ακτινικά προς τα έξω. Πόσο είναι το φορτίο της γης υποθέτοντας ότι το ηλεκτρικό πεδίο προκαλείται από αυτό;

Λύση:

Θεωρώντας μια επιφάνεια Gauss με κέντρο το κέντρο της γης και ακτίνα ίση με αυτή της γης R, τότε η ένταση $\vec{E}$ είναι κάθετη σε κάθε σημείο της με διεύθυνση προς τα έξω και σταθερού μέτρου $130\,Nt/Cb$. Άρα η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια αυτή είναι:



$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \oint_S E\cancel{\cos 0}^{1}\, dS = \oint_S E dS \overset{E=\sigma\tau\alpha\theta.}{=} E\oint_S dS$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_E = E4\pi R^2 \quad (1)$$

Αλλά σύμφωνα με το νόμο του Gauss αν Q είναι το φορτίο της γης είναι:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad (2)$$

Επομένως οι (1), (2) δίνουν:

$$\frac{Q}{\varepsilon_o} = E4\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad Q = \varepsilon_o E4\pi R^2 \quad \Rightarrow$$

$$Q = 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 130\cdot 4\cdot 3{,}14\cdot 3458^2\cdot 10^6 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{Q = 172880\,Cb}$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

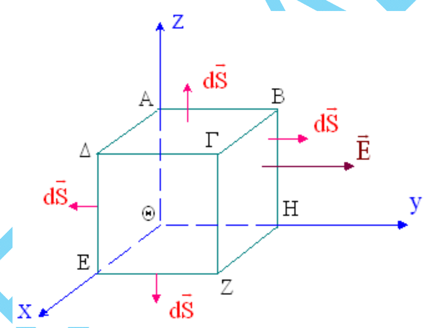
Κύβος πλευράς $\alpha = 0,3\,\mathrm{m}$ τοποθετείται σε ηλεκτρικό πεδίο με τη μια του πλευρά να εφάπτεται στο επίπεδο xz, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{E}(x,y,z) = 2y\vec{j}$$

όπου $\vec{j}$ το μοναδιαίο στον άξονα y, να υπολογιστεί η ηλεκτρική ροή που διαπερνά την επιφάνεια του κύβου. Επίσης να βρεθεί το φορτίο που περικλείεται στον κύβο.

Λύση: Η ηλεκτρική ροή του κύβου ισούται με το άθροισμα των ηλεκτρικών ροών κάθε έδρας του κύβου. Δηλαδή:

$$\Phi_{\text{κύβου}} = \Phi_{\text{ΑΔΕΘ}} + \Phi_{\text{ΕΔΓΖ}} + \Phi_{\text{ΓΖΗΒ}} + \Phi_{\text{ΗΒΑΘ}} + \Phi_{\text{ΑΒΓΔ}} + \Phi_{\text{ΘΕΖΗ}} \quad (1)$$



Επειδή όμως η $\vec{E}$ είναι παράλληλη στον άξονα y στις έδρες ΕΔΓΖ, ΗΒΑΘ, ΑΒΓΔ και ΘΕΖΗ είναι $\vec{E} \perp d\vec{S}$ οπότε:

$$\Phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

Δηλαδή δεν διέρχεται ηλεκτρική ροή από αυτές.

Στην έδρα ΑΔΕΘ είναι $y = 0$ οπότε:

$$\vec{E} = 2y\vec{j} = 0$$

δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν σε κάθε σημείο της έδρας αυτής. Άρα:

$$\Phi_{\text{ΑΔΕΘ}} = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

Ενώ στην έδρα ΓΖΗΒ είναι $y = 0,3\,\mathrm{m}$ οπότε:

$$E = 2 \cdot 0,3 = 0,6 \frac{Nt}{Cb}$$

και η ροή είναι:

$$\Phi_{\Gamma ZHB} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int E \cancel{\cos 0}^{1} dS = E \int_S dS = E\alpha^2 = 0,6 \frac{Nt}{Cb} 0,3^2 \, m^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Phi_{\Gamma ZHB} = 0,054 \frac{Nt}{Cb} m^2$$

Άρα η (1) σύμφωνα με τα παραπάνω δίνει την ολική ροή του κύβου:

$$\Phi_{\kappa\upsilon\beta.} = 0,054 \frac{Nt}{Cb} m^2$$

Σύμφωνα με το νόμο του Gauss είναι:

$$\Phi_{\kappa\acute{\upsilon}\beta.} = \frac{q_{enc\ell}}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad q_{enc\ell} = \Phi_{\kappa\acute{\upsilon}\beta.} \cdot \varepsilon_o = 0,054 \frac{Nt}{Cb} m^2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{Cb^2}{Nt \cdot m}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{q_{enc\ell} = 0,48 \cdot 10^{-12} Cb}$$

ΑΣΚΗΣΗ 14

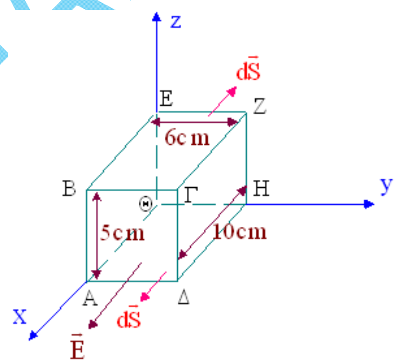
Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο τοποθετείται με τη μια κορυφή του στην αρχή των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο χώρο υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο της μορφής:

$$\vec{E}_{(x,y,z)} = \begin{cases} 5\cdot 10^4 \vec{i}\,\dfrac{Nt}{Cb}, & \text{στη θέση} \quad x = 0\,m \\ 3\cdot 10^4\,\dfrac{Nt}{Cb}, & \text{στη θέση} \quad x = 0{,}1\,m \\ 0, \quad \text{αν} \quad x \neq 0 & \text{και} \quad x \neq 0{,}1\,m \end{cases}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργείται από φορτία έξω από το παραλληλεπίπεδο καθώς επίσης και από φορτία μέσα σε αυτό. Προσδιορίστε το ολικό φορτίο που περικλείεται από το παραλληλεπίπεδο.

Λύση: Η ολική ροή που διέρχεται από το παραλληλεπίπεδο ισούται με το άθροισμα των ροών κάθε έδρας του.

Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι στη διεύθυνση του άξονα x, μόνο οι έδρες ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ συνεισφέρουν στην ολική ροή (αφού εκεί $\vec{E}//d\vec{S}$), ενώ στις άλλες έδρες είναι $\vec{E}\perp d\vec{S}$ κι επομένως η ροή είναι μηδενική.



Άρα:

$$\Phi_{ολ.} = \Phi_{ΑΒΓΔ} + \Phi_{ΕΖΗΘ} \Rightarrow$$

$$\Phi_{ολ.} = \int_{ΑΒΓΔ} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{ΕΖΗΘ} \vec{E}\cdot d\vec{S} \Rightarrow$$

$$\Phi_{ολ.} = \int_{ΑΒΓΔ} E\cdot \cancel{\cos 0}^{\,1} dS + \int E\cdot \cancel{\cos 180^o}^{\,-1} dS \Rightarrow$$

$$\Phi_{ολ.} = E_{(x=0,1m)} \int_{ΑΒΓΔ} dS - E_{(x=0)} \int_{ΕΖΗΘ} dS \Rightarrow$$

$$\Phi_{ολ.} = 3\cdot 10^4 \frac{Nt}{Cb}\cdot 3\cdot 10^{-3}\,m^2 - 5\cdot 10^4 \frac{Nt}{Cb}\cdot 3\cdot 10^{-3}\,m^2 = (90-150)\frac{Nt}{Cb}m^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_{ολ.} = -60\frac{Nt}{Cb}m^2}$$

Επομένως ο νόμος του Gauss δίνει το περικλειόμενο φορτίο του παραλληλεπιπέδου ως:

$$\Phi_{ολ.} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_o} \Rightarrow \quad q_{encl} = \Phi_{ολ.}\cdot\varepsilon_o = -60\frac{Nt}{Cb}m^2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\frac{Cb^2}{Nt\,m^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{q_{encl} = -531\cdot 10^{-12}\,\text{Cb}}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 15</u>

Κύβος έχει τις ακμές του, μήκους α, παράλληλες στους τρεις ορθογώνιους άξονες $x,\ y,\ z$. Η έδρα που είναι παράλληλη στο επίπεδο yz απέχει από αυτό απόσταση α. Στο χώρο υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο που δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{E} = b\sqrt{x}\cdot\vec{i} + c\cdot\vec{j}$$

όπου $b,\ c$ σταθερές με μονάδες $\text{Nt}\cdot\text{Cb}^{-1}\cdot\text{m}^{-\frac{1}{2}}$ και $\text{Nt}\cdot\text{Cb}^{-1}$ αντίστοιχα.

α. Βρείτε τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου μέσα από την επιφάνεια του κύβου.

β. Το φορτίο που υπάρχει στο εσωτερικό του κύβου.

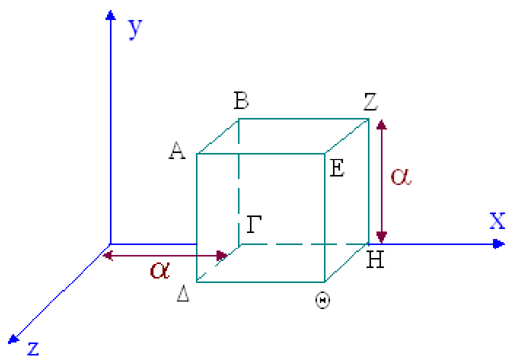
<u>Λύση:</u>

α. Η ολική ροή που διέρχεται από τον κύβο είναι το άθροισμα των ροών κάθε έδρας, οι οποίες είναι:

$$\Phi_{ΑΒΓΔ} = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S \left(b\sqrt{\alpha}\cdot\vec{i} + c\cdot\vec{j}\right)\cdot dS\left(-\vec{i}\right) = -\int_S b\sqrt{\alpha}\,dS = -b\sqrt{\alpha}\int_S dS = -b\sqrt{\alpha}\cdot\alpha^2$$

$$\Phi_{ΑΒΖΕ} = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S \left(b\sqrt{x}\cdot\vec{i} + c\cdot\vec{j}\right)\cdot dS\vec{j} = \int_S c\,dS = c\int_S dS = c\cdot\alpha^2$$

$$\Phi_{ΕΖΗΘ} = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S \left(b\sqrt{2\alpha}\cdot\vec{i} + c\cdot\vec{j}\right)\cdot dS\vec{i} = \int_S b\sqrt{2\alpha}\cdot dS = b\sqrt{2\alpha}\cdot\int_S dS = b\sqrt{2\alpha}\cdot\alpha^2$$



$$\Phi_{\Gamma\Delta\Theta H} = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S \left(b\sqrt{x}\cdot\vec{i} + c\cdot\vec{j}\right)\cdot dS\left(-\vec{j}\right) = -\int_S c\cdot dS = -c\int_S dS = -c\cdot\alpha^2$$

$$\Phi_{AE\Gamma H} = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S \left(b\sqrt{x}\cdot\vec{i} + c\cdot\vec{j}\right)\cdot dS\vec{k} = 0 \qquad \left(\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota} \quad \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0\right)$$

$$\Phi_{BZ\Theta\Delta} = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_S \left(b\sqrt{x}\cdot\vec{i} + c\cdot\vec{j}\right)\cdot dS\left(-\vec{k}\right) = 0$$

Άρα η ολική ροή είναι:

$$\Phi_{o\lambda.} = \Phi_{AB\Gamma\Delta} + \Phi_{ABZE} + \Phi_{EZH\Theta} + \Phi_{\Gamma\Delta\Theta H} + \Phi_{AE\Gamma H} + \Phi_{BZ\Theta\Delta} \Rightarrow$$

$$\Phi_{o\lambda.} = -b\sqrt{\alpha}\cdot\alpha^2 + c\alpha^2 + b\sqrt{2\alpha}\cdot\alpha^2 - c\alpha^2 + 0 + 0 = b\sqrt{2\alpha}\cdot\alpha^2 - b\sqrt{\alpha}\cdot\alpha^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_{o\lambda.} = b\sqrt{\alpha}\cdot\alpha^2\left(\sqrt{2}-1\right)} \quad (1)$$

β. Σύμφωνα με το νόμο του Gauss το περικλειόμενο φορτίο στον κύβο είναι:

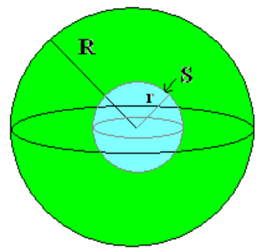
$$\Phi_{o\lambda.} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_o} \Rightarrow q_{encl} = \Phi_{o\lambda.}\varepsilon_o \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{q_{encl} = \varepsilon_o b\sqrt{\alpha}\cdot\alpha^2\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

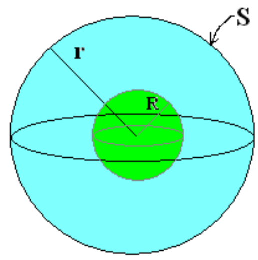
Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό και εξωτερικό ομογενούς φορτισμένης σφαίρας. Δίνονται η ακτίνα R και η χωρική πυκνότητα φορτίου ρ.

Λύση

Στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχει σφαιρική συμμετρία, δηλαδή αν περιστρέψουμε τη σφαίρα κατά οποιαδήποτε γωνία γύρω από το κέντρο, το σύστημά μας δεν εμφανίζεται διαφορετικό. Επομένως η διεύθυνση του πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο P πρέπει να συμπίπτει με την ακτινική ευθεία μεταξύ του κέντρου της σφαίρας και του σημείου P. Και αυτό γιατί αν υπήρχε μη ακτινική συνιστώσα του πεδίου αυτή θα έπρεπε να είναι διαφορετική μετά από κάποια περιστροφή. Επίσης μιας και δεν υπάρχει κάτι στο σύστημα που να ξεχωρίζει κατεύθυνση η εξάρτηση του πεδίου θα πρέπει να είναι μόνο ακτινική. Άρα εκμεταλλευόμενοι τη σφαιρική συμμετρία μπορούμε να γράψουμε : $\vec{E} = E(r)\hat{r}$



r<R



r>R

Η επιλογή της επιφάνειας Gauss είναι μια επιφάνεια σφαίρας, με κέντρο το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα r πάνω στην οποία η ένταση έχει σταθερό μέτρο. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα :

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E dS = E\oint_S dS = E4\pi r^2$$

κι έτσι:

$$\Phi_E = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi E(r) r^2 = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0}$$

Εάν $r < R$, τότε ο νόμος του Gauss θα μας δώσει :

$$4\pi E(r) r^2 = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r ,$$

ενώ για $r > R$, ο νόμος του Gauss θα μας δώσει :

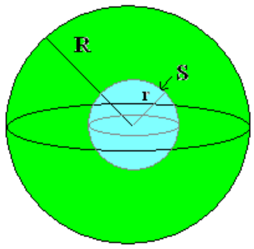
$$4\pi E(r)r^2 = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 17

Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό και εξωτερικό ομογενούς επιφανειακά φορτισμένης σφαίρας. Δίνονται η ακτίνα R και η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ.

Λύση

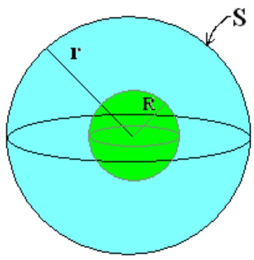
Και πάλι έχουμε σφαιρική συμμετρία, οπότε μπορούμε να γράψουμε :



r<R

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

Η επιλογή της επιφάνειας Gauss είναι μια επιφάνεια σφαίρας, με κέντρο το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα r πάνω στην οποία η ένταση έχει σταθερό μέτρο. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα :



r>R

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S EdS = E\oint_S dS = E4\pi r^2$$

που περιγράφει την ηλεκτρική ροή.

Έτσι:

$$\Phi_E = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi E(r)r^2 = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0}$$

Εάν $r < R$, τότε ο νόμος του Gauss θα μας δώσει :

$$4\pi E(r)r^2 = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = 0,$$

μιας και δεν περιέχεται φορτίο στο εσωτερικό της σφαίρας

ενώ για $r > R$, ο νόμος του Gauss θα μας δώσει :

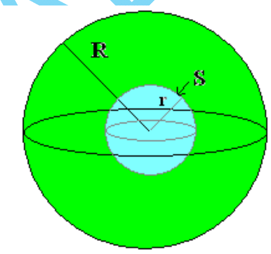
$$4\pi E(r)r^2 = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma 4\pi R^2 \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό και εξωτερικό σφαίρας ακτίνας R που είναι φορτισμένη με χωρική πυκνότητα φορτίου $\rho = kr$, όπου $k > 0$.

Λύση

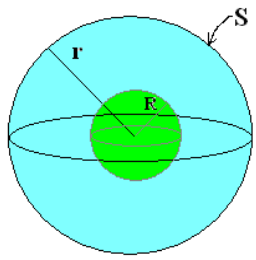
Και πάλι έχουμε σφαιρική συμμετρία, οπότε μπορούμε να γράψουμε :



r<R

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}$$

Η επιλογή της επιφάνειας Gauss είναι μια επιφάνεια σφαίρας, με κέντρο το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα r πάνω στην οποία η ένταση έχει σταθερό μέτρο. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα :



r>R

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S EdS = E\oint_S dS = E4\pi r^2$$

που περιγράφει την ηλεκτρική ροή.

Έτσι: $\Phi_E = \dfrac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 4\pi E(r)r^2 = \dfrac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0}$

Εάν $r < R$, τότε το φορτίο που βρίσκεται στο εσωτερικό της επιφάνειας Gauss είναι:

$$q_{\varepsilon\sigma} = \int_0^r \rho dV = \int_0^r \rho(r)4\pi r^2 dr = 4\pi k\int_0^r r^3 dr = \pi k r^4$$

(αφού $V = 4\pi r^3/3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$)

οπότε ο νόμος του Gauss θα μας δώσει : $4\pi E(r) r^2 = \dfrac{\pi k r^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \dfrac{k}{4\varepsilon_0} r^2$,

Εάν $r > R$, τότε το φορτίο που βρίσκεται στο εσωτερικό της επιφάνειας Gauss είναι:

$$q_{\varepsilon\sigma} = \int_0^R \rho dV = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi k \int_0^R r^3 dr = \pi k R^4$$

οπότε ο νόμος του Gauss θα μας δώσει : $4\pi E(r) r^2 = \dfrac{\pi k R^4}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \dfrac{kR^4}{4\varepsilon_0 r^2}$

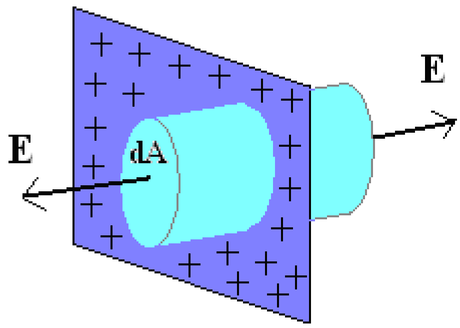
ΑΣΚΗΣΗ 19

Θεωρούμε φορτισμένο επίπεδο φύλλο απείρων διαστάσεων στο επίπεδο xz με ομογενή επιφανειακή κατανομή φορτίου σ. Να βρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο.

Λύση

Στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχει συμμετρία στη διεύθυνση την παράλληλη με το επίπεδο xz. Δηλαδή αν κινηθούμε παράλληλα με το επίπεδο, θα πρέπει το σύστημά μας να μην εμφανίζεται διαφορετικό. Επομένως η διεύθυνση του πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο P πρέπει να συμπίπτει με την κάθετη διεύθυνση (y) στο επίπεδο. Επίσης το πεδίο θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από την απόσταση y από το φύλλο.

Άρα, εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία μπορούμε να γράψουμε: $\vec{E} = E(x,y,z)\hat{y} = E(y)\hat{y}$.



Η επιλογή της επιφάνειας Gauss είναι μια επιφάνεια κυλίνδρου με τις δύο βάσεις παράλληλες στο επίπεδο. Άρα : $d\vec{S} = \pm\hat{y}dS$ (για τις δυο βάσεις)

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα :

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\beta\alpha\sigma\eta 1} E(y)\hat{y}\cdot\hat{y}dS + \int_{\beta\alpha\sigma\eta 2}\left[-E(y)\hat{y}\right]\cdot(-\hat{y})dS \Rightarrow$$

$$\Phi_E = 2\int_{\beta\alpha\sigma\eta} E(y)dS = 2E(y)A$$

Ο Νόμος του Gauss δίνει:

$$\Phi_E = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(y)2A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(y) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

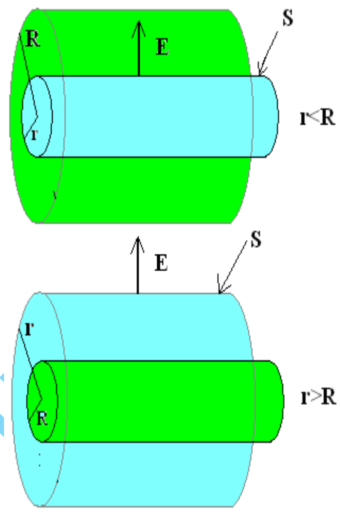
Ο παράγοντας δύο προέρχεται από το γεγονός ότι πρέπει να συμπεριλάβουμε και τις δύο επιφάνειες του κυλίνδρου στην ολοκλήρωση. Το πεδίο είναι επομένως ομογενές και κάθετο στο επίπεδο.

ΑΣΚΗΣΗ 20

Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό και στο εξωτερικό ομογενούς φορτισμένου με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας βάσης R.

Λύση

Στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχει κυλινδρική συμμετρία, δηλαδή αν περιστρέψουμε τον κύλινδρο κατά οποιαδήποτε γωνία γύρω από τον άξονα συμμετρίας του ή αν προχωρήσουμε κατά μήκος του, το σύστημά μας δεν εμφανίζεται διαφορετικό. Επομένως η διεύθυνση του πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο P πρέπει να συμπίπτει με την κάθετη προς την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου. Και αυτό γιατί αν υπήρχε άλλη συνιστώσα του πεδίου αυτή θα έπρεπε να είναι διαφορετική μετά από κάποια περιστροφή. Επίσης μιας και το μήκος του κυλίνδρου είναι άπειρο η εξάρτηση του πεδίου θα πρέπει να είναι μόνο ακτινική. Άρα εκμεταλλευόμενοι την κυλινδρική συμμετρία μπορούμε να γράψουμε : $\vec{E} = E(r)\hat{r}$



Η επιλογή της επιφάνειας Gauss είναι μια κυλινδρική επιφάνεια, με άξονα συμμετρίας τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου, μήκους L και ακτίνας r πάνω στην παράπλευρη επιφάνεια του οποίου η ένταση έχει σταθερό μέτρο. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα :

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\substack{\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\eta \\ \varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha}} \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\substack{EdS \\ \text{διότι} \\ \vec{E}\parallel d\vec{S}}} + \int_{\beta\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\iota\varsigma} \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\substack{0 \text{ διότι} \\ \vec{E}\perp d\vec{S}}} = \int_{\substack{\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\eta \\ \varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha}} EdS = E \int_{\substack{\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\eta \\ \varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha}} dS = E2\pi rL$$

κι έτσι:

$$\Phi_E = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\pi LrE(r) = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0}$$

Εάν $r < R$, τότε $q_{\varepsilon\sigma} = \int \rho dV = \rho\int dV = \rho\pi r^2 L$ ο νόμος του Gauss θα μας δώσει :

$$2\pi L r E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi r^2 L \Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0},$$

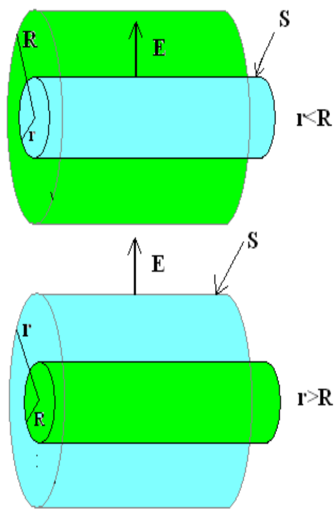
ενώ για $r > R$, τότε $q_{\varepsilon\sigma} = \int \rho dV = \rho\int dV = \rho\pi R^2 L$ ο νόμος του Gauss θα μας δώσει :

$$2\pi L r E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\pi R^2 L \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$$

ΑΣΚΗΣΗ 21

Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό και στο εξωτερικό ομογενούς φορτισμένου με χωρική πυκνότητα φορτίου $\rho = kr$ κυλίνδρου απείρου μήκους και ακτίνας βάσης R.

Λύση



Στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχει κυλινδρική συμμετρία, δηλαδή αν περιστρέψουμε τον κύλινδρο κατά οποιαδήποτε γωνία γύρω από τον άξονα συμμετρίας του ή αν προχωρήσουμε κατά μήκος του, το σύστημά μας δεν εμφανίζεται διαφορετικό. Επομένως η διεύθυνση του πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο P πρέπει να συμπίπτει με την κάθετη προς την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου. Και αυτό γιατί αν υπήρχε άλλη συνιστώσα του πεδίου αυτή θα έπρεπε να είναι διαφορετική μετά από κάποια περιστροφή. Επίσης μιας και το μήκος του κυλίνδρου είναι άπειρο η εξάρτηση του πεδίου θα πρέπει να είναι μόνο ακτινική. Άρα εκμεταλλευόμενοι την κυλινδρική συμμετρία μπορούμε να γράψουμε : $\vec{E} = E(r)\hat{r}$

Η επιλογή της επιφάνειας Gauss είναι μια κυλινδρική επιφάνεια, με άξονα συμμετρίας τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου, μήκους L και ακτίνας r πάνω στην παράπλευρη επιφάνεια του οποίου η ένταση έχει σταθερό μέτρο. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα :

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\substack{\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\eta \\ \varepsilon\pi\iota\phi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha}} \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\substack{EdS \\ \text{διότι} \\ \vec{E}\parallel d\vec{S}}} + \int_{\beta\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\iota\varsigma} \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\substack{0\ \text{διότι} \\ \vec{E}\perp d\vec{S}}} = \int_{\substack{\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\eta \\ \varepsilon\pi\iota\phi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha}} EdS = E \int_{\substack{\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho\eta \\ \varepsilon\pi\iota\phi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha}} dS = E2\pi rL$$

κι έτσι:

$$\Phi_E = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2\pi LrE(r) = \frac{q_{\varepsilon\sigma}}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

Εάν $r < R$, τότε $q_{\varepsilon\sigma} = \int \rho dV = \int_0^r krL2\pi rdr = 2\pi kLr^3/3$ οπότε από την (1):

$$2\pi LrE(r) = \frac{2\pi kLr^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{kr^2}{3\varepsilon_0},$$

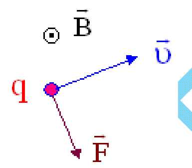
ενώ για $r > R$, τότε $q_{\varepsilon\sigma} = \int \rho dV = \int_0^R krL2\pi rdr = 2\pi kLR^3/3$ οπότε από την (1):

$$2\pi LrE(r) = \frac{2\pi kLR^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{kR^3}{3\varepsilon_0 r}$$

2. ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

◈ Μαγνητική δύναμη κινούμενου σημειακού φορτίου:

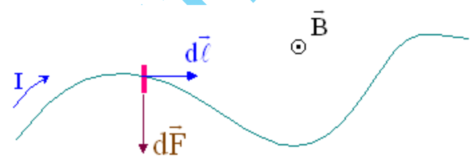
$$\boxed{\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B}} \quad (\mathrm{Nt})$$



όπου q το φορτίο, $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα και $\vec{B}$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου.

◈ Μαγνητική δύναμη Laplace ρευματοφόρου αγωγού:

Επιλέγοντας ένα στοιχειώδες τμήμα $d\vec{\ell}$ του αγωγού με τη φορά του ρεύματος, η στοιχειώδης δύναμη Laplace που ασκείται σε αυτό δίνεται από τη σχέση:



$$\boxed{d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}}$$

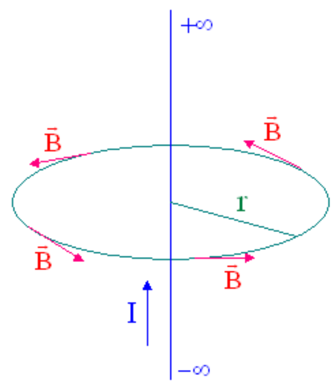
Άρα η ολική δύναμη είναι:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = I \int_c d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!: Κατά τον υπολογισμό μαγνητικών δυνάμεων σε κινούμενα φορτία ή ρευματοφόρους αγωγούς η ένταση του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ θα δίνεται **πάντα** σταθερή, δηλαδή το πεδίο θα είναι ομογενές.

◈ Μαγνητικό πεδίο άπειρου ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού:

$$\boxed{B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}}$$



όπου $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} N/A^2$ η μαγνητική διαπερατότητα του κενού και r η απόσταση του σημείου στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο από τον άπειρο ρευματοφόρο αγωγό.

◈ Μαγνητική ροή:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\mathrm{Weber} = \mathrm{Tesla} \cdot m^2)$$

εκφράζει τον αριθμό των μαγνητικών δυναμικών γραμμών που διαπερνούν μια επιφάνεια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα σωμάτιο έχει μάζα $3,34\cdot 10^{-27}\,kg$ και φορτίο $q = 1,602\cdot 10^{-19}\,Cb$. Το σωμάτιο κινείται σε κυκλική τροχιά με ταχύτητα $\upsilon = 20\cdot 10^{5}\,m/sec$ μέσα σε μαγνητικό πεδίο μέτρου $1,5\,Tesla$.

α. Βρείτε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του σωματίου.

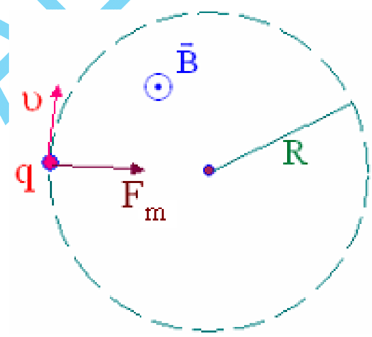
β. Βρείτε το χρόνο που απαιτείται για να διανύσει μισό κύκλο.

γ. Μέσα από ποια διαφορά δυναμικού θα πρέπει να επιταχυνθεί το σωμάτιο για να αποκτήσει την ταχύτητα αυτή;

Αγνοείστε την επίδραση του βαρυτικού πεδίου.

Λύση:

α. Στο σωμάτιο ασκείται η μαγνητική δύναμη:



$$F = q\upsilon B\cancel{\sin 90^{o}}^{\,1} = q\upsilon B$$

η οποία παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή:

$$F_{\kappa} = m\alpha_{\kappa} \quad \Rightarrow \quad q\upsilon B = \frac{m\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow$$

$$R = \frac{m\upsilon}{qB} \quad \Rightarrow$$

$$R = \frac{3,34\cdot 10^{-27}\cdot 20\cdot 10^{5}}{1,602\cdot 10^{-19}\cdot 1,5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 0,028\,m}$$

β. Ο χρόνος που απαιτείται για να διαγράψει έναν κύκλο ισούται με τον χρόνο της περιόδου:

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi}{\omega} \\ \text{Αλλά}: \quad \upsilon = \omega R \Rightarrow \omega = \dfrac{\upsilon}{R} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi R}{\upsilon} \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{2\cdot 3,14\cdot 0,028}{20\cdot 10^{5}} \quad \Rightarrow \quad T = 88\cdot 10^{-9}\,sec = 88\,n\,sec$$

Άρα ο χρόνος που απαιτείται για να διανύσει μισό κύκλο είναι ίσος με το μισό της περιόδου:

$$t = \frac{T}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 44\,n\,sec}$$

γ. Αν το σωμάτιο επιταχύνθηκε από διαφορά δυναμικού V και απόκτησε την ταχύτητα υ, το Θ.Ε.Κ.Ε. δίνει:

$$W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad W = K_{\tau\varepsilon\lambda.} - \cancel{K_{\alpha\rho\chi.}}^{\,0} \quad \Rightarrow$$

$$qV = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m\upsilon^2}{2q} \quad \Rightarrow$$

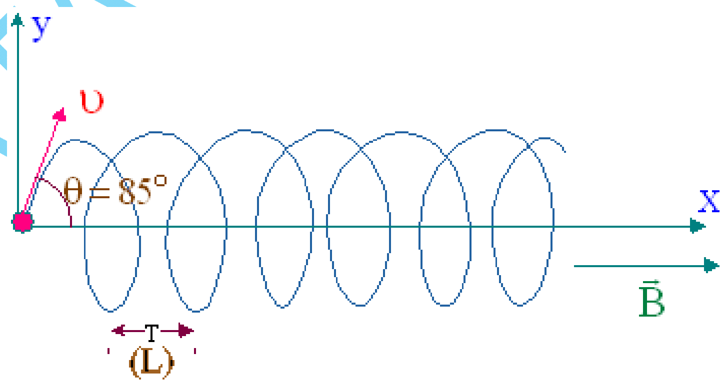
$$V = \frac{3,34 \cdot 10^{-27} \cdot 400 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} = 41,6 \cdot 10^3\, Vo\ell t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{V = 41,6\, kVo\ell t}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο εντάσεως ίση με $0,15T$ έχει διεύθυνση προς τα θετικά x. Ένα πρωτόνιο με ταχύτητα μέτρου $\upsilon = 5 \cdot 10^6\, m/sec$ μπαίνει μέσα στο μαγνητικό πεδίο με διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 85^o με τον άξονα x. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ δυο σημείων της τροχιάς του που απέχουν χρονικά μια περίοδο.

Λύση:



Η τροχιά του πρωτονίου θα είναι ελικοειδής όπως φαίνεται στο σχήμα, επειδή το πρωτόνιο κάνει δυο κινήσεις:

- Ευθύγραμμη ομαλή στον άξονα x με ταχύτητα $\upsilon_x = \upsilon\cos 85^o$, αφού $\vec{\upsilon}_x // \vec{B}$ και η μαγνητική δύναμη εκεί είναι μηδέν.

- Ομαλή κυκλική κίνηση στο επίπεδο yz αφού η συνιστώσα της ταχύτητας $\upsilon_y = \upsilon \sin 85^o$ είναι κάθετη στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ και η μαγνητική δύναμη εκεί είναι $F = q\upsilon \sin 85^o B$ η οποία παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

Σε χρόνο μιας περιόδου T της κυκλικής τροχιάς το πρωτόνιο θα έχει κινηθεί κατά L στον άξονα x. Επειδή όμως η κίνηση στον άξονα x είναι ευθύγραμμη ομαλή, θα ισχύει:

$$L = \upsilon_x T = \upsilon \cos 85^o T \quad (1)$$

Αλλά για την κυκλική κίνηση η μαγνητική δύναμη $F = q\upsilon_y B$ παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης:

$$F_\kappa = m\alpha_\kappa \quad \Rightarrow \quad q\upsilon_y B = m\frac{\upsilon_y^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{m\upsilon_y}{qB} \quad \Rightarrow$$

$$R = \frac{m\upsilon \sin 85^o}{qB} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 0,996}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,15} \quad \Rightarrow$$

$$R = \frac{8,316 \cdot 10^{-21}}{0,24 \cdot 10^{-19}} = 34,65 \cdot 10^{-2} \quad \Rightarrow \quad R = 0,346\text{m}$$

$$\text{Άρα:} \left. \begin{array}{l} T = \dfrac{2\pi}{\omega} \\ \upsilon_y = \omega R \Rightarrow \omega = \dfrac{\upsilon_y}{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi R}{\upsilon_y} = \frac{2\pi R}{\upsilon \sin 85^o} \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 0,346}{5 \cdot 10^6 \cdot 0,996} = \frac{2,173}{4,98 \cdot 10^6} \quad \Rightarrow \quad T = 0,436 \cdot 10^{-6}\,\text{sec} \quad (2)$$

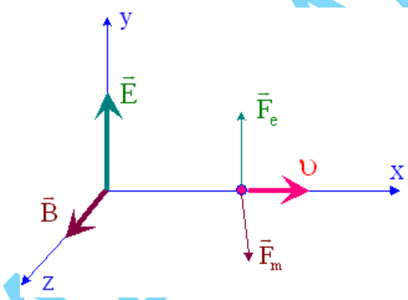
Επομένως η (1) λόγω της (2) δίνει:

$$L = 5 \cdot 10^6 \cdot 0,087 \cdot 0,436 \cdot 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = 0,19\text{m}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ένα ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E}$ και ένα μαγνητικό πεδίο έντασης $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους. Τα δυο πεδία επιδρούν ταυτόχρονα σε φορτίο q που κινείται ευθύγραμμα και κάθετα στα $\vec{E}$ και $\vec{B}$. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του φορτίου.

Λύση: Έστω ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι στον άξονα y, το μαγνητικό πεδίο στον άξονα z και το φορτίο q κινείται ευθύγραμμα στον άξονα x.



Στο φορτίο q ασκείται η ηλεκτρική δύναμη:

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = qE\hat{y}$$

και η μαγνητική δύναμη:

$$\vec{F}_m = q\vec{\upsilon}\times\vec{B} = q\upsilon\hat{x}\times B\hat{z} = q\upsilon B\hat{x}\times\hat{z} = q\upsilon B\left(-\hat{y}\right)$$

Επειδή το φορτίο κινείται ευθύγραμμα και οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό είναι κάθετες στη διεύθυνση κίνησης, ισχύει:

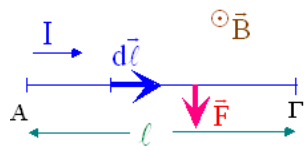
$$\Sigma\vec{F}_y = 0 \quad\Rightarrow\quad F_e = F_m \quad\Rightarrow\quad \cancel{q}E = \cancel{q}\upsilon B \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = \frac{E}{B}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ευθύγραμμος αγωγός μήκους $\ell = 2\mathrm{m}$ διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I = 1\mathrm{A}$. Στο χώρο υπάρχει μαγνητικό πεδίο μέτρου $4\mathrm{Tesla}$ κάθετα στον αγωγό με φορά προς τα έξω. Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται σε αυτόν.

Λύση: Για το στοιχειώδες τμήμα $d\vec{\ell}$ του αγωγού είναι:



$$d\vec{F} = Id\vec{\ell}\times\vec{B}$$

Άρα:

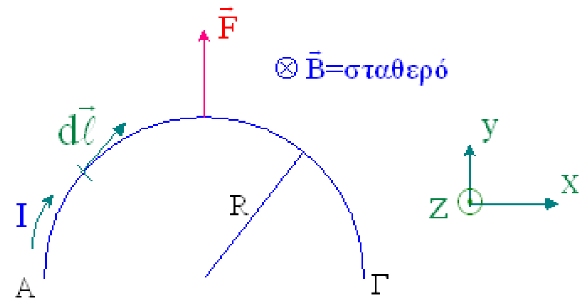
$$\vec{F} = \int d\vec{F} = I\left(\int_A^\Gamma d\vec{\ell}\right)\times\vec{B} = I\overrightarrow{A\Gamma}\times\vec{B} = I\ell\hat{x}\times B\hat{z} = BI\ell\hat{x}\times\hat{z} \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{F} = BI\ell\left(-\hat{y}\right)} \quad\Rightarrow \vec{F} = 4\cdot1\cdot2\left(-\hat{y}\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{F} = -8\hat{y}\mathrm{Nt}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται στο ρευματοφόρο ημικυκλικό αγωγό του ακόλουθου σχήματος:

Λύση:

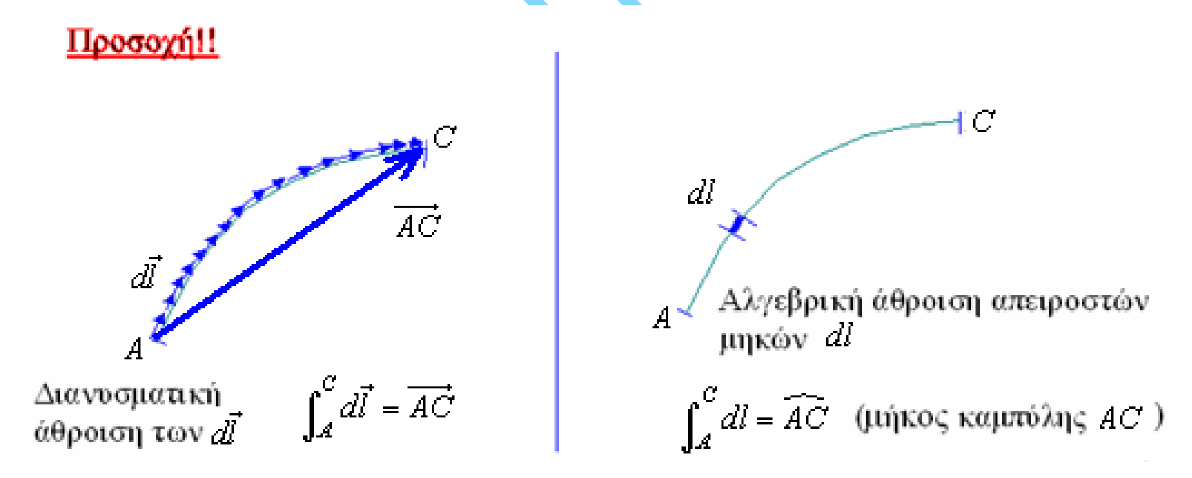


Για ένα στοιχειώδες τμήμ[α]
είναι:

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Άρα: $\vec{F} = \int d\vec{F} = I\left(\int_{A}^{\Gamma} d\vec{\ell}\right) \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = I \cdot \overrightarrow{A\Gamma} \times \vec{B} = I \cdot 2R\hat{x} \times B(-\hat{z}) \quad \Rightarrow$

$$\vec{F} = -BI2R\hat{x} \times \hat{z} = BI2R(-\hat{y}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = BI2R\hat{y}}$$



<u>ΑΣΚΗΣΗ 6</u>

Το σχήμα δείχνει δυο παράλληλα σύρματα μεγάλου μήκους κάθετα στη σελίδα (επίπεδο xy), που διαρρέονται από ίσα ρεύματα I με αντίθετες φορές.

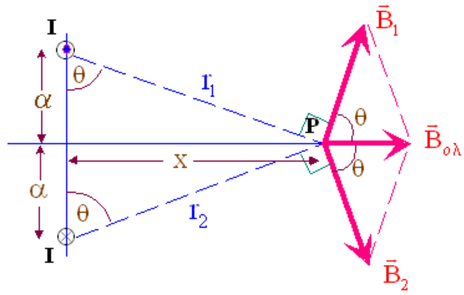
α. Σχεδιάστε τα διανύσματα του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ που δημιουργεί το κάθε σύρμα και το ολικό μαγνητικό πεδίο στο σημείο P.

β. Βρείτε μια έκφραση για το μέτρο του ολικού μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ σε κάθε σημείο του άξονα x, συναρτήσει της συντεταγμένης x του σημείου αυτού. Ποια είναι η κατεύθυνση του $\vec{B}$;

γ. Αποδώστε σε καμπύλη την εξάρτηση του μέτρου του $\vec{B}$ από το x.

δ. Για ποια τιμή του x μεγιστοποιείται το μέτρο του $\vec{B}$;

<u>Λύση:</u>



α. Το πάνω σύρμα δημιουργεί στο σημείο P ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_1$ κάθετο στην ακτίνα r_1 με φορά όπως φαίνεται στο σχήμα (σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού), ενώ το κάτω σύρμα δημιουργεί στο σημείο P ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_2$ κάθετο στην ακτίνα r_2 και με τη φορά του σχήματος, όπως προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Το ολικό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_{ολ}$ στο σημείο P προκύπτει από τη διανυσματική άθροιση των $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ και σύμφωνα με τον κανόνα του παραλληλογράμμου είναι αυτή του σχήματος.

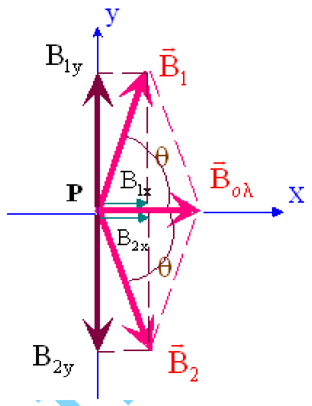
β. Τα μέτρα των $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ είναι:

$$B_1 = \frac{\mu_o I}{2\pi r_1} \quad \Rightarrow \quad B_1 = \frac{\mu_o I}{2\pi\sqrt{x^2+\alpha^2}} \qquad (1)$$

και

$$B_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi r_2} \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi\sqrt{x^2+\alpha^2}}$$

όπου $r_1 = r_2 = \sqrt{x^2 + \alpha^2}$.



Αναλύοντας τα $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ στους άξονες x και y προκύπτει ότι οι συνιστώσες B_{1y} και B_{2y} αλληλοαναιρούνται ως ίσες και αντίθετες, ενώ οι συνιστώσες B_{1x} και B_{2x} προστίθενται και δίνουν το $\vec{B}_{ολ}$ στην κατεύθυνση x με μέτρο:

$$B_{ολ} = B_{1x} + B_{2x} = B_1 \cos\theta + B_2 \cos\theta$$

από την οποία επειδή $B_1 = B_2$, έχουμε:

$$B_{ολ} = 2B_1 \cos\theta \quad \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$B_{ολ} = \cancel{2}\frac{\mu_o I}{\cancel{2}\pi\sqrt{x^2+\alpha^2}}\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$B_{ολ} = \frac{\mu_o I}{\pi\sqrt{x^2+\alpha^2}}\cos\theta \quad (2)$$

Αλλά από το σχήμα εύκολα προκύπτει ότι:

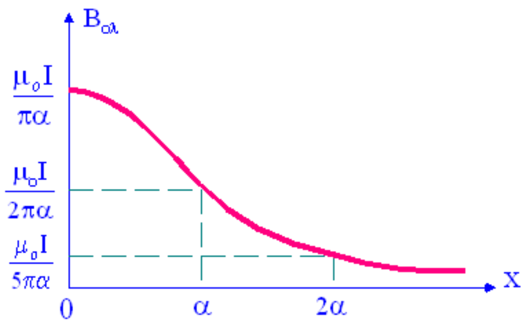
$$\cos\theta = \frac{\alpha}{r_1} = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}$$

οπότε η (2) γίνεται:

$$B_{ολ} = \frac{\mu_o I}{\pi\sqrt{x^2+\alpha^2}}\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{B_{ολ} = \frac{\mu_o I\alpha}{\pi\left(x^2+\alpha^2\right)}} \quad (3)$$

γ.



Για $x = 0$: $B_{ολ} = \frac{\mu_o I}{\pi\alpha}$

Για $x = \alpha$: $B_{ολ} = \frac{\mu_o I\alpha}{\pi 2\alpha^2} = \frac{\mu_o I}{2\pi\alpha}$

Για $x \to \infty$: $B_{ολ} \to 0$

δ. Από το παραπάνω διάγραμμα φαίνεται ότι το $B_{ολ}$ μεγιστοποιείται στη θέση $x = 0$ και παίρνει την τιμή:

$$B_{ολ} = \frac{\mu_o I}{\pi\alpha}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δυο ευθύγραμμα και μεγάλου μήκους παράλληλα σύρματα απέχουν μεταξύ του 1m. Η διεύθυνση των συρμάτων είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το επάνω σύρμα διαρρέεται από ρεύμα $I_1 = 6A$ με φορά από τον αναγνώστη προς τη σελίδα.

α. Ποιο πρέπει να είναι το I_2, σε μέτρο και φορά, ώστε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P να είναι μηδέν;

β. Πόσο είναι τότε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο Q;

γ. Πόσο είναι τότε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο S;

Λύση:

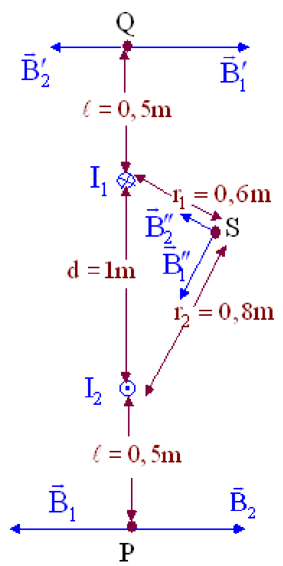
α. Στο σημείο P το ρεύμα I_1 δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_1$ προς τα αριστερά με μέτρο:

$$B_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi(d+\ell)} \quad (1)$$

Επομένως για να είναι το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P μηδέν, θα πρέπει το $\vec{B}_2$ να είναι αντίθετο του $\vec{B}_1$, δηλαδή προς τα δεξιά. Άρα το ρεύμα I_2 πρέπει να έχει φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη.

Το μέτρο του $\vec{B}_2$ είναι:

$$B_2 = \frac{\mu_o I_2}{2\pi\ell} \quad (2)$$



Συνεπώς για να είναι το μαγνητικό πεδίο στο P μηδέν, θα πρέπει:

$$\vec{B}_P = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2$$

Από την οποία λόγω των (1) και (2), έχουμε:

$$\frac{\mu_o I_1}{2\pi(d+\ell)} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi\ell} \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{\ell I_1}{d+\ell} = \frac{0,5\cdot 6}{1+0,5} = \frac{3}{1,5} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{I_2 = 2A}$$

β. Το μαγνητικό πεδίο στο σημείο Q είναι:

$$\vec{B}_Q = \vec{B}_1' + \vec{B}_2' = \frac{\mu_o I_1}{2\pi\ell}\hat{x} + \frac{\mu_o I_2}{2\pi(d+\ell)}(-\hat{x}) \quad \Rightarrow$$

$$\vec{B}_Q = \frac{\mu_o}{2\pi}\left(\frac{I_1}{\ell} - \frac{I_2}{d+\ell}\right)\hat{x} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}}{2\pi}\left(\frac{6}{0,5} - \frac{2}{1+0,5}\right)\hat{x} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{B}_Q = 2\cdot 10^{-7}(12 - 1,33)\hat{x} = 2\cdot 10^{-7}\cdot 10,67\hat{x} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B}_Q = 21,34\cdot 10^{-7}\,\hat{x}\,\text{Tesla}}$$

γ. Επειδή το τρίγωνο που σχηματίζεται στο σημείο S είναι ορθογώνιο, τα μαγνητικά πεδία από τα δυο ρεύματα έχουν τη φορά του σχήματος και τα μέτρα τους είναι:

$$B_1'' = \frac{\mu_o I_1}{2\pi r_1} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 6}{2\pi\cdot 0,6} = \frac{12\cdot 10^{-7}}{0,6} \quad \Rightarrow \quad B_1'' = 20\cdot 10^{-7}\,\text{Tesla}$$

$$B_2'' = \frac{\mu_o I_2}{2\pi r_2} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 2}{2\pi\cdot 0,8} = \frac{4\cdot 10^{-7}}{0,8} \quad \Rightarrow \quad B_2'' = 5\cdot 10^{-7}\,\text{Tesla}$$

Άρα:

$$B_S = \sqrt{B_1''^2 + B_2''^2} = \sqrt{\left(20\cdot 10^{-7}\right)^2 + \left(5\cdot 10^{-7}\right)^2} = \sqrt{425}\cdot 10^{-7} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{B_S = 20,6\cdot 10^{-7}\,\text{Tesla}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Δίνονται οι τρεις ευθύγραμμοι άπειρου μήκους ρευματοφόροι αγωγοί του σχήματος. Να προσδιοριστεί η θέση του άξονα x, όπου το ολικό μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν.

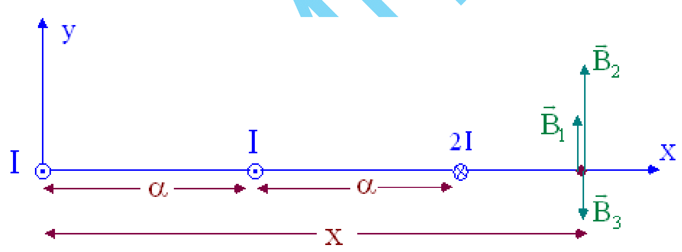
Λύση: Έστω ένα τυχαίο σημείο P του άξονα x. Το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P οφείλεται στους τρεις άπειρους αγωγούς. Το μαγνητικό πεδίο κάθε αγωγού είναι:

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_o I}{2\pi x}\hat{y}\,,\qquad \vec{B}_2=\frac{\mu_o I}{2\pi(x-\alpha)}\hat{y}\quad \text{και}\quad \vec{B}_3=\frac{\mu_o 2I}{2\pi(x-2\alpha)}(-\hat{y})$$

Επομένως το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P είναι:

$$\vec{B}_P=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3=\frac{\mu_o I}{2\pi x}\hat{y}+\frac{\mu_o I}{2\pi(x-\alpha)}\hat{y}+\frac{\mu_o 2I}{2\pi(x-2\alpha)}(-\hat{y})\Rightarrow$$

$$\vec{B}_P=\frac{\mu_o I}{2\pi}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x-\alpha}-\frac{2}{x-2\alpha}\right]\hat{y}\qquad(1)$$



Άρα για να είναι το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P μηδέν, θα πρέπει:

$$\vec{B}_P=0\ \overset{(1)}{\Rightarrow}\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x-\alpha}-\frac{2}{x-2\alpha}=0\ \Rightarrow$$

$$\frac{(x-\alpha)(x-2\alpha)+x(x-2\alpha)-2x(x-\alpha)}{x(x-\alpha)(x-2\alpha)}=0\ \Rightarrow$$

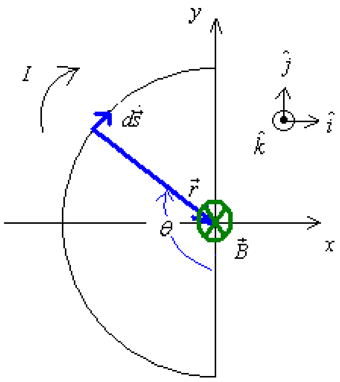
$$\cancel{x^2}-2\alpha x-\alpha x+2\alpha^2+\cancel{x^2}-\cancel{2\alpha x}-\cancel{2x^2}+\cancel{2\alpha x}=0\ \Rightarrow$$

$$-3\alpha x+2\alpha^2=0\ \Rightarrow\ 2\alpha^2=3\alpha x\ \Rightarrow\ \boxed{x=\frac{2}{3}\alpha}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 9</u>

Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο ημικυκλικού σύρματος που διαρρέεται από ρεύμα I στο κέντρο του ημικυκλίου.

<u>Λύση</u>



Σύμφωνα με το Νόμο των Biot-Savart ένα στοιχειώδες τόξο $d\vec{s}$ παράγει στην αρχή των αξόνων στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}d\vec{s}\times\hat{r}$$

Το στοιχειώδες αυτό διάνυσμα $d\vec{B}$ είναι κάθετο στο επίπεδο των $d\vec{s},\vec{r}$ δηλ. κάθετο στο επίπεδο x-y, και έχει φορά προς το εσωτερικό της σελίδας, δηλ. το $-\hat{k}$, με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού κι έτσι το συνολικό μαγνητικό πεδίο έχει αυτήν την φορά.

Είναι: $r = |\vec{r}| = R$ και $d\vec{s}\times\hat{r} = |d\vec{s}\times\hat{r}|(-\hat{k}) = -ds\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{2}\hat{k} = -ds\hat{k}$

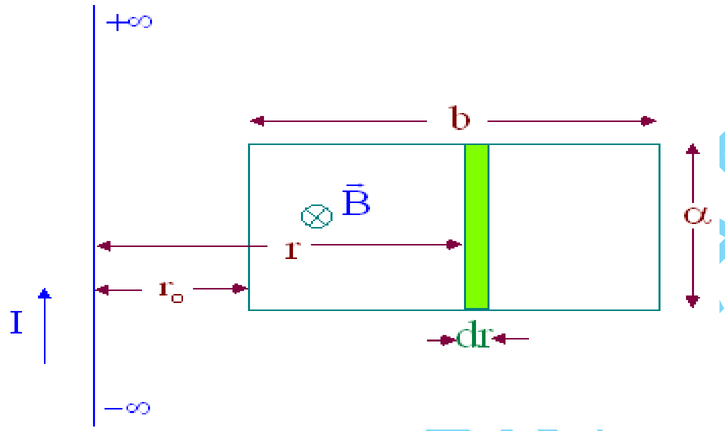
κι έτσι:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}I\int\frac{d\vec{s}\times\hat{r}}{r^2} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}I\int\frac{ds}{R^2}\left(-\hat{k}\right) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{R^2}\overbrace{\int ds}^{\pi R}\,\hat{k} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4R}\hat{k}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ένα ορθογώνιο πλαίσιο πλευρών α και b βρίσκεται στη γειτονία ευθύγραμμου αγωγού απείρου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα I. Ο αγωγός είναι παράλληλος σε μια πλευρά του πλαισίου μήκους α και βρίσκεται στο επίπεδο του πλαισίου. Η πλησιέστερη πλευρά του πλαισίου απέχει από τον αγωγό r_o. Να βρεθεί η ολική μαγνητική ροή που διαπερνά το πλαίσιο.



Λύση: Ο άπειρου μήκους ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ με φορά προς τα μέσα στην επιφάνεια του πλαισίου και μέτρο:

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \quad (1)$$

Άρα η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο, είναι:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S B dS \overset{(1)}{=} \int_S \frac{\mu_o I}{2\pi r} dS \Rightarrow$$

όπου $dS = \alpha dr$ είναι η στοιχειώδης επιφάνεια μιας λωρίδας του πλαισίου πάχους dr που απέχει απόσταση r από τον ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό

$$\Phi_B = \frac{\mu_o I\alpha}{2\pi}\int_{r_o}^{r_o+b}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_o I\alpha}{2\pi}\ell n r\Big|_{r_o}^{r_o+b} \Rightarrow \boxed{\Phi_B = \frac{\mu_o I\alpha}{2\pi}\ell n\left(\frac{r_o+b}{r_o}\right)}$$

Νόμος Ampere

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου σε κλειστή διαδρομή ισούται με το μ_0 επί το σύνολο των ρευμάτων που περικλείει η διαδρομή :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\varepsilon\sigma}$$

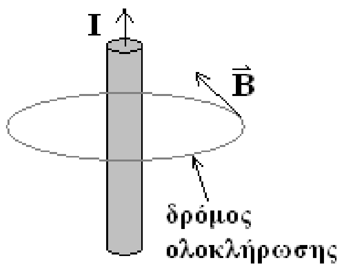
Εφαρμογές του νόμου του Ampere

Θέλουμε να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο αγωγών, όπως π.χ. απείρου μήκους κυλίνδρου, κυλινδρικού φλοιού, σύρματος, σωληνοειδούς κ.ο.κ. με τη βοήθεια του νόμου του Ampere.

Σε όλες τις περιπτώσεις προσπαθούμε να εκμεταλλευτούμε κάποια συμμετρία, π.χ. κυλινδρική, που ενδέχεται να υπάρχει στο πρόβλημα, ώστε να μπορέσουμε να επιλέξουμε κατάλληλο κλειστό δρόμο, π.χ. κύκλο ή ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, που θα κάνει εύκολο τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος.

Εφαρμογή: Ευθύγραμμος αγωγός απείρου μήκους

Θεωρούμε ευθύγραμμο αγωγό που έχει άπειρο μήκος και διαρρέεται από ρεύμα έντασης I. Στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχει κυλινδρική συμμετρία, δηλαδή αν περιστρέψουμε τον αγωγό γύρω από τον άξονά του κατά οποιαδήποτε γωνία ή αν διατρέξουμε το σύρμα κατά μήκος του, το σύστημά μας δεν εμφανίζεται διαφορετικό. Επομένως η διεύθυνση του πεδίου που είναι κάθετη στη διεύθυνση του ρεύματος και του $\hat{r}$ θα είναι κάθετη στην οθόνη και δεν περιμένουμε να εξαρτάται από την γωνία φ ή από το ύψος, παρά μόνο από την απόσταση από το σύρμα r. Άρα εκμεταλλευόμενοι την κυλινδρική συμμετρία μπορούμε να γράψουμε : $\vec{B} = B(r)\hat{\varphi}$



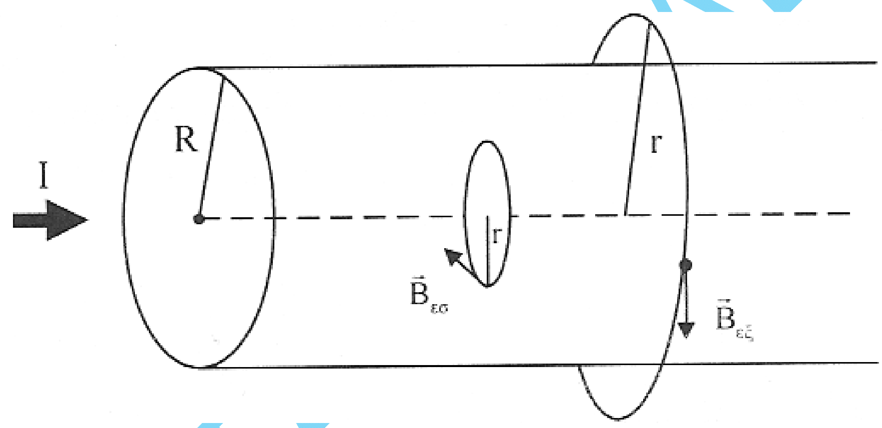
Η επιλογή του κλειστού δρόμου τώρα είναι προφανής : Ένας κύκλος με κέντρο τον αγωγό και ακτίνα r όπως φαίνεται στο σχήμα του πίνακα που ακολουθεί. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα :

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \oint Bdl = \mu_0 I \Rightarrow B\oint dl = \mu_0 I \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Δίνεται κυλινδρικός αγωγός απείρου μήκους και ακτίνας βάσης R που διαρρέεται από ρεύμα I παράλληλα προς τον άξονα συμμετρίας του και ομογενώς κατανεμημένο στη διατομή του. Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο σε κάθε απόσταση.

Λύση



Λόγω συμμετρίας το μαγνητικό πεδίο θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου και θα έχει διεύθυνση εφαπτόμενη προς την παράπλευρη επιφάνειά του.
Έτσι, θεωρούμε ως αμπεριανούς βρόχους κύκλους πάνω στους οποίους η ένταση του μαγνητικού πεδίου έχει σταθερό μέτρο και είναι εφαπτόμενη, οπότε ο Νόμος του Ampère δίνει:

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\varepsilon\sigma} \Rightarrow \oint_c Bdl = \mu_0 I_{\varepsilon\sigma} \Rightarrow B\oint_c dl = \mu_0 I_{\varepsilon\sigma} \Rightarrow B2\pi r = \mu_0 I_{\varepsilon\sigma} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_{\varepsilon\sigma}}{2\pi r} \quad (1)$$

Το ρεύμα συνδέεται με την πυκνότητα ρεύματος μέσω της σχέσης:

$$I = \int_{\delta\iota\alpha\tau o\mu\acute{\eta}} \vec{J}\cdot d\vec{S} \quad \text{κι επειδή } \vec{J}\uparrow\uparrow d\vec{S} \quad \text{είναι: } I = \int_{\delta\iota\alpha\tau o\mu\acute{\eta}} JdS$$

Επειδή επιπλέον $J = σταθ.$ είναι $I = J \int_{διατομή} dS = J\pi R^2 \Rightarrow J = \frac{I}{\pi R^2}$

Για $r < R$ είναι $I_{εσ} = \int_{r<R} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{r<R} J dS = J \int_{r<R} dS = J\pi r^2 = I \frac{r^2}{R^2}$

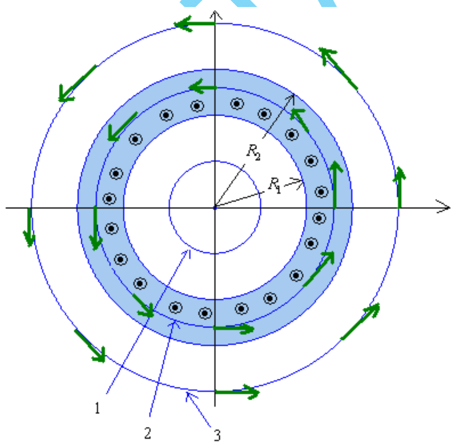
Οπότε η (1) δίνει: $B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$

Για $r > R$ είναι $I_{εσ} = I$, οπότε: $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Δίνεται αγώγιμος κυλινδρικός φλοιός απείρου μήκους με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική ακτίνα R_2 που διαρρέεται από ρεύμα παράλληλα προς τον άξονα συμμετρίας του με πυκνότητα $J(r) = J_0 \left(r / R_1\right)^2$, όπου J_0 σταθερά και r η απόσταση από τον άξονα του κυλινδρικού φλοιού. Να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο σε κάθε απόσταση.

Λύση



Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο θα θεωρήσουμε κατάλληλους αμπεριανούς βρόχους, πάνω στους οποίους το μαγνητικό πεδίο θα έχει σταθερή τιμή κι επιπλέον θα είναι εφαπτόμενο (δες σχήμα).

Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας αυτοί οι αμπεριανοί βρόχοι επιλέγονται να είναι κύκλοι με κέντρο την αρχή των αξόνων (εν γένει πάνω στον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου – κάθετα στη σελίδα).

Α) Για $r < R_1$

Ο Νόμος του Ampere δίνει (στον αμπεριανό βρόχο 1):
$$\oint_{c_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\varepsilon\sigma} = 0 \Rightarrow B = 0$$

Β) Για $R_1 < r < R_2$

Ο Νόμος του Ampere δίνει (στον αμπεριανό βρόχο 2):

$$\oint_{c_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\varepsilon\sigma} \Rightarrow \oint_{c_2} Bdl = \mu_0 \int JdS \Rightarrow B\oint_{c_2} dl = \mu_0 \int_{R_1}^{r} J(r)2\pi r dr \Rightarrow$$

$$B\oint_{c_2} dl = 2\pi\mu_0 \int_{R_1}^{r} J_0 \frac{r^2}{R_1^2} r dr \Rightarrow B2\pi r = 2\pi\mu_0 \frac{J_0}{R_1^2}\int_{R_1}^{r} r^3 dr \Rightarrow$$

$$Br = \mu_0 \frac{J_0}{4R_1^2}\left(r^4 - R_1^4\right) \Rightarrow B = \mu_0 \frac{J_0 R_1^2}{4}\left(\frac{r^3}{R_1^4} - \frac{1}{r}\right)$$

Γ) Για $r > R_2$

Ο Νόμος του Ampere δίνει (στον αμπεριανό βρόχο 3):
$$\oint_{c_3} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\varepsilon\sigma} \Rightarrow \oint_{c_3} Bdl = \mu_0 \int JdS \Rightarrow B\oint_{c_3} dl = \mu_0 \int_{R_1}^{R_2} J(r)2\pi r dr \Rightarrow$$

$$B\oint_{c_3} dl = 2\pi\mu_0 \int_{R_1}^{R_2} J_0 \frac{r^2}{R_1^2} r dr \Rightarrow B2\pi r = 2\pi\mu_0 \frac{J_0}{R_1^2}\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \Rightarrow$$

$$Br = \mu_0 \frac{J_0}{4R_1^2}\left(R_2^4 - R_1^4\right) \Rightarrow B = \mu_0 \frac{J_0 R_1^2}{4r}\left(\frac{R_2^4}{R_1^4} - 1\right)$$

3.ΝΟΜΟΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ ΤΟΥ FARADAY

Αν σε ένα κλειστό βρόχο μεταβάλλεται χρονικά η μαγνητική ροή Φ_B που διέρχεται από την επιφάνεια του, τότε αναπτύσσεται σε αυτόν επαγωγική τάση $\mathcal{E}$, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{(νόμος Faraday)}$$

Η επαγωγική τάση $\mathcal{E}$ έχει ως αποτέλεσμα το κύκλωμα να διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα, το οποίο ονομάζεται επαγωγικό ρεύμα $I_{επ}$ και σύμφωνα με το νόμο του Ohm είναι:

$$\boxed{I_{επ} = \frac{\mathcal{E}}{R}}$$

όπου R είναι η αντίσταση του κυκλώματος.

◈ **Μεταφορική κίνηση ράβδου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο.**

Έστω η ράβδος μήκους ℓ του σχήματος η οποία κινείται με σταθερή ταχύτητα υ κάθετα στις μαγνητικές δυναμικές γραμμές ενός σταθερού μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$. Τότε στα άκρα της ράβδου, σύμφωνα με το νόμο του Faraday, αναπτύσσεται επαγωγική τάση που το μέτρο της δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\mathcal{E} = B\upsilon\ell} \quad (1)$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz στην ράβδο ασκείται μια δύναμη Laplace:

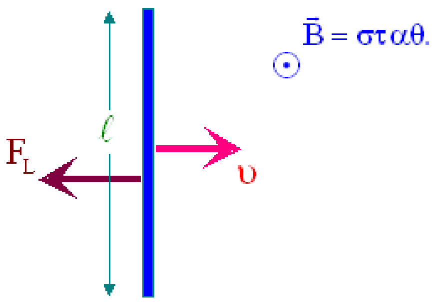
$$F = BI_{επ}\ell$$

αντίθετα στην κίνηση της. Όπου:

$$I_{επ} = \frac{\mathcal{E}}{R} \overset{(1)}{=} \frac{B\upsilon\ell}{R}$$

Άρα:

$$\boxed{F_L = \frac{B^2\ell^2\upsilon}{R}}$$

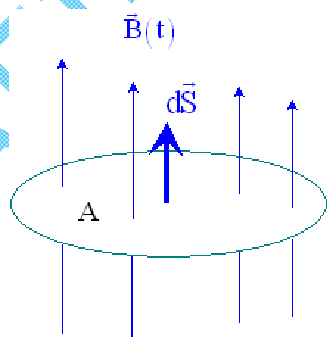


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Συρμάτινο κυκλικό πλαίσιο εμβαδού Α βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο με το επίπεδο του κάθετο στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Η ένταση του πεδίου μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $B = B_o \sin \omega t$, όπου $\omega = 300\,\text{sec}^{-1}$. Να βρεθεί η έκφραση της ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο πλαίσιο.

Λύση:



Η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του πλαισίου σε μια τυχαία χρονική στιγμή t, είναι:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad \Phi_B = \int B \cancelto{1}{\cos 0}\, dS \quad \Rightarrow$$

$$\Phi_B = \int_S B dS \quad \Rightarrow$$

$$\Phi_B = B_o \sin \omega t \int_S dS \quad \Rightarrow \quad \Phi_B = A B_o \sin \omega t \quad (1)$$

Προσέξτε ότι κάθε χρονική στιγμή t το μαγνητικό πεδίο Β έχει την ίδια τιμή σε όλη την επιφάνεια του πλαισίου. Άρα σύμφωνα με το νόμο του Faraday η επαγόμενη ΗΕΔ στο πλαίσιο είναι:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \overset{(1)}{=} -\frac{d}{dt}\left(A B_o \sin \omega t\right) \quad \Rightarrow$$

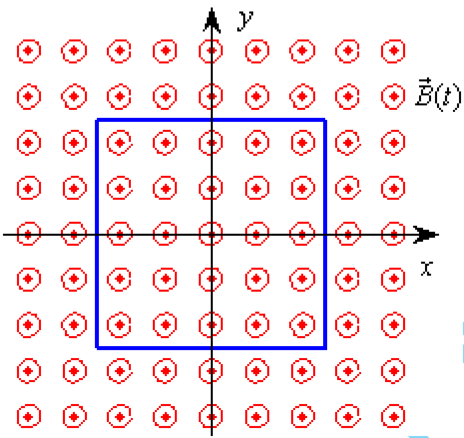
$$\mathcal{E} = -A B_o \frac{d}{dt}\left(\sin \omega t\right) = -A B_o \omega \cos \omega t \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{E} = -300 A B_o \cos(300t)\, \text{Vo}\ell\text{t}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ας θεωρήσουμε ένα ομογενές αλλά χρονομεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}(t) = B_0(1-ct)\hat{k}$, όπου B_0, c θετικές σταθερές. Στο επίπεδο xy βρίσκεται συρμάτινο τετράγωνο πλαίσιο πλευράς a και ολικής αντίστασης R με κέντρο την αρχή των αξόνων. Να βρεθεί η φορά και το μέτρο του επαγόμενου ρεύματος.

Λύση



Το πεδίο είναι χωρικά ομογενές, δηλ. ίδιο σε κάθε σημείο του χώρου, αλλά χρονικά μεταβαλλόμενο:

$$\vec{B}(t) = B_0(1-ct)\hat{k}$$

Η μαγνητική ροή μέσα από το πλαίσιο είναι:

$$\Phi_B = \oint_{\pi\lambda\alpha\acute{\iota}\sigma\iota o} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \vec{B}\cdot \oint_{\pi\lambda\alpha\acute{\iota}\sigma\iota o} d\vec{S} \Rightarrow$$

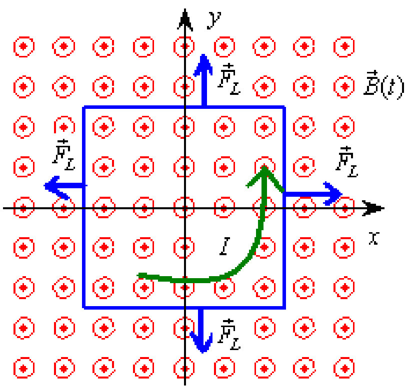
$$\Phi_B = B_0(1-ct)\hat{k}\cdot\alpha^2\hat{k} = B_0\alpha^2(1-ct)$$

Επειδή η μαγνητική ροή είναι χρονικά μεταβαλλόμενη επάγεται σύμφωνα με το νόμο του Faraday ΗΕΔ $\mathcal{E}$ εξ' επαγωγής στο πλαίσιο ίση με:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[B_0\alpha^2(1-ct)\right] = \frac{d}{dt}\left[B_0\alpha^2 ct\right] \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = B_0 c\alpha^2}$$

Εφόσον το πλαίσιο έχει συνολική αντίσταση R διαρρέεται από ρεύμα έντασης:

$$\boxed{I = \mathcal{E}/R \Rightarrow I = \frac{B_0 c\alpha^2}{R}}$$



Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, η φορά του ρεύματος πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να τείνει να αναιρέσει τη μεταβολή της μαγνητικής ροής. Επειδή η μαγνητική ροή μειώνεται λόγω της μείωσης του μαγνητικού πεδίου, το ρεύμα πρέπει να έχει φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού (ένα τέτοιο ρεύμα με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού δημιουργεί μαγνητικό πεδίο με κατεύθυνση προς τα θετικά z και άρα τείνει να αυξήσει τη μαγνητική ροή). Ισοδύναμα, αν υπολογίσουμε την δύναμη Laplace $\vec{F}_L = I\vec{l} \times \vec{B}$ που ασκείται σε κάθε πλευρά του πλαισίου θα δούμε ότι αυτή σπρώχνει κάθε πλευρά προς τα έξω τείνοντας να αυξήσει την επιφάνεια του πλαισίου και άρα τη μαγνητική ροή που περνά μέσα από αυτό.

ΑΣΚΗΣΗ 3

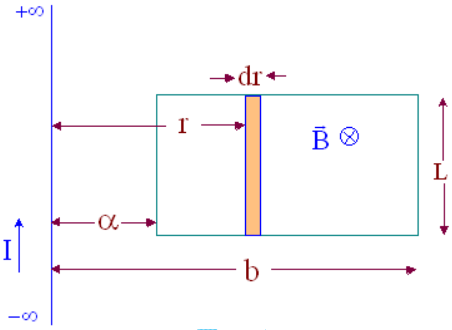
Το ρεύμα που διαρρέει έναν άπειρου μήκους ευθύγραμμο αγωγό έχει φορά προς τα πάνω και αυξάνει με σταθερό ρυθμό dI/dt.

α. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του πεδίου Β σε απόσταση r από τον αγωγό όταν το ρεύμα που τον διαρρέει είναι Ι.

β. Πόση ροή $d\Phi_B$ διαπερνά τη στενή σκασμένη λωρίδα;

γ. Πόση είναι η ολική ροή που διαπερνά το βρόχο;

δ. Βρείτε την επαγόμενη ΗΕΔ στο βρόχο.



ε. Υπολογίστε την αριθμητική τιμή της επαγόμενης ΗΕΔ αν $\alpha = 0,1\text{m}$, $b = 0,3\text{m}$, $L = 0,2\text{m}$ και $dI/dt = 1,2\text{A}/\text{sec}$.

Λύση:

α. Επειδή ο ρευματοφόρος αγωγός είναι ευθύγραμμος και άπειρου μήκους, το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί σε απόσταση r από αυτόν σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού έχει κατεύθυνση κάθετη προς τα μέσα της σελίδας και μέτρο:

$$\boxed{B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}} \quad (1)$$

β. Η ροή που διέρχεται από τη λωρίδα πλάτους dr του βρόχου είναι:

$$d\Phi_B = \vec{B}\cdot d\vec{S} = B\cancel{\cos 0}^{1} dS = BdS \overset{(1)}{\Rightarrow} d\Phi_B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}dS \Rightarrow$$

$$\boxed{d\Phi_B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}Ldr} \quad (2)$$

γ. Η ολική ροή που διαπερνά το βρόχο, είναι:

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \overset{(2)}{\Rightarrow} \Phi_B = \frac{\mu_o I\cdot L}{2\pi}\int_\alpha^b \frac{dr}{r} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Phi_B = \frac{\mu_o I\cdot L}{2\pi}\ell n\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \quad \textbf{(3)}$$

δ. Η επαγόμενη ΗΕΔ στο βρόχο σύμφωνα με το νόμο Faraday είναι:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{\mu_o L}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ell n\left(\frac{b}{\alpha}\right)}$$

ε. Παρατηρούμε ότι:

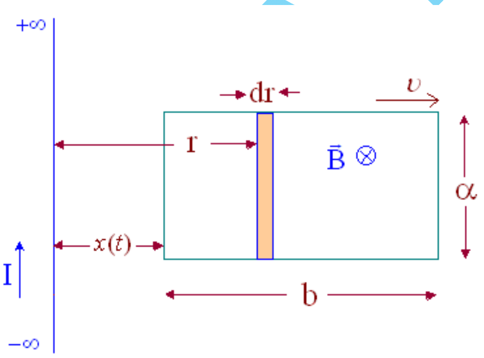
$$\mathcal{E} = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,2}{2\pi} \cdot 1,2\ell n\frac{0,3}{0,1} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{E} = -0,48 \cdot 10^{-7} \cdot \ell n3 Vo\ell t}$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4</u>

Ένα ορθογώνιο συρμάτινο πλαίσιο πλευρών a, b απομακρύνεται με σταθερή ταχύτητα υ από ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα I, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογιστεί η επαγωγική τάση στο πλαίσιο, αν αρχικά η πλησιέστερη προς τον αγωγό πλευρά του πλαισίου απέχει από αυτόν κατά $x(0) = x_0$.

<u>Λύση</u>



Επειδή ο ρευματοφόρος αγωγός είναι ευθύγραμμος και άπειρου μήκους, το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί σε απόσταση r από αυτόν έχει φορά προς το εσωτερικό της σελίδας (με βάση τον κανόνα του δεξιού χεριού) και μέτρο:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (1)$$

Η ταχύτητα του πλαισίου είναι σταθερή και άρα:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \upsilon \int_0^t dt \Rightarrow x(t) = x_0 + \upsilon t \quad (2)$$

Την τυχούσα χρονική στιγμή t η μαγνητική ροή που περνά μέσα από το πλαίσιο είναι:

$$\Phi_B = \oint_{\pi\lambda\alpha\acute{\iota}\sigma\iota o} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint_{\pi\lambda\alpha\acute{\iota}\sigma\iota o} BdS = \int_x^{x+b}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)adr = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\int_x^{x+b}\frac{dr}{r} \Rightarrow$$

$$\Phi_B(t) = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left[\ln r\right]_x^{x+b} = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left[\ln(x+b)-\ln x\right] = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left[\frac{x(t)+b}{x(t)}\right] \Rightarrow$$

$$\Phi_B(t) = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left[1+\frac{b}{x(t)}\right] \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{\Phi_B(t) = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(1+\frac{b}{x_0+\upsilon t}\right)}$$

Άρα, η ΗΕΔ εξ επαγωγής που αναπτύσσεται στο ορθογώνιο πλαίσιο είναι:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\frac{d}{dt}\left[\ln\left(1+\frac{b}{x_0+\upsilon t}\right)\right] = -\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\frac{1}{\left(1+\dfrac{b}{x_0+\upsilon t}\right)}\frac{d}{dt}\left(1+\frac{b}{x_0+\upsilon t}\right) \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\frac{1}{\dfrac{x_0+\upsilon t+b}{x_0+\upsilon t}}\frac{(-b\upsilon)}{(x_0+\upsilon t)^2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{\mu_0 Iab\upsilon}{2\pi(x_0+\upsilon t)(x_0+b+\upsilon t)}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Μια ράβδος ΑΒ μηδενικής αντίστασης και μήκους $\ell = 0,1\text{m}$ κινείται χωρίς τριβές πάνω σε αγώγιμες ράγες, όπως δείχνει το σχήμα. Το σύστημα βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετο στο επίπεδο της σελίδας με κατεύθυνση προς τα μέσα και με μέτρο $\text{B} = 0,6\text{Tesla}$. Η ράβδος κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 2,5\text{m/sec}$ και η ολική αντίσταση του βρόχου είναι $\text{R} = 0,03\Omega$. Να βρεθεί η επαγωγική τάση, το επαγόμενο ρεύμα, η δύναμη που ασκείται στη ράβδο και η μηχανική ισχύς που απαιτείται για να διατηρεί τη ράβδο σε κίνηση.

Λύση:

Η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στα άκρα της ράβδου, είναι:

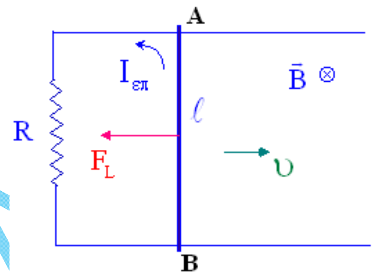
$$\mathcal{E} = \text{B}\upsilon\ell = 0,6\cdot 2,5\cdot 0,1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E} = 0,15\text{Vo}\ell\text{t}}$$

Το επαγόμενο ρεύμα που διαρρέει το βρόχο σύμφωνα με το νόμο του Ohm είναι:

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{0,15}{0,03} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{\varepsilon\pi} = 5A}$$

Αριστερόστροφο σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz

Επειδή η ράβδος διαρρέεται από ρεύμα και κινείται κάθετα σε μαγνητικό πεδίο ασκείται πάνω της δύναμη Laplace με κατεύθυνση αντίθετη στην κίνηση της και μέτρο:



$$F = BI_{\varepsilon\pi}\ell = 0,6 \cdot 5 \cdot 0,1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 0,3Nt}$$

Για να διατηρηθεί η κίνηση της ράβδου με σταθερή ταχύτητα, παρά την ύπαρξη της δύναμης Laplace που αντιστέκεται στην κίνηση της, πρέπει να ασκηθεί εξωτερική δύναμη ίση σε μέτρο και αντίθετης κατεύθυνσης. Επομένως η ισχύς P της δύναμης αυτής που απαιτείται για να διατηρηθεί η κίνηση της ράβδου, είναι:

$$P = F\upsilon = 0,3Nt \cdot 2,5\,{}^{m}\!/_{sec} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 0,75Watt}$$

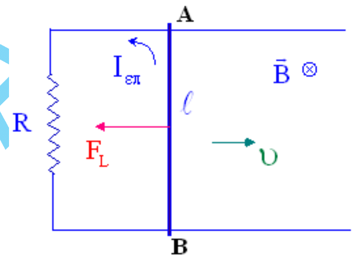
ΑΣΚΗΣΗ 6

Μια ράβδος ΑΒ μηδενικής αντίστασης και μήκους $\ell = 1\text{m}$, κινείται χωρίς τριβές πάνω σε αγώγιμες ράγες, όπως δείχνει το σχήμα. Το σύστημα βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, με κατεύθυνση προς τα μέσα και με μέτρο $B = 0,6\text{Tesla}$. Εξασκούμε δύναμη F και η ράβδος κινείται προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα 4m/sec. Πόση αντίσταση R πρέπει να έχει το κύκλωμα αν η δύναμη F που κινεί τη ράβδο παράγει έργο με ρυθμό 200Watt;

Λύση:

Στη ράβδο αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη:

$$\mathcal{E} = B\upsilon\ell \quad (1)$$



με συνέπεια το κύκλωμα να διαρρέεται από επαγόμενο ρεύμα:

$$I_{επ} = \frac{\mathcal{E}}{R} \overset{(1)}{\Rightarrow} I_{επ} = \frac{B\upsilon\ell}{R} \quad (2)$$

Συνεπώς αφού η ράβδος διαρρέεται από ρεύμα και κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, ασκείται πάνω της δύναμη Laplace, αντίθετη στην κίνηση της (σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz) και μέτρου:

$$F_L = BI_{επ}\ell \overset{(2)}{\Rightarrow} F_L = \frac{B^2\ell^2}{R}\upsilon \quad (3)$$

Άρα για να κινηθεί η ράβδος με σταθερή ταχύτητα, θα πρέπει να ασκούμε εξωτερική δύναμη ίση και αντίθετη της δύναμης Laplace. Δηλαδή η προσφερόμενη μηχανική ισχύς πρέπει να είναι:

$$P = F\upsilon \overset{(3)}{=} \frac{B^2\ell^2}{R}\upsilon\cdot\upsilon \Rightarrow P = \frac{B^2\ell^2\upsilon^2}{R} \Rightarrow R = \frac{B^2\ell^2\upsilon^2}{P} \Rightarrow$$

$$R = \frac{0,6^2\cdot 1^2\cdot 4^2}{200} = \frac{5,76}{200} \Rightarrow \boxed{R = 0,0288\Omega}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Μια ράβδος ΑΒ μηδενικής αντίστασης και μήκους L, κινείται χωρίς τριβές πάνω σε αγώγιμες ράγες, όπως δείχνει το σχήμα. Το σύστημα βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, με κατεύθυνση προς τα μέσα, δηλ. $\vec{B} = -B\hat{k}$. Αν η αρχική ταχύτητα της ράβδου είναι υ_0 να προσδιορίσετε την επαγωγική τάση και την ταχύτητα της ράβδου ως συναρτήσεις του χρόνου.

Λύση

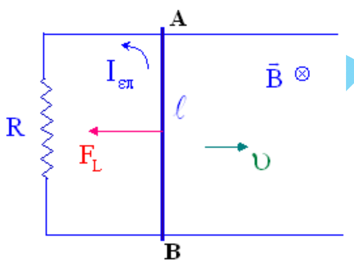
Επειδή η ράβδος κινείται κάθετα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, λόγω του Νόμου του Faraday, αναπτύσσεται στα άκρα της ΗΕΔ εξ' επαγωγής:

$$\mathcal{E} = B\upsilon L$$

κι έτσι διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα: $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I = \dfrac{B\upsilon L}{R}$

Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ασκείται στη ράβδο δύναμη Laplace με φορά αντίθετη της κίνησης (λόγω του κανόνα του Lenz) και με μέτρο:

$$F_L = BIL = \frac{B^2L^2\upsilon}{R}$$



Η δύναμη Laplace επιβραδύνει τη ράβδο και ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -F_L = ma \Rightarrow$$

$$-\frac{B^2L^2}{R}\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{B^2L^2}{mR}\upsilon \quad (1)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση παίρνουμε:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{B^2L^2}{mR}\upsilon \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{B^2L^2}{mR}\int_0^t dt \Rightarrow [\ln\upsilon]_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -\underbrace{\frac{B^2L^2}{mR}}_{1/\tau}t \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_0}\right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow \frac{\upsilon}{\upsilon_0} = e^{-t/\tau} \Rightarrow \upsilon(t) = \upsilon_0 e^{-t/\tau}, \text{ όπου } \tau = \frac{mR}{B^2L^2}$$

Η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στα άκρα της ράβδου είναι:

$$\mathcal{E} = B\upsilon L \Rightarrow \mathcal{E}(t) = BL\upsilon_0 e^{-t/\tau}$$

Συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα και η επαγωγική τάση μειώνονται εκθετικά με το χρόνο τείνοντας να μηδενιστούν μετά από άπειρο χρόνο.

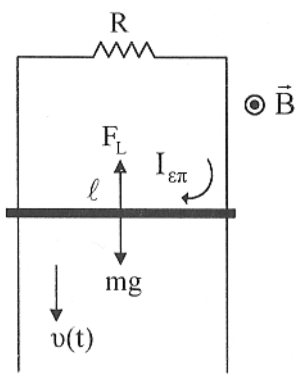
ΑΣΚΗΣΗ 8

Μια ράβδος μήκους L και μάζας m μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε δυο κατακόρυφους ημιάπειρους αγωγούς οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι με αντίσταση R. Κάθετα στο επίπεδο του αγωγού εφαρμόζεται ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\hat{k}$. Να υπολογιστεί η οριακή ταχύτητα που θα αποκτήσει η ράβδος και η ταχύτητά της ως συνάρτηση του χρόνου. Σε πόσο χρόνο αποκτά η ράβδος την οριακή ταχύτητα;

Λύση

Ο αγωγός αρχικά ($t = 0$) έχει μηδενική ταχύτητα και αρχίζει να κινείται προς τα κάτω υπό την επίδραση του βάρους του. Αποκτά, έτσι, ταχύτητα $\upsilon(t)$ κι επειδή κινείται κάθετα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, λόγω του Νόμου του Faraday, αναπτύσσεται στα άκρα του ΗΕΔ εξ' απαγωγής $\mathcal{E} = B\upsilon L$ κι έτσι διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα $I = \mathcal{E}/R \Rightarrow I = B\upsilon L/R$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ασκείται στη ράβδο (εκτός από το βάρος της) δύναμη Laplace με φορά αντίθετη της κίνησης (λόγω του κανόνα του Lenz) και με μέτρο:

$$F_L = BIL = \frac{B^2L^2\upsilon}{R}$$



Ο 2ος Νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow B - F_L = ma$$

$$mg - \frac{B^2L^2}{R}\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = g - \frac{B^2L^2}{mR}\upsilon \Rightarrow$$

$$\frac{mR}{B^2L^2}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{mgR}{B^2L^2} - \upsilon \quad (1)$$

Όσο η ταχύτητα πτώσης της ράβδου αυξάνεται, η δύναμη Laplace επίσης αυξάνεται κι έτσι η πτώση της ράβδου γίνεται με ολοένα και μικρότερη επιτάχυνση. Αν υποθέσουμε ότι είναι δυνατό σε κάποια χρονική στιγμή η ταχύτητά του να πάρει τέτοια τιμή, ώστε η δύναμη Laplace να εξουδετερώσει το βάρος, τότε η ράβδος θα σταματήσει πλέον να επιταχύνεται και θα συνεχίσει την πτώση της με τη σταθερή οριακή ταχύτητα $\upsilon_{op} = \upsilon_{\max}$:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{mgR}{B^2L^2} - \upsilon_{op} = 0 \Leftrightarrow \upsilon_{op} = \frac{mgR}{B^2L^2} \quad (2)$$

Σε μια τυχαία χρονική στιγμή μπορούμε να γράψουμε την (1) με τη βοήθεια της (2) ως:

$$\frac{mR}{B^2L^2}\frac{d\upsilon}{dt} = \upsilon_{op} - \upsilon > 0$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση παίρνουμε:

$$\frac{mR}{B^2L^2}\int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon_{op} - \upsilon} = \int_0^t dt \Rightarrow \frac{mR}{B^2L^2}\left[-\ln\left(\upsilon_{op} - \upsilon\right)\right]_0^{\upsilon} = t \Rightarrow$$

$$\left[\ln\left(\upsilon_{op} - \upsilon\right)\right]_0^{\upsilon} = -\frac{B^2L^2}{mR}t \Rightarrow \ln\left(\upsilon_{op} - \upsilon\right) - \ln\upsilon_{op} = -\frac{B^2L^2}{mR}t \Rightarrow$$

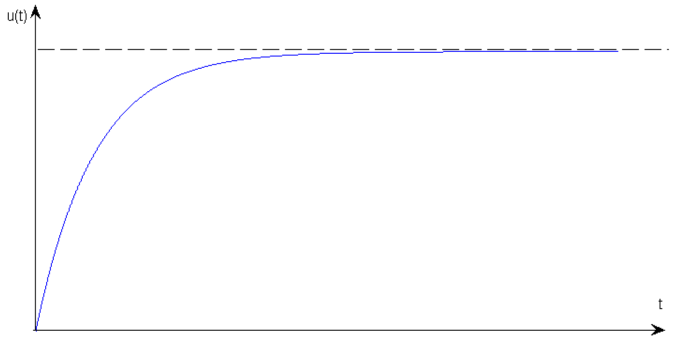
$$\ln\left(\frac{\upsilon_{op} - \upsilon}{\upsilon_{op}}\right) = -\underbrace{\frac{B^2L^2}{mR}}_{1/\tau}t \Rightarrow \frac{\upsilon_{op} - \upsilon}{\upsilon_{op}} = e^{-t/\tau} \Rightarrow \upsilon_{op} - \upsilon = \upsilon_{op}e^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$\upsilon = \upsilon_{op} - \upsilon_{op}e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{\upsilon(t) = \upsilon_{op}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \text{ (4), όπου } \boxed{\tau = \frac{mR}{B^2L^2}}$$

Αρχικά είναι $\upsilon(0) = \upsilon_{op}\left(1 - e^{-0/\tau}\right) = \upsilon_{op}\left(1 - 1\right) = 0$. Η ταχύτητα στη συνέχεια αυξάνεται και πλησιάζει ασυμπτωτικά την τιμή υ_{op} αλλά αυστηρά δε θα τη φτάσει παρά μόνο μετά από άπειρο χρόνο:

$$\lim_{t\to\infty}\upsilon(t) = \lim_{t\to\infty}\upsilon_{op}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \upsilon_{op}\left(1 - 0\right) = \upsilon_{op}$$

Ωστόσο, σε χρόνο ίσο με $t = 5\tau$ θα την έχει αποκτήσει <u>πρακτικά</u>, αφού τότε: $\upsilon(t) = \left(1 - e^{-5}\right)\upsilon_{op} = 0{,}993\cdot\upsilon_{op}$, δηλ. η ράβδος θα έχει ταχύτητα ίση με το 99.3% της οριακής τιμής.



ΑΣΚΗΣΗ 9

Θεωρείστε ότι ο άξονας x διαρρέεται από ρεύμα I με φορά τη θετική φορά του άξονα. Ευθύγραμμος συρμάτινος αγωγός μήκους *L*, παράλληλος προς τον άξονα y κινείται με ταχύτητα $\vec{u} = u_0 \hat{i}$ (με $u_0 > 0$). Ο αγωγός εκτείνεται από το $y = a$ μέχρι το $y = a + L$.

A) Να υπολογίσετε την ΗΕΔ εξ' επαγωγής στον αγωγό

B) Ποιο άκρο της ράβδου αποκτά χαμηλότερο δυναμικό;

Λύση

Όπως, γνωρίζουμε από τη θεωρία, σε μια ράβδος μήκους L που κινείται κάθετα σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\hat{k}$ με ταχύτητα $\vec{u} = u_0 \hat{i}$ αναπτύσσεται ΗΕΔ εξ' απαγωγής:

$\mathcal{E} = -Bu_0 L$ (1)

Στο πρόβλημα που μελετάμε, όμως, το μαγνητικό πεδίο δεν είναι χωρικά ομογενές, αφού οφείλεται στο ρεύμα I που διαρρέει άπειρο ευθύγραμμο αγωγό, και δίνεται με βάση τη θεωρία από τη σχέση (6.43) του βιβλίου:

$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$ που στο επίπεδο xy για αγωγό στον x-άξονα γίνεται: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}\hat{k}$

(2)

Άρα, για να υπολογίσουμε την ΗΕΔ εξ' επαγωγής στη ράβδο τη χωρίζουμε σε τμήματα μήκους dy στα οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε τη σχέση (1):

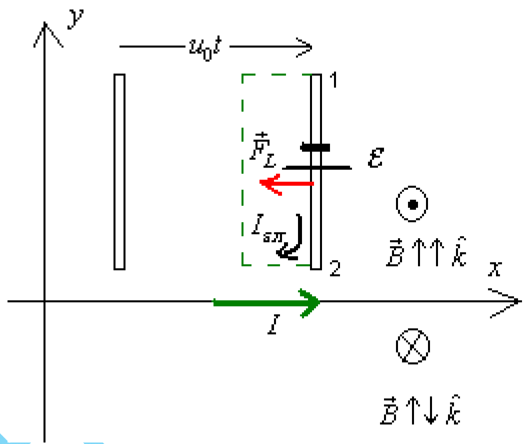
$$d\mathcal{E} = -Bu_0dy \overset{(2)}{=} -\frac{\mu_0 I}{2\pi y}u_0 dy$$

από την οποία με ολοκλήρωση σε όλο το μήκος της ράβδου παίρνουμε:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 I u_0}{2\pi}\int_a^{L+a}\frac{dy}{y} = -\frac{\mu_0 I u_0}{2\pi}\left[\ln y\right]_a^{L+a} = -\frac{\mu_0 I u_0}{2\pi}\left[\ln(L+a) - \ln a\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 I u_0}{2\pi}\ln\left(\frac{L+a}{a}\right)}$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι το δυναμικό στο σημείο 1 είναι μικρότερο από αυτο στο σημείο 2. Αυτό οφείλεται στο ότι λόγω της κίνησης της ράβδου με ταχύτητα $\vec{u} = u_0\hat{i}$ ασκείται στα φορτία της μαγνητική δύναμη: $\vec{F} = q\vec{u}\times\vec{B} = qu_0B\hat{i}\times\hat{k} = -qu_0B\hat{j}$ που ωθεί τα θετικά φορτία προς τα κάτω, ενώ τα αρνητικά προς τα πάνω με αποτέλεσμα το σημείο 1 να είναι σε μικρότερο δυναμικό από το σημείο 2.

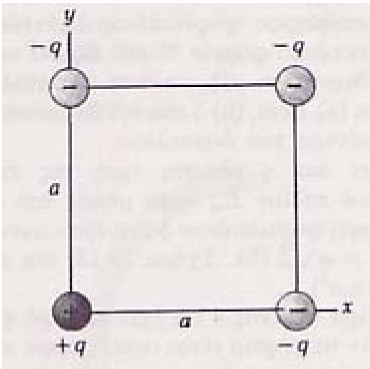


Αυτό μπορεί επίσης να βρεθεί και με τον κανόνα του Lenz: αν κλείσουμε τα άκρα με τη βοήθεια καλωδίου, δηλ. δημιουργήσουμε κύκλωμα, τότε η ράβδος θα διαρρέεται από ρεύμα που θα έχει τέτοια φορά ώστε να τείνει να αναιρέσει την κίνησή της, ή με άλλα λόγια ώστε η μαγνητική δύναμη που θα ασκηθεί στη ράβδο να είναι αντίθετη από την κίνησή της: $\vec{F}_L \uparrow\downarrow \vec{u}$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

1.1. Τέσσερα σημειακά φορτία βρίσκονται στις κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς α, όπως στο Σχήμα. Βρείτε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο θετικό φορτίο q.



1.2. Ένα φορτίο q_1 = +3,4 μC βρίσκεται στο σημείο x= +2m, y= +2m και ένα δεύτερο q_2 = + 2,7 μC στο σημείο x=-4 m, y=-4m. Πού πρέπει να τοποθετηθεί ένα τρίτο φορτίο (q_3>0) ώστε η συνισταμένη δύναμη που ασκείται επάνω του να είναι μηδενική;

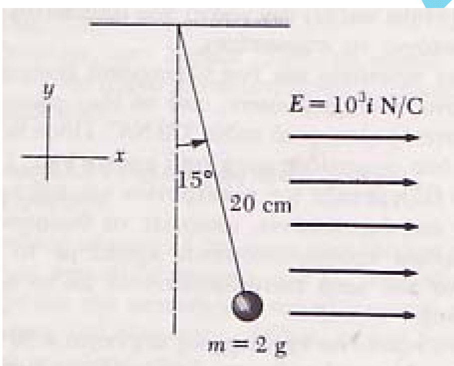
1.3. Ένα σώμα έχει ολικό φορτίο 24μC και τοποθετείται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο 610 N/C που έχει κατακόρυφη διεύθυνση. Ποια είναι η μάζα του σώματος, αν αυτό “αιωρείται” στο ηλεκτρικό πεδίο;

1.4. Δύο ίσα σημειακά φορτία μέτρου 2,0 μC το καθένα βρίσκονται πάνω στον άξονα x. Το πρώτο βρίσκεται στο σημείο x= 1,0 m και το δεύτερο στο σημείο x=-1,0 m. **α)** Προσδιορίστε το ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα y και στο σημείο y= 0,5m.
β) Υπολογίστε την ηλεκτρική δύναμη που θα ασκηθεί σε ένα τρίτο φορτίο, -3,0 μC, το οποίο τοποθετείται στον άξονα y και στο σημείο y=0,5 m.

(Απ. **α)** $\vec{E} = 1{,}29 \cdot 10^4 \dfrac{N}{Cb}\vec{j}$, **β)** $\vec{F} = -2{,}93 \cdot 10^{-2}\, N\vec{j}$)

1.5. Ένα ηλεκτρόνιο εκτοξεύεται υπό γωνία 30^o πάνω από το οριζόντιο επίπεδο, με ταχύτητα 8,2 × 10^5 m/s, μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = 390\vec{j}$ N/C. Αγνοήστε τη βαρύτητα και βρείτε:
α) τον χρόνο που απαιτείται ώστε το ηλεκτρόνιο να επιστρέψει στο αρχικό του ύψος **β)** το μέγιστο ύψος που έφτασε το ηλεκτρόνιο, και
γ) την οριζόντια μετατόπισή του, όταν αυτό φτάσει στο μέγιστο ύψος.

1.6. Ένα μικρό πλαστικό σφαιρίδιο μάζας 2 g αναρτάται από νήμα μήκους 20 cm μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Αν το σφαιρίδιο ισορροπεί, όταν το νήμα σχηματίζει γωνία 15^o με την κατακόρυφο στη θέση που φαίνεται στο σχήμα, ποιο είναι το καθαρό (ή ολικό) φορτίο του σφαιριδίου;



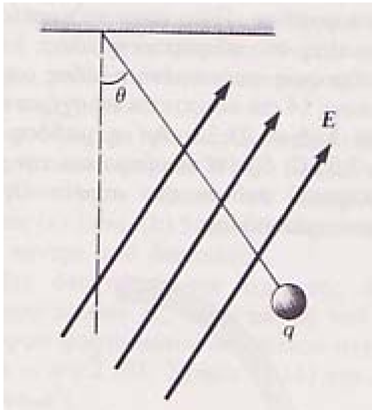
1.7. Δύο μικρές σφαίρες μάζας m η καθεμιά αναρτώνται από ελαφρά νήματα μήκους ℓ που συνδέονται στο άλλο άκρο από το ίδιο σημείο. Η μια σφαίρα έχει φορτίο Q και η άλλη 2Q. Υποθέστε ότι οι γωνίες θ_1 και θ_2 που σχηματίζουν τα νήματα με την κατακόρυφο είναι μικρές.
α) Ποια σχέση συνδέει τις γωνίες θ_1 και θ_2 ;
β) Αποδείξτε ότι η απόσταση r μεταξύ των σφαιρών είναι :

$$r \cong \left(\frac{4KQ^2\ell}{mg}\right)^{1/3}$$

(Απ. **α)** $\theta_1 = \theta_2$)

1.8. Ένα φορτισμένο σφαιρίδιο από φελλό μάζας 1g αναρτάται με ελαφρό νήμα στην περιοχή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα.

Όταν $\vec{E} = (3\vec{i} + 5\vec{j}) \times 10^5$ N/C, το σφαιρίδιο ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία θ=37°. Βρείτε **α)** το φορτίο του σφαιριδίου και **β)** την τάση του νήματος.



(Απ. **α)** q= 10,9nCb, **b)** T= $5{,}43 \cdot 10^{-3}$ Nt)

1.9. Δύο ίσα θετικά φορτία q βρίσκονται κατά μήκος του άξονα x στα σημεία x= α και x=-α.

α) Αποδείξτε ότι το πεδίο σε ένα σημείο του άξονα y έχει τη διεύθυνση του άξονα και δίνεται από τη σχέση $E_y=2Kqy(y^2+a^2)^{-3/2}$.

β) Προσδιορίστε το πεδίο σε ένα σημείο του άξονα y με y >> α και εξηγήστε το αποτέλεσμα που θα βρείτε.

γ) Αποδείξτε ότι το πεδίο είναι μέγιστο στα σημεία $y=\pm \alpha/\sqrt{2}$ (Υπόδειξη: Όταν η E_y είναι μέγιστη, τότε $dE_y/dy=0$).

1.10. Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\alpha\vec{i}+b\vec{j}$ τέμνει μία επιφάνεια εμβαδού Α. Ποια είναι η ροή που διέρχεται από αυτήν την επιφάνεια, αν η επιφάνεια βρίσκεται :

α) στο επίπεδο yz,

β) στο επίπεδο xz, και

γ) στο επίπεδο xy.

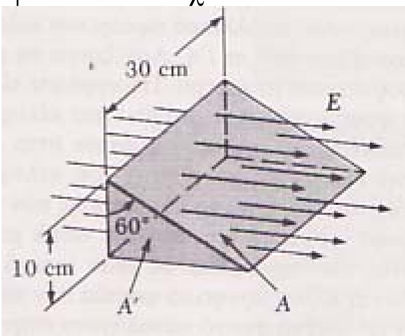
(Απ. **α)** Φ=αA, **β)** Φ=bA, **γ)** Φ=0)

1.11. Θεωρήστε ότι το κλειστό δοχείο του Σχήματος βρίσκεται μέσα στο οριζόντιο ηλεκτρικό πεδίο $E=7{,}8 \times 10^4$ N/C. Υπολογίστε την ηλεκτρική ροή που διέρχεται μέσα από την :

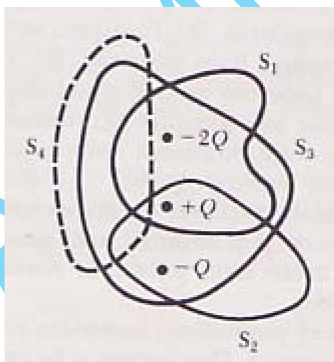
α) αριστερή κατακόρυφη επιφάνεια (Α΄),

β) από την κεκλιμένη επιφάνεια (Α), και

γ) από τη συνολική επιφάνεια του δοχείου.



1.12. Στο Σχήμα απεικονίζονται τέσσερις κλειστές επιφάνειες S_1 ως S_4 και τα φορτία -2Q, + Q και –Q. Βρείτε την ηλεκτρική ροή που διέρχεται από καθεμιά επιφάνεια.



1.13. Ένα φορτίο 170μC βρίσκεται στο κέντρο ενός κύβου ακμής 80cm.

α) Βρείτε την ολική ροή που διέρχεται από κάθε έδρα του κύβου.

β) Βρείτε την καθαρή ροή που διέρχεται από την συνολική επιφάνεια του κύβου.

γ) Οι απαντήσεις σας στην (α) ή (β) μεταβάλλονται αν το φορτίο δεν βρίσκεται στο κέντρο;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

1.14. Η ολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μια κλειστή κυλινδρική επιφάνεια είναι $8{,}60 \times 10^4 \,\mathrm{N \cdot m^2/C}$.

α) Ποιο είναι το καθαρό φορτίο μέσα στον κύλινδρο;

β) Τι μπορείτε να συμπεράνετε από τα δεδομένα για το φορτίο μέσα στον κύλινδρο; **γ)** Πως θα μεταβληθούν οι απαντήσεις σας στις **(α)** και **(β)** αν η ολική ηλεκτρική ροή ήταν $-8{,}60 \times 10^4$ $N \cdot m^2/C$;

(Απ. **α)** q=761nCb , **β)** q>0, **γ)** q=-761nCb)

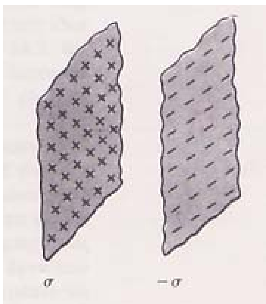
1.15. Μια συμπαγής σφαίρα ακτίνας 40 cm έχει ολικό θετικό φορτίο 26 μC, ομοιόμορφα κατανεμημένο σε ολόκληρο τον όγκο της. Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στις παρακάτω αποστάσεις από το κέντρο της σφαίρας:
α) 0 cm, **β)** 10 cm, **γ)** 40 cm και **δ)** 60 cm.

(Απ. **α)** E=0 , **β)** $E=3{,}66 \cdot 10^5 \ \frac{N}{Cb}$, **γ)** $E=1{,}46 \cdot 10^6 \ \frac{N}{Cb}$, **δ)** $E=6{,}5 \cdot 10^5 \ \frac{N}{Cb}$)

1.16. Μια κοίλη μονωτική σφαίρα έχει σταθερή πυκνότητα φορτίου ρ. Η εσωτερική και εξωτερική ακτίνα της είναι a και b, αντίστοιχα. Χρησιμοποιήσετε τον νόμο του Gauss για να προσδιορίσετε τις σχέσεις που δίνει το ηλεκτρικό πεδίο στις περιοχές **α)** r<α, **β)** α<r<b και **γ)** r>b.

(Απ. **α)** E=0, **β)** $E=\frac{\rho(r^3-a^3)}{3\varepsilon_o r^2}$, **γ)** $E=\frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_o r^2}$)

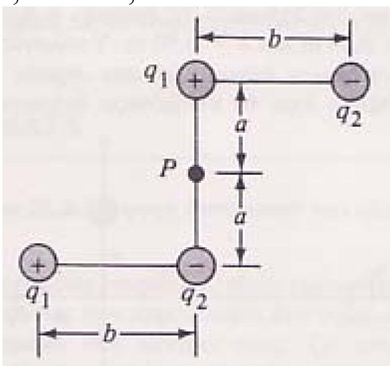
1.17. Δύο φορτισμένα μονωτικά φύλλα άπειρων διαστάσεων είναι παράλληλα μεταξύ τους, όπως δείχνει και το Σχήμα. Το αριστερό φύλλο έχει σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου +σ και το δεξιό φύλλο –σ. Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε σημεία που βρίσκονται :
α) αριστερά των δύο φύλλων, **β)** στην μεταξύ τους περιοχή και **γ)** δεξιά από αυτά.



1.18. Ένα ηλεκτρόνιο κινείται παράλληλα προς τον άξονα x και έχει αρχική ταχύτητα $3{,}7 \times 10^6$ m/s στην αρχή του άξονα. Η ταχύτητα του ηλεκτρονίου ελαττώνεται σε $1{,}4 \times 10^5$ m/s στο σημείο x= 2cm.Υπολογίστε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ της αρχής των συντεταγμένων και του σημείου x=2 cm. Ποιο σημείο βρίσκεται σε υψηλότερο δυναμικό;

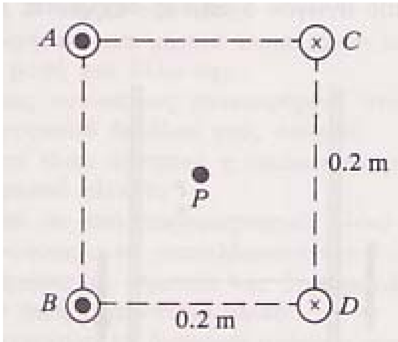
(Απ. ΔV= - 38,9 Volt)

1.19. Υπολογίστε την τιμή του δυναμικού στο σημείο P που οφείλεται στη διάταξη των φορτίων του Σχήματος. Χρησιμοποιήστε τις τιμές q_1=5 μC, q_2= -10 μC, α=0,4 m, και b=0,5 m.

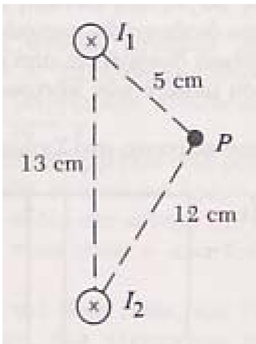


2. ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΗ

2.1. Τέσσερεις αγωγοί μεγάλου μήκους είναι παράλληλοι μεταξύ τους και διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I=5A. Μια προβολή σε κάθετο επίπεδο προς τους αγωγούς φαίνεται στο Σχήμα. Η φορά των ρευμάτων στα σημεία A και B είναι προς τα επάνω της σελίδας (αυτό δείχνουν οι κουκίδες στο σχήμα) και προς τα κάτω της σελίδας στα σημεία C και D (αυτό δείχνουν οι σταυροί του σχήματος). Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P, που βρίσκεται στο κέντρο του τετραγώνου πλευράς 0,2 m.



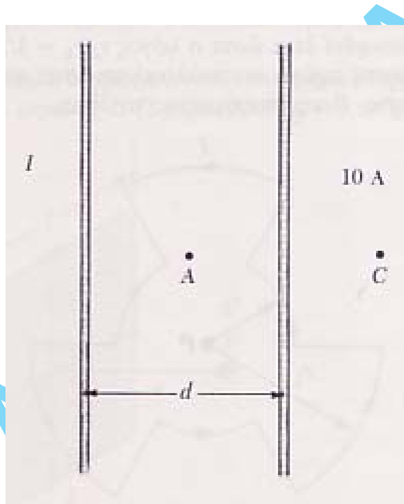
2.2. Δύο παράλληλοι αγωγοί μεγάλου μήκους διαρρέονται από ρεύματα I_1=3 A και I_2=3 A και αμφότερα έχουν φορά προς τα κάτω της σελίδας, όπως στο Σχήμα. Οι αγωγοί έχουν μεταξύ τους απόσταση 13 cm. Προσδιορίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του συνιστάμενου μαγνητικού πεδίου στο σημείο P, το οποίο απέχει 5 cm από το I_1 και 12 cm από το I_2.



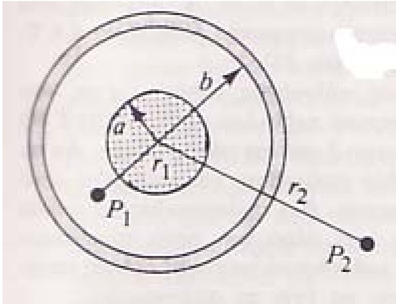
2.3. Κυλινδρικός αγωγός ακτίνας R=2,5 cm διαρρέεται κατά μήκος του από ρεύμα I=2,5 A. Το ρεύμα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο καθ' όλη τη διατομή του αγωγού. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στο μέσο της ακτίνας του σύρματος (δηλαδή, στο r=R/2). Στον αγωγό που περιγράφηκε παραπάνω βρείτε την απόσταση πέρα από την επιφάνεια του αγωγού, στην οποία το μέτρο του μαγνητικού πεδίου έχει την ίδια τιμή με το μέτρο του πεδίου στο r=R/2.

(Απ. $B_{(R/2)}=\frac{\mu_o I}{4\pi R}=10^{-7}T$, r =5cm)

2.4. Δύο παράλληλοι αγωγοί διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Ο ένας αγωγός διαρρέεται από ρεύμα 10 A. Το σημείο A βρίσκεται στο μέσον της απόστασης μεταξύ των αγωγών και το σημείο C βρίσκεται δεξιά του αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα 10 A και απέχει από αυτόν d/2. Αν d=18 cm και το I ρυθμίζεται έτσι ώστε το μαγνητικό πεδίο στο C να είναι μηδενικό, βρείτε **(α)** την τιμή του ρεύματος I και **(β)** την τιμή του μαγνητικού πεδίου στο A.



2.5. Θεωρήστε ότι μια ομοαξονική διάταξη έχει ένα σύρμα ακτίνας a κατά μήκος του άξονα ενός κυλινδρικού λεπτού κελύφους ακτίνας b, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Το ρεύμα έχει φορά προς τα κάτω της σελίδας του βιβλίου στο κεντρικό σύρμα και επιστρέφει προς τα επάνω της σελίδας κατά μήκος του κυλίνδρου. Αν I=5 A, α=0,6 cm, και b=1,2 cm, υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο **(α)** στο σημείο P_1, σε απόσταση r_1 =1 cm, και **(β)** στο σημείο P_2, σε απόσταση r_2=2,4 cm από το κέντρο διατομής του σύρματος.


b
a
r_1
r_2
P_1
P_2

3. ΝΟΜΟΣ FARADAY

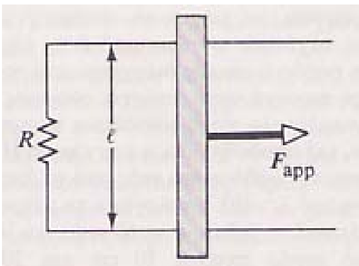
3.1. Ένα επίπεδο συρμάτινο πλαίσιο με 10 σπείρες, η καθεμιά από τις οποίες έχει επιφάνεια $14cm^2$, είναι κάθετο σε μαγνητικό πεδίο του οποίου το μέτρο μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με τη σχέση $B=(0{,}5T)\sin(60\pi t)$. Ποια είναι η εξ επαγωγής ΗΕΔ που θα εμφανιστεί στο πλαίσιο συναρτήσει του χρόνου;

3.2. Ορθογώνιο πλαίσιο εμβαδού A τοποθετείται σε μία περιοχή όπου το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο του πλαισίου. Το μέτρο του πεδίου αρχίζει να μεταβάλλεται ως προς τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση $B=B_o e^{-t/\tau}$, όπου τα B_o και τ είναι σταθερές. Το πεδίο έχει την τιμή B_o όταν $t \leq 0$.
α) Χρησιμοποιήστε το νόμο του Faraday για να αποδείξετε ότι η εξ απαγωγής ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο πλαίσιο είναι:

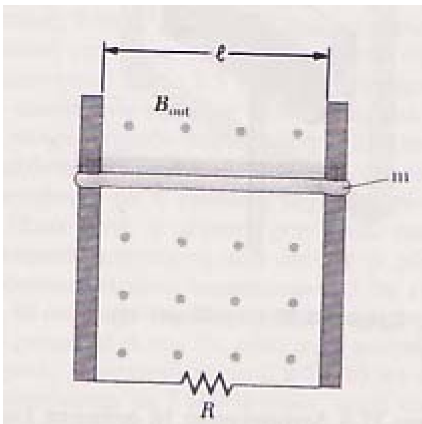
$$\varepsilon = \frac{AB_o}{\tau} e^{-t/\tau}$$

β) Υπολογίστε την αριθμητική τιμή της ε σε χρόνο t=4s, όταν $A=0{,}16\ m^2$, $B_o=0{,}35$ T και τ=2s.
γ) Για τις τιμές των A, B_o και τ που δόθηκαν στο (β), ποια είναι η μέγιστη τιμή της ε;

3.3. Θεωρήστε ότι έχουμε τη διάταξη που φαίνεται στο σχήμα. Υποθέστε ότι R=6Ω, ℓ=1,2m και ότι ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο 2,5T κατευθύνεται προς τα κάτω της σελίδας. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινείται η ράβδος ώστε να παράγει επαγόμενο ρεύμα ίσο με 0,5A στην αντίσταση R;



3.4. Ένα οριζόντιο σύρμα είναι ελεύθερο να ολισθαίνει κατά μήκος δύο κατακόρυφων ράβδων από αγώγιμο υλικό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύρμα έχει μάζα *m* και μήκος ℓ και η αντίσταση του κυκλώματος είναι R. Αν ένα ομογενές μαγνη-



τικό πεδίο είναι κάθετο στην ανωτέρω διάταξη και κατευθύνεται προς τα έξω της σελίδας του βιβλίου, ποια είναι η οριακή (σταθερή) ταχύτητα του σύρματος καθώς αυτό πέφτει υπό την επίδραση της δύναμης της βαρύτητας; (Μη λάβετε υπ' όψιν τη μηχανική τριβή).