ΡΕΥΣΤΟΣΤΑΤΙΚΗ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

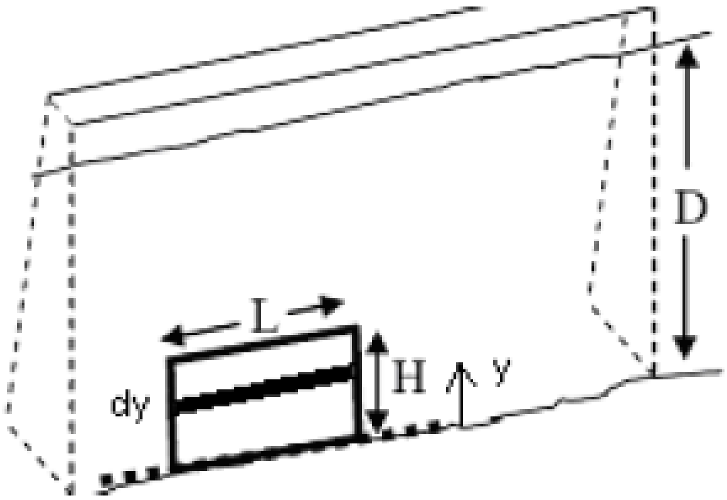
Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Άσκηση 1

Φράγμα το οποίο συγκρατεί νερό βάθους D = 30m έχει κοντά στον πυθμένα πύλες εκκένωσης ύψους H = 2m και μήκους L = 3m. Υπολογίστε: α) την συνολική δύναμη που ασκείται σε κάθε πύλη και β) την ροπή γύρω από άξονα περιστροφής τους (διακεκομμένη γραμμή) που βρίσκεται στην βάση του φράγματος και παράλληλος προς αυτήν.



Λύση

Η πίεση σε τυχαίο βάθος $h = D - y$ είναι:

$$p = p_a + \rho g h = p_a + \rho g (D - y)$$

Άρα, ένα τμήμα της πύλης ύψους dy στο βάθος $h = D - y$ δέχεται από το νερό δύναμη: $dF_1 = pdA$. Από την εσωτερική πλευρά όμως δέχεται από τον αέρα αντίθετη δύναμη μέτρου $dF_2 = p_a dA$ κι έτσι η δύναμη που ασκείται συνολικά στο $dA = L\,dy$ είναι:

$$dF = dF_1 - dF_2 = (p - p_a)dA = \rho g(D - y)dA \Rightarrow dF = \rho g(D - y)Ldy$$

Η συνολική δύναμη που δέχεται η πύλη προκύπτει με ολοκλήρωση:

$$F = \int dF = \rho gL\int_0^H (D - y)dy = \rho gL\left[Dy - \frac{y^2}{2}\right]_0^H = \rho gL\left(DH - \frac{H^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\rho gLH(2D - H)$$

Με αντικατάσταση: $F = \frac{1}{2}\cdot 1000\frac{kg}{m^3}\cdot 9.8\frac{m}{s^2}\cdot 3m\cdot 2m\cdot(60-2)m \simeq 1.7\cdot 10^6 N$

Η στοιχειώδης ροπή ως προς άξονα παράλληλο στο φράγμα στη βάση του είναι:

$$d\tau = ydF = \rho gL\left(Dy - y^2\right)dy$$

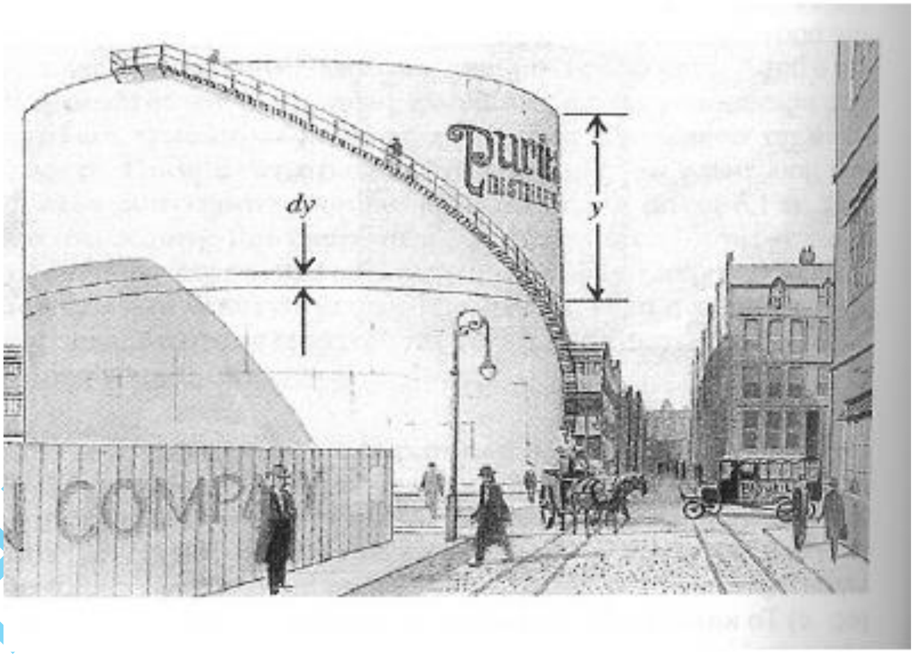
οπότε με ολοκλήρωση:

$$\tau = \int ydF = \rho gL\int_0^H \left(Dy - y^2\right)dy = \rho gL\left[D\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^H \Rightarrow$$

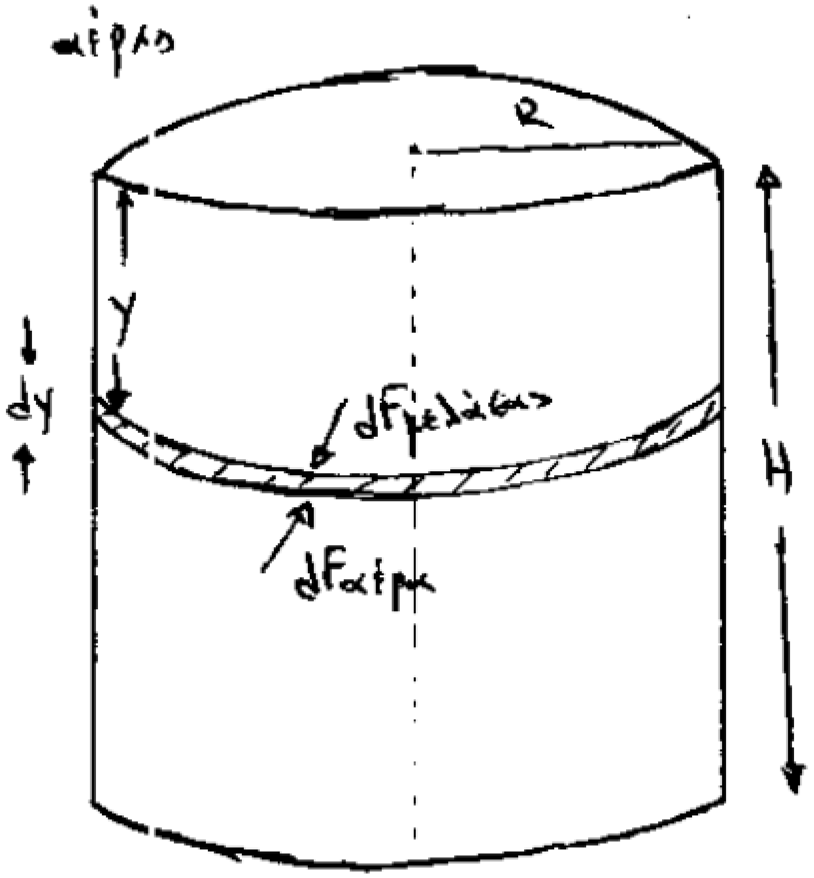
$$\tau = \rho gL\left[\frac{DH^2}{2} - \frac{H^3}{3}\right] = \frac{1}{6}\rho gLH^2(3D - 2H) \simeq 1.7\cdot 10^6 N\cdot m$$

Άσκηση 2

Μία κυλινδρική μεταλλική δεξαμενή ύψους 27.4m και διαμέτρου 27.4m, χρησιμοποιείται για την αποθήκευση μελάσας. Η μελάσα έχει πυκνότητα 1600 kg/m^3. Αν η δεξαμενή είναι πλήρης, πόση είναι η συνολική προς τα έξω δύναμη που ασκεί η μελάσα στην κυλινδρική επιφάνεια; Δίδεται ότι $g = 9.8 m/s^2$.



Λύση



Θεωρούμε μια κυκλική ζώνη της κυλινδρικής δεξαμενής ύψους dy σε βάθος y. Η στοιχειώδης δύναμη που ασκείται σε αυτή από τη μέλασα είναι σύμφωνα με τον ορισμό της πίεσης:

$$P = \frac{dF_{μελάσ.}}{dS} \rightarrow dF_{μελάσ.} = P\,dS \quad \text{αλλά } dS = 2\pi R\,dy \quad \rightarrow dF_{μελάσας} = P\,2\pi R\,dy \quad (1)$$

Σύμφωνα με το νόμο της υδροστατικής πίεσης είναι:

$P = P_o + \rho g y$ οπότε η (1) δίνει:

$dF_{μελάνιου} = (P_o + \rho g y) 2\pi R\, dy$ (με φορά προς τα έξω) (2)

Επίσης ο αέρας έξω από τη δεξαμενή ασκεί στην κυκλική ζώνη μια στοιχειώδη δύναμη με φορά προς τα μέσα:

$dF_{αέρα} = P_o\, dS \rightarrow dF_{αέρα} = P_o 2\pi R\, dy$ (3)

Άρα η ολική στοιχειώδη δύναμη στην κυκλική αυτή ζώνη είναι:

$$dF_{ολ} = dF_{μελάνιου} - dF_{αέρα} \overset{(2)(3)}{=} (\cancel{P_o} + \rho g y) 2\pi R\, dy - \cancel{P_o 2\pi R\, dy} \rightarrow$$

$$\rightarrow dF_{ολ} = 2\pi R \rho g y\, dy \quad (4)$$

Συνεπώς η ολική δύναμη σε όλη την κυλινδρική επιφάνεια είναι:

$$F = \int dF_{ολ} \overset{(4)}{=} 2\pi R \rho g \int_0^H y\, dy = \cancel{2}\pi R \rho g \frac{H^2}{\cancel{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{F = \pi R \rho g H^2}$$

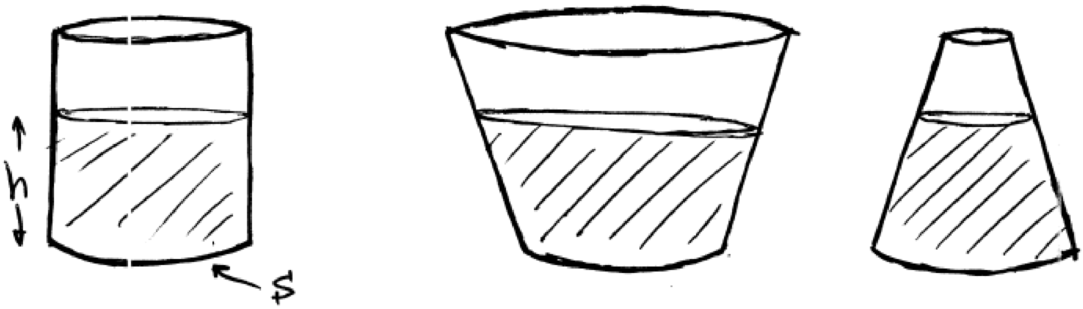
Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές: $R = \frac{27,4}{2} m = 13,7 m$, $\rho = 1600\ kg/m^3$, $g = 9,8\ m/sec^2$ και $H = 27,4 m$ προκύπτει:

$$F = 3,14 \cdot 13,7 \cancel{m} \cdot 1600 \frac{kg}{\cancel{m^3}} \cdot 27,4^2 \cancel{m^2} \cdot 9,81\ m/sec^2 =$$

$$= 5,07 \cdot 10^8\ kg \cdot m/sec^2 \rightarrow \boxed{F = 5,07 \cdot 10^8\ Nt.}$$

Άσκηση 3

Τρία δοχεία που εικονίζονται στο σχήμα περιέχουν νερό σε ίδιο ύψος από τον πυθμένα τους και έχουν την ίδια επιφάνεια πυθμένα. Συνεπώς, η πίεση του νερού και η ολική δύναμη στο πυθμένα καθενός είναι η ίδια, όμως το συνολικό βάρος του νερού είναι διαφορετικό για το καθένα. Εξηγείστε αυτό το παράδοξο.



Λύση

Σύμφωνα με το νόμο της υδροστατικής πίεσης, η πίεση που ασκεί το νερό στον πυθμένα κάθε δοχείου είναι:

$$P = P_0 + \rho g h \quad (1)$$, όπου ρ η πυκνότητα του νερού.

Δηλαδή η ίδια πίεση επικρατεί στον πυθμένα κάθε δοχείου αφού περιέχουν νερό σε ίδιο ύψος.

Κι απ' τον ορισμό της πίεσης, η δύναμη που ασκείται στον πυθμένα κάθε δοχείου έχει κατεύθυνση προς τα κάτω και μέτρο:

$$P = \frac{F}{S} \dashrightarrow F = PS \xrightarrow{(1)} F = (P_0 + \rho g h)\, S$$

όπου S η επιφάνεια πυθμένα κάθε δοχείου, το οποίο είναι ίδιο.

όπου

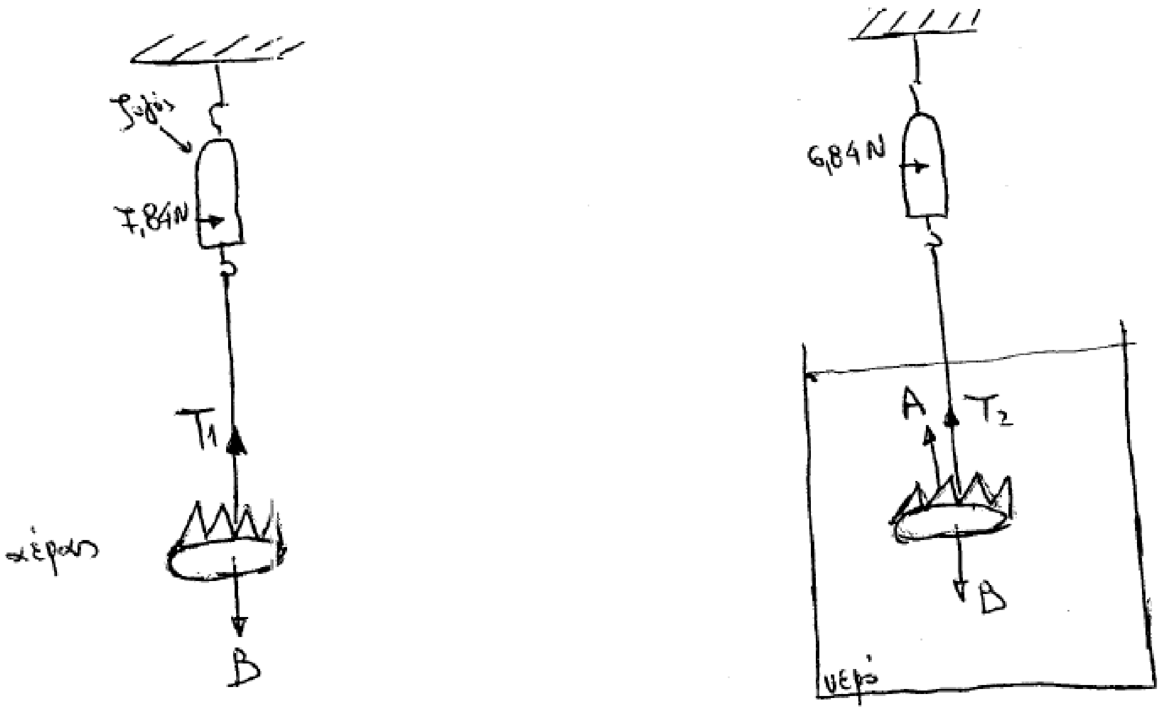
Άρα η δύναμη στον πυθμένα κάθε δοχείου είναι ίδια. και ισούται με το γινόμενο της πίεσης επί την επιφάνεια πυθμένα και όχι με το βάρος του νερού.

Το συμπέρασμα αυτό ονομάζεται <u>υδροστατικό παράδοξο</u>.

Άσκηση 4

Ο Αρχιμήδης ρωτήθηκε αν η κορώνα του βασιλιά των Συρακουσών ήταν από ατόφιο χρυσό. Είχε δεδομένα: Το βάρος της κορώνας στον αέρα 7.84 N, ενώ όταν ήταν πλήρως βυθισμένη στο νερό 6.84N. Ποια θα ήταν η απάντηση του Αρχιμήδη; (Δίδεται $g=10m/s^2$, $d_{νερού}=1000Kgr/m^3$, $d_{χρυσού}=19.3x10^3\ Kgr/m^3$).

Λύση



Όταν ζυγίζεται η κορώνα στον αέρα ο ζυγός δείχνει το πραγματικό της βάρος: $\Sigma F_y = 0 \rightarrow T_1 - B = 0 \rightarrow B = T_1 \rightarrow B = 7{,}84N$ (1).

Ενώ όταν είναι βυθισμένη πλήρως στο νερό ασκείται σ' αυτή και η δύναμη της άνωσης A και έτσι μειώνεται η ένδειξη του ζυγού στην τιμή $T_2 = 6{,}84\ N$.

Πάλι λόγω ισορροπίας θα ισχύει:

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A + T_2 - B = 0 \rightarrow A = B - T_2 \xrightarrow{(1)} A = 7{,}84N - 6{,}84N \rightarrow$

$\rightarrow A = 1N \quad (2)$

Δηλαδή η άνωση που ασκείται στην κορώνα είναι 1N και σύμφωνα με την αρχή του Αρχιμήδη ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου νερού:

$$A = B_{\text{εκτοπιζόμενου νερού}} = m_{\text{εκτοπ. νερού}}\, g = d_{\text{νερού}} V_{\text{εκτοπ. νερού}}\, g \quad (3)$$

Αλλά επειδή η κορώνα είναι πλήρως βυθισμένη ο όγκος της κορώνας θα είναι ίσος με τον όγκο του εκτοπιζόμενου νερού

$V_{\text{κορώνας}} = V_{\text{εκτοπιζόμενου νερού}}$ οπότε η (3) γίνεται:

$$A = d_{\text{νερού}} V_{\text{κορώνας}}\, g \rightarrow V_{\text{κορώνας}} = \frac{A}{d_{\text{νερού}}\, g} \overset{(2)}{=} \frac{1\,N}{1000 \frac{kg}{m^3} \cdot 10 \frac{m}{sec^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow V_{\text{κορώνας}} = 10^{-4}\, m^3$$

Άρα η πυκνότητα του υλικού της κορώνας θα είναι:

$$d_{\text{κορώνας}} = \frac{m_{\text{κορώνας}}}{V_{\text{κορώνας}}} = \frac{m_{\text{κορ}}\, g}{V_{\text{κορ}}\, g} = \frac{B_{\text{κορ.}}}{V_{\text{κορ.}}\, g} \overset{(1)}{=} \frac{7{,}84\,N}{10^{-4}\, m^3 \cdot 10\, m/sec^2} =$$

$$= \frac{7{,}84}{10^{-3}}\, kg/m^3 \rightarrow d_{\text{κορώνας}} = 7{,}84 \cdot 10^3\, kg/m^3 < d_{\text{χρυσού}} = 19{,}3 \cdot 10^3\, \frac{kg}{m^3}$$

Επομένως με την παραπάνω διαδικασία ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι η κορώνα του βασιλιά των Συρακουσών Ιέρωνα δεν ήταν από ατόφιο χρυσό αλλά είχε προσμίξεις κι άλλων μετάλλου.

Αναφορά

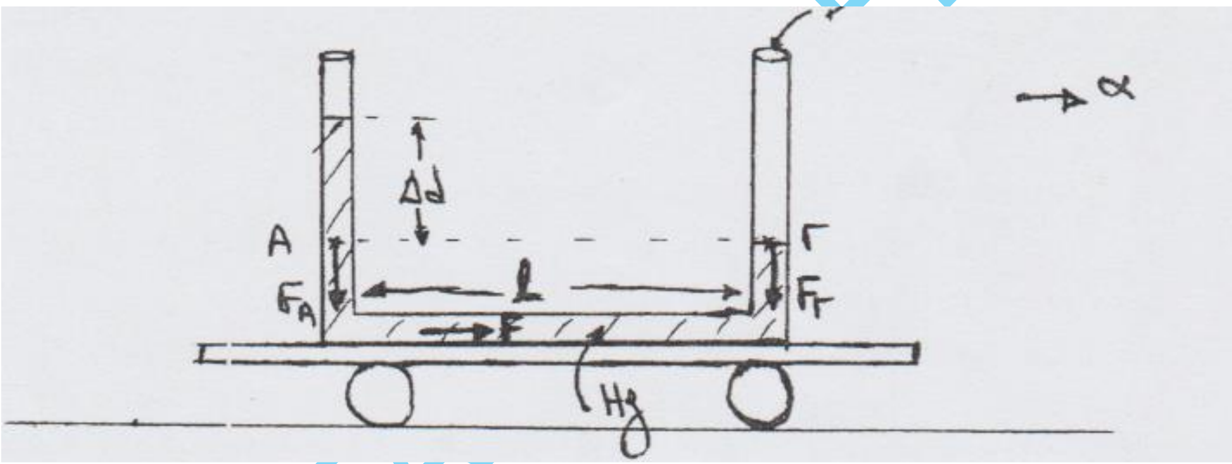
Ο **Αρχιμήδης ο Συρακούσιος** (ή Αρχιμήδης, περ. 287 π.Χ- περ. 212 π.Χ.) ήταν αρχαίος Έλληνας μαθηματικός, φυσικός, μηχανικός, εφευρέτης και αστρονόμος. Αν και λίγες λεπτομέρειες από τη ζωή του είναι γνωστές, θεωρείται ένας από τους κορυφαίους επιστήμονες στην κλασική αρχαιότητα. Η παρακαταθήκη του στη φυσική είναι, μεταξύ άλλων, οι βάσεις της υδροστατικής, της στατικής και μια εξήγηση της αρχής του μοχλού.

Η πιο γνωστή ιστορία για τον Αρχιμήδη αφορά την μέθοδο που εφηύρε για τον προσδιορισμό του όγκου ενός αντικειμένου με ακανόνιστο σχήμα. Σύμφωνα με τον Βιτρούβιο, ο βασιλιάς Ιέρωνας Β είχε παραγγείλει να του φτιάξουν ένα αναθηματικό στέμμα από ατόφιο χρυσάφι. Επειδή δεν είχε εμπιστοσύνη στον χρυσοχόο, ζήτησε από τον Αρχιμήδη να εξετάσει αν ο χρυσός είχε νοθευτεί με ασήμι. Επειδή ο Αρχιμήδης έπρεπε να λύσει το πρόβλημα χωρίς να καταστρέψει το στέμμα, δεν μπορούσε να το λιώσει προκειμένου να υπολογίσει την πυκνότητα του και την προέλευση του. Καθώς έκανε μπάνιο, παρατήρησε ότι η στάθμη του νερού στην μπανιέρα ανέβηκε όταν μπήκε ο ίδιος μέσα, και συνειδητοποίησε ότι αυτή η επίδραση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του όγκου του στέμματος. Με την παραδοχή ότι το νερό πρακτικά είναι ασυμπίεστο, το αποτέλεσμα της βύθισης θα ήταν το στέμμα να εκτοπίσει μια ποσότητα νερού ίση με τον δικό του όγκο. Διαιρώντας την μάζα του στέμματος με τον όγκο του νερού που εκτοπίζεται, προκύπτει η πυκνότητα του στέμματος. Αυτή η πυκνότητα θα είναι μικρότερη από εκείνη του χρυσού, εάν κάποια φθηνότερα και λιγότερο πυκνά μέταλλα είχαν προστεθεί. Ο Αρχιμήδης ενθουσιάστηκε τόσο από την ανακάλυψή του ώστε βγήκε στο δρόμο γυμνός φωνάζοντας "***Εύρηκα! Εύρηκα!***". Η εξέταση του στέμματος απέξειδε ότι είχε νοθευτεί με σίδερο.

Άσκηση 5

Ένα γυάλινο δοχείο σχήματος ανεστραμμένου Π έχει διάμετρο *S* και το μήκος του οριζόντιου τμήματος είναι *l* (βλ. σχήμα). Στο δοχείο τοποθετείται Hg έως ύψος *d* και στη συνέχεια τοποθετείται σε όχημα ώστε οι δυο ανοικτοί σωλήνες να είναι κατακόρυφοι και ο οριζόντιος σωλήνας να είναι συγγραμμικός με την κατεύθυνση κίνησης του οχήματος. Κάποια χρονική στιγμή διαπιστώνεται ότι η υψομετρική διαφορά του Hg στους δυο κατακόρυφους σωλήνες είναι Δd. Να βρείτε την επιτάχυνση του οχήματος.

Λύση



Η δύναμη που ασκείται στη μάζα του υδραργύρου στο οριζόντιο τμή
του δοχείου είναι η διαφορά των δυνάμεων F_A και $F_Γ$ που ασκ
οι δυο κατακόρυφοι ανοικτοί σωλήνες. Δηλαδή:

$$F = F_A - F_Γ \Rightarrow F = P_A S - P_Γ S' \quad (1)$$

Αλλά: $P_A = P_0 + ρgΔd$ και $P_Γ = P_0$ (2)

οπότε η (1) λόγω της (2) είναι:

$$F = (\cancel{P_0} + ρgΔd) S' - \cancel{P_0} S' \rightarrow F = ρgΔd S \quad (3)$$

Σύμφωνα με την αρχή του Pascal επειδή η πίεση που εφαρμόζεται στο ρευστό μεταδίδεται αμείωτη σε κάθε τμήμα του ρευστού άρα η ολική δύναμη F που ασκείται στο οριζόντιο τμήμα l έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά και μέτρο σύμφωνα με την (3). Εφαρμόζοντας το 2° νόμο του Newton για την κίνηση της μάζας του υδραργύρου που βρίσκεται στον οριζόντιο σωλήνα προκύπτει:

$$\Sigma F_x = m\alpha \rightarrow F = m\alpha \xrightarrow{(3)} \rho g \Delta d S = m\alpha \quad (4)$$

αλλά: $m = \rho V = \rho l S$ οπότε η (4) δίνει:

$$\cancel{\rho} g \Delta d \cancel{S} = \cancel{\rho} l \cancel{S} \alpha \rightarrow g \Delta d = l\alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\Delta d}{l} g}$$

Παρατηρείται ότι η επιτάχυνση είναι ανεξάρτητη της πυκνότητας του ρευστού (Hg) του δοχείου και της διατομής S του δοχείου. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του οχήματος απλώς μετρώντας το μήκος l του οριζόντιου τμήματος του δοχείου και την υψομετρική διαφορά Δd του Hg στους δυο κατακόρυφους σωλήνες.

Άσκηση 6

Στη διάρκεια του 2ου Παγκόσμιου Πολέμου ένα χτυπημένο πλοίο που μόλις επέπλεε στη Βόρεια Θάλασσα πήγαινε από τις εκβολές του Τάμεση προς τις αποβάθρες του Λονδίνου. Βούλιαξε πριν προλάβει να φτάσει. Γιατί;

Λύση

Στη Βόρεια Θάλασσα το πλοίο επέπλεε λόγω της δύναμης άνωσης του θαλασσινού νερού.

Το θαλασσινό νερό είναι πυκνότερο του γλυκού νερού

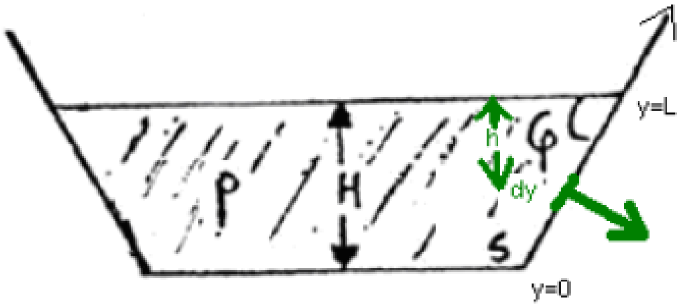
δηλ. $\rho_{\text{θαλασ. νερού}} > \rho_{\text{γλυκού νερού}}$.

Επομένως όταν το πλοίο εισήλθε στον ποταμό Τάμεση η άνωση από το γλυκό νερό του ποταμού ήταν μικρότερη, (αφού η άνωση ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού και η μάζα αυτού είναι συνάρτηση της πυκνότητας του υγρού) και δεν μπορούσε να υποστηρίξει την επίπλευσή του με αποτέλεσμα αυτό να βουλιάξει πριν προλάβει να φτάσει στις αποβάθρες του Λονδίνου.

Άσκηση 7

Βρείτε τη συνολική δύναμη (μέτρο, διεύθυνση, φορά, σημείο εφαρμογής) που ασκείται στο πλευρικό τοίχωμα του δοχείου που εικονίζεται στο σχήμα. Δίνονται η πυκνότητα του υγρού ρ, το ύψος του δοχείου που καλύπτεται από το υγρό H και το εμβαδόν των πλευρικών τοιχωμάτων S. Αγνοείστε την εξωτερική ατμοσφαιρική πίεση.

Υπόδειξη: Το σημείο εφαρμογής θα υπολογιστεί θεωρώντας ότι η συνισταμένη των ροπών των επιμέρους δυνάμεων που εξασκούνται στο πλευρικό τοίχωμα ως προς το σημείο αυτό είναι μηδέν.



<u>Λύση</u>

Με βάση την εκφώνηση ζητείται να αγνοήσουμε την εξωτερική ατμοσφαιρική πίεση, άρα θα λάβουμε υπόψη μας στη συνολική δύναμη μόνο την πίεση του υγρού, η οποία σε βάθος h είναι $p = \rho g h$. Η δύναμη είναι κάθετη στο τοίχωμα με φορά προς τα έξω. Μένει να προσδιορίσουμε το μέτρο της και το σημείο εφαρμογής.

Έστω d το βάθος του δοχείου (δεν φαίνεται στο σχήμα). Η στοιχειώδης δύναμη που ασκείται σε μια λωρίδα πάχους dy είναι:

$$dF = pdA = \rho gh \cdot d \cdot dy$$

Από το σχήμα:

$$\sin\phi = \frac{H}{L} = \frac{h}{L-y}$$

οπότε:

$$dF = \rho gd \sin\phi \left(L-y\right)dy$$

Με ολοκλήρωση στο τοίχωμα:

$$F = \rho g d \sin\phi \int_0^L (L-y)\,dy = \rho g d \sin\phi \left[Ly - \frac{y^2}{2} \right]_0^L =$$

$$= \frac{1}{2}\rho g d \sin\phi L^2 = \frac{1}{2}\rho g d H L = \frac{1}{2}\rho g S H$$

διότι: $H = L\sin\phi$ και $S = d \cdot L$.

Η δύναμη αυτή θα μπορούσε να αναλυθεί σε μια οριζόντια συνιστώσα $F\sin\phi$ και σε μια κατακόρυφη συνιστώσα $F\cos\phi$.

Έστω y_0 το σημείο του τοιχώματος όπου εφαρμόζεται η συνολική δύναμη και άρα ως προς το οποίο δεν παράγει ροπή. Η στοιχειώδης ροπή της στοιχειώδους δύναμης είναι:

$$d\tau = (y-y_0)dF = \rho g d\sin\phi(y-y_0)(L-y)dy = \rho g d\sin\phi\left[(L+y_0)y - y^2 - y_0 L\right]dy$$

Η συνολική ροπή ως προς αυτό το σημείο είναι μηδενική:

$$\tau = 0 \Rightarrow \rho g d\sin\phi\int_0^L \left[(L+y_0)y - y^2 - y_0 L\right]dy = 0 \Rightarrow$$

$$\left[(L+y_0)\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - y_0 L y\right]_0^L = 0 \Rightarrow (L+y_0)\frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{3} - y_0 L^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{L^3}{2} + y_0\frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{3} - y_0 L^2 = 0 \Rightarrow \frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} = y_0 L^2 - y_0\frac{L^2}{2} \Rightarrow$$

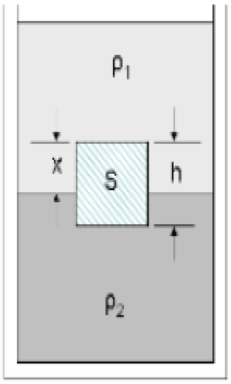
$$\frac{L^3}{6} = y_0\frac{L^2}{2} \Rightarrow \frac{L}{6} = \frac{y_0}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{L}{3}$$

Δηλαδή το σημείο εφαρμογής της δύναμης βρίσκεται στο 1/3 της απόστασης από τον πυθμένα του δοχείου πάνω στο τοίχωμα. Το βάθος που βρίσκεται είναι:

$$h_0 = (L-y_0)\sin\phi = \left(L - \frac{L}{3}\right)\sin\phi = \frac{2}{3}L\sin\phi = \frac{2}{3}H$$

Άσκηση 8

Σώμα εμβαδού διατομής S, ύψους h και πυκνότητας ρ ισορροπεί μεταξύ δύο υγρών με πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 $[\rho_1 < \rho < \rho_2]$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

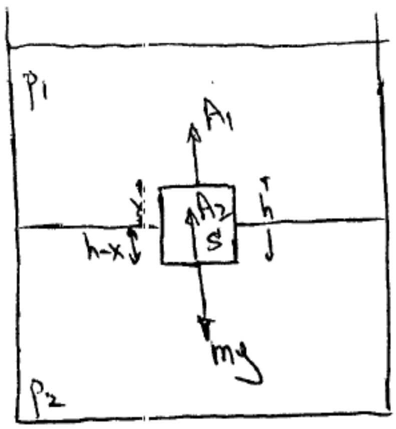


Τα υγρά δεν αναμιγνύονται. Να υπολογίσετε την πυκνότητα ρ του σώματος.

Το σώμα κατόπιν εκτρέπεται κατακόρυφα από την θέση ισορροπίας του κατά y και αφήνεται ελεύθερο. Να αποδείξετε ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho h}{(\rho_2 - \rho_1)g}}.$$

Λύση



Στο σώμα ασκούνται το βάρος του mg και οι ανώσεις A_1 και A_2 από τα δύο υγρά.

Λόγω ισορροπίας ισχύει:

$\Sigma F_y = 0 \to A_1 + A_2 - mg = 0 \to$

$\to A_1 + A_2 = mg$ (1)

Σύμφωνα με την αρχή του Αρχιμήδη η άνωση από κάθε υγρό ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού. Δηλαδή:

$$A_1 = m_{1\,\varepsilon\kappa\tau o\pi.}\, g = \rho_1 x S g \quad (2)$$

$$A_2 = m_{2\,\varepsilon\kappa\tau o\pi}\, g = \rho_2 (h-x) S g \quad (3)$$

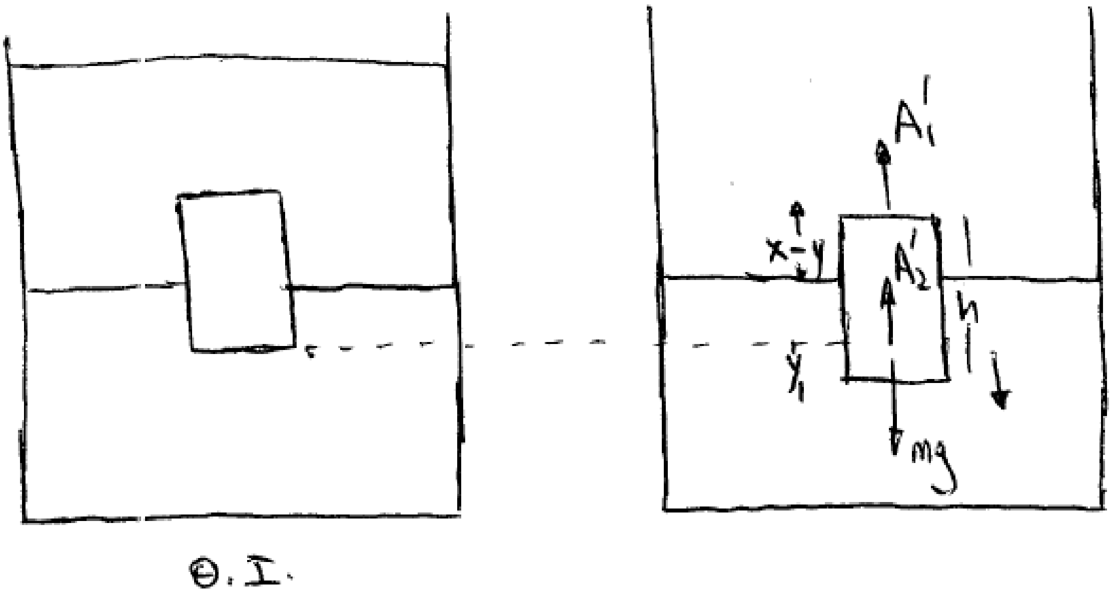
Οπότε η (1) λόγω των (2), (3) δίνει:

$$\rho_1 x S g + \rho_2 (h-x) S g = m g \quad (4)$$

αλλά για το σώμα ισχύει: $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{Sh} \rightarrow m = \rho S h \quad (5)$

Άρα η (4) λόγω της (5) μας δίνει την πυκνότητα του σώματος ως:

$$\rho_1 x \cancel{S}\cancel{g} + \rho_2 (h-x) \cancel{S}\cancel{g} = \rho \cancel{S} h \cancel{g} \rightarrow \boxed{\rho = \frac{\rho_1 x + \rho_2 (h-x)}{h}}$$



Έστω μια τυχαία θέση, όπου το σώμα κινείται απομακρυνόμενο απ' τη Θ.Ι. και y η απομάκρυνση απ' τη Θ.Ι.

Σύμφωνα με το 2° νόμο του Newton για την κίνηση του σώματος ισχύει:

$$\Sigma \vec{F}_y = m\vec{\alpha} \rightarrow mg - A_1' - A_2' = m\alpha \quad (6)$$

Αλλά τώρα: $A_1' = \rho_1 (x-y) S g$ και $A_2' = \rho_2 (h-x+y) S g$

οπότε η (6) δίνει:

$$mg - \rho_1 (x-y) S g - \rho_2 (h-x+y) S g = m\ddot{y} \xrightarrow{(4)}$$

$$\rightarrow \cancel{\rho_1 x S g} + \cancel{\rho_2 (h-x) S g} - \rho_1 (\cancel{x}-y) S g - \rho_2 (\cancel{h-x}+y) S g = m\ddot{y} \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho_1 S g y - \rho_2 S g y = m\ddot{y} \xrightarrow{(5)} -(\rho_2-\rho_1)\cancel{S} g y = \rho \cancel{S} h \ddot{y} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ddot{y} = -\frac{(\rho_2-\rho_1)g}{\rho h} y \rightarrow \boxed{\ddot{y} + \frac{(\rho_2-\rho_1)g}{\rho h} y = 0}$$

δηλ. το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με κυκλική συχνότητα

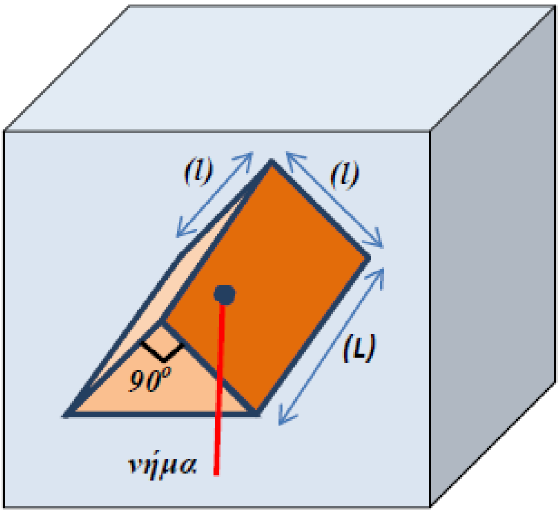
$$\omega = \sqrt{\frac{(\rho_2-\rho_1)g}{\rho h}}$$

και περίοδο

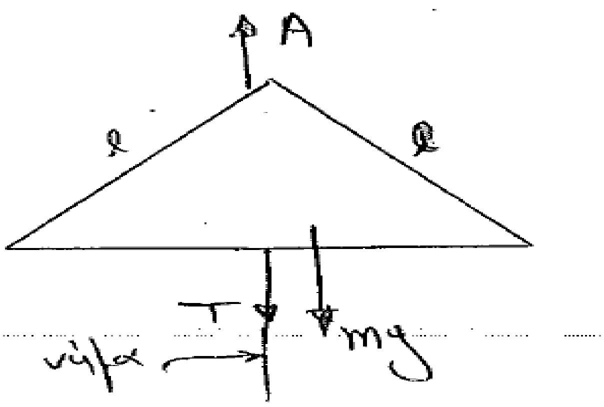
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho h}{(\rho_2-\rho_1)g}}}$$

Άσκηση 9

Θεωρήστε ότι ένα κομμάτι φελιζόλ με διαστάσεις όπως στο σχήμα και πυκνότητα $\rho_f = 180\ \mathrm{kg/m^3}$ το οποίο βρίσκεται μέσα σε δεξαμενή με νερό. Το φελιζόλ συγκρατείται εντελώς βυθισμένο στο νερό μέσω ενός νήματος που είναι δεμένο στον πυθμένα δεξαμενής. a) Πόση είναι η τάση του νήματος; Βρείτε την με τη βοήθεια της αρχής του Αρχιμήδη. b) Χρησιμοποιήστε τη σχέση $P = P_0 + \rho g h$ για να υπολογίσετε απευθείας τη δύναμη που προκαλεί το νερό πάνω σε όλες τις επιφάνειες του κομματιού του φελιζόλ, θεωρώντας ότι η βάση του είναι οριζόντια. Δείξτε στη συνέχεια, ότι το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων αυτών ισούται με την άνωση.



Λύση



Στο κομμάτι φελιζόλ ασκείται το βάρος του mg, η τάση του νήματος T απ' το οποίο είναι δεμένο στον πυθμένα της δεξαμενής και η άνωση A απ' το νερό στο οποίο είναι πλήρως βυθισμένο.

Λόγω ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A - T - mg = 0 \rightarrow T = A - mg \quad (1)$$

Σύμφωνα με την αρχή του Αρχιμήδη η άνωση ισούται με το βάρος του εκτοπιζόμενου νερού. Δηλαδή:

$$A = B_{\substack{\text{εκτοπιζόμενου}\\ \text{νερού}}} = m_{\substack{\text{εκτοπιζόμενου}\\ \text{νερού}}} \cdot g = \rho_{\text{νερού}} V_{\substack{\text{εκτοπιζ.}\\ \text{νερού}}} \cdot g \quad (2)$$

Αλλά ο όγκος του εκτοπιζόμενου νερού ισούται με τον όγκο του κομματιού του φελιζόλ. Δηλαδή

$$V_{\substack{\text{εκτοπιζόμενου}\\ \text{νερού}}} = V_{\text{φελιζόλ}} = \frac{1}{2} \ell^2 \cdot L \quad (3)$$

Οπότε η (2) λόγω της (3) γίνει:

$$A = \frac{1}{2} \rho_{\text{νερού}} \, g \, \ell^2 \cdot L \quad (4).$$

Επίσης από την πυκνότητα του φελιζόλ υπολογίζουμε τη μάζα του ως:

$$\rho_f = \frac{m}{V_{\varphi\varepsilon\lambda\iota\zeta\acute{o}\lambda}} \to m = \rho_f V_{\varphi\varepsilon\lambda\iota\zeta\acute{o}\lambda} \xrightarrow{(3)} m = \frac{1}{2}\rho_f \ell^2 L \quad (5)$$

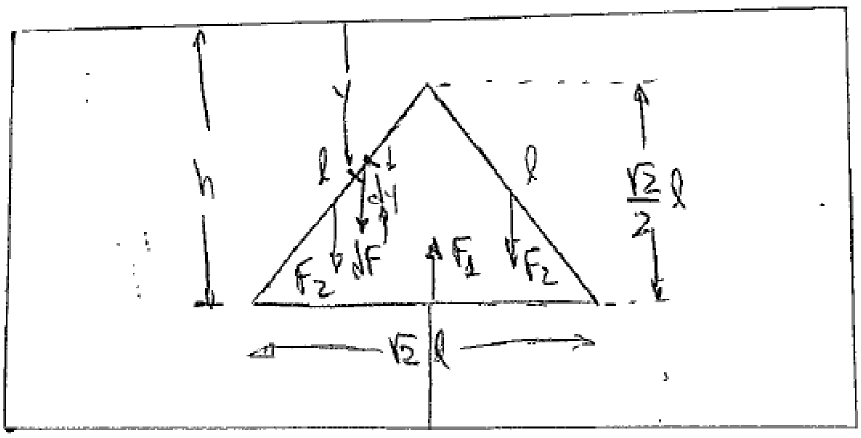
Άρα η (1) λόγω των (4) και (5) δίνει:

$$T = \frac{1}{2}\rho_{\nu\varepsilon\rho o\acute{u}}\, g\, \ell^2 L - \frac{1}{2}\rho_f\, g\, \ell^2 L \to$$

$$\to \boxed{T = \frac{1}{2}\left(\rho_{\nu\varepsilon\rho o\acute{u}} - \rho_f\right) g\, \ell^2 L}$$

ή $T = \frac{1}{2}(1000 - 180)\frac{kg}{m^3}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot \ell^2 L \to T = 4100\, \ell^2 L$.

b)



Η δύναμη που ασκεί το νερό στην οριζόντια βάση του φελιζόλ είναι:

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = (P_o + \rho g h)\cdot S \\ \text{Αλλά: } S = \sqrt{2}\,\ell L \end{array}\right\} \rightarrow F_1 = (P_o + \rho g h)\sqrt{2}\,\ell L \quad (6)$$

Σε κάθε μια απ' τις λοξές επιφάνειες σε μια στοιχειώδη λωρίδα πλάτους dy και μήκους L σε βάθος y ασκείται στοιχειώδης δύναμη:

$$\left.\begin{array}{l} dF = (P_o + \rho g y)\, dS \\ \text{αλλά: } dS = L\, dy \end{array}\right\} \rightarrow dF = (P_o + \rho g y) L\, dy \quad (7)$$

Ολοκληρώνοντας σ' όλη την επιφάνεια βρίσκουμε τη συνολική δύναμη ως:

$$F_2 = \int dF \overset{(7)}{=} \int_{h-\frac{\sqrt{2}}{2}\ell}^{h} (P_o + \rho g y) L\, dy = P_o L y + \rho g L \frac{y^2}{2}\Bigg|_{h-\frac{\sqrt{2}}{2}\ell}^{h} =$$

$$= P_o L\left(\cancel{h} - \cancel{h} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right) + \frac{1}{2}\rho g L\left[h^2 - \left(h - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} P_o L \ell + \frac{1}{2}\rho g L\left(\cancel{h^2} - \cancel{h^2} - \frac{2}{4}\ell^2 + \cancel{2} h \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\ell\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} P_o L \ell + \frac{1}{2}\rho g L\left(\sqrt{2}\, h \ell - \frac{\ell^2}{2}\right). \quad (8)$$

όπου ρ η πυκνότητα του νερού.

Άρα η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών είναι:

$$\Sigma F = F_1 - 2F_2 \xrightarrow{(6),(8)}$$

$$\rightarrow \Sigma F = (P_0 + \rho g h)\sqrt{2}\,\ell L - \cancel{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} P_0 L \ell + \frac{1}{\cancel{2}}\rho g L\left(\sqrt{2}h\ell - \frac{\ell^2}{2}\right)\right]$$

$$= \cancel{\sqrt{2}P_0 \ell L} + \cancel{\sqrt{2}\rho g h \ell L} - \cancel{\sqrt{2}P_0 L \ell} - \cancel{\sqrt{2}\rho g L h \ell} + \frac{1}{2}\rho g L \ell^2 \rightarrow$$

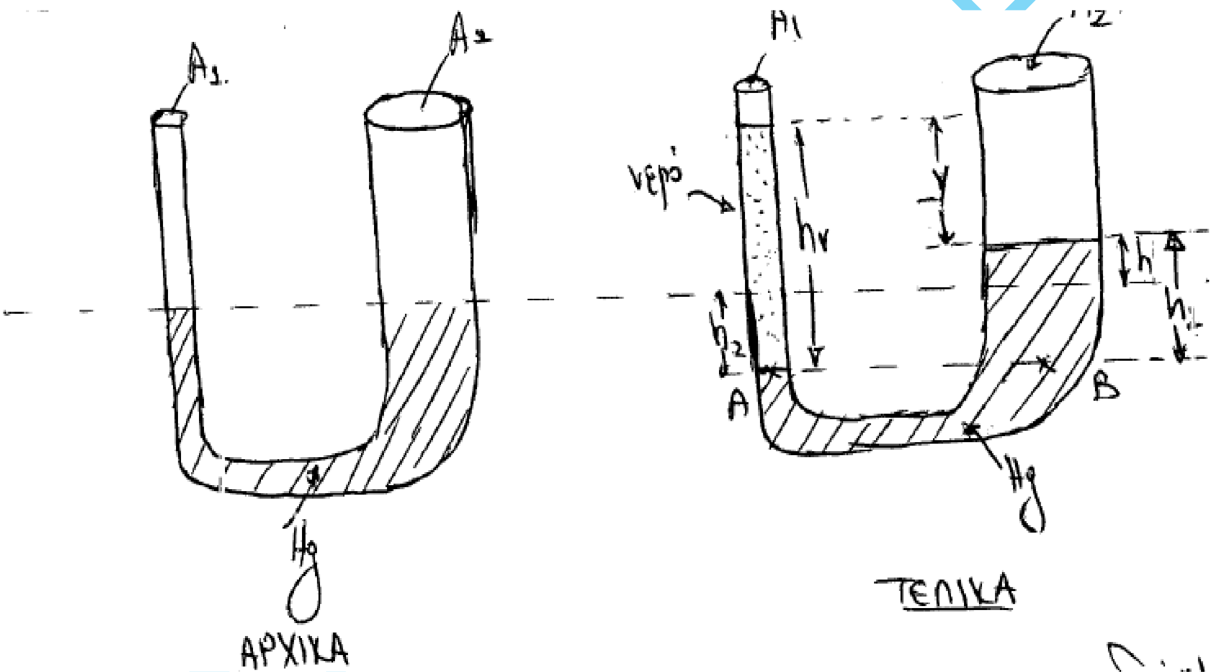
$$\rightarrow \Sigma F = \frac{1}{2}\rho g L \ell^2 \xrightarrow{(4)} \underline{\underline{\Sigma F = A.}}$$

Δηλαδή η συνισταμένη των δυνάμεων ισούται με την άνωση.

Άσκηση 10

Δύο συγκοινωνούντα δοχεία έχουν διατομή A_1=1 cm^2 και A_2=4 cm^2. Ποσότητα υδραργύρου (ρ_{Hg}=13.6 g/cm^3) προστίθεται στα δοχεία. Κατόπιν προσθέτουμε 10 ml νερού στο δοχείο διατομής A_1. (α) Σε ποιο ύψος θα ανυψωθεί ο υδράργυρος στο άλλο δοχείο; (β) ποια διαφορά ύψους θα έχουν οι ελεύθερες επιφάνειες στα δύο δοχεία;

Λύση



α)
Με την προσθήκη του νερού στο αριστερό δοχείο ο υδράργυρος έχει συμπιεστεί κατά h_2, ενώ στο δεξιό δοχείο έχει ανυψωθεί κατά h.
Στο αριστερό δοχείο όγκος A_1h_2 έχει αντικατασταθεί από νερό και αυτός θα πρέπει να είναι ίσος με τον όγκο του ανυψωμένου υδραργύρου A_2h στο δεξιό δοχείο. Δηλαδή ισχύει:

$$A_1 h_2 = A_2 h \rightarrow h_2 = \frac{A_2}{A_1} h \quad (1)$$

Λόγω ισορροπίας η πίεση στα σημεία Α και Β είναι ίδια, οπότε:

$$P_A = P_B \rightarrow \cancel{P_0} + \rho_v g h_v = \cancel{P_0} + \rho_{Hg} g h_1 \rightarrow \rho_v \cancel{g} h_v = \rho_{Hg} \cancel{g} h_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho_v h_v = \rho_{Hg} h_1 \quad (2)$$

Αλλά: $h_1 = h + h_2 \xrightarrow{(1)} h_1 = h + \frac{A_2}{A_1} h \rightarrow h_1 = \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right) h \quad (3)$

Επομένως η (2) λόγω της (3) δίνει:

$$\rho_v h_v = \rho_{Hg} \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right) h \rightarrow h = \frac{\rho_v h_v}{\rho_{Hg}\left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right)} \quad (4)$$

Επειδή ο όγκος του νερού είναι: $V_v = 10ml = 10 \cdot 10^{-3} l = 10^{-2} l = 10 \cdot 10^{-6} m^3$

$\rightarrow V_v = 10^{-5} m^3$ θα υπολογίσουμε το ύψος του νερού h_v στο αριστερό δοχείο:

$$V_v = A_1 h_v \rightarrow h_v = \frac{V_v}{A_1} = \frac{10^{-5} m^3}{10^{-4} m^2} \rightarrow h_v = 10^{-1} m = 0,1m = 10cm.$$

Προσοχή: $A_1 = 1 cm^2 = 1 \cdot 10^{-4} m^2 = 10^{-4} m^2$.

Άρα αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές στην (4) προκύπτει:

$$h = \frac{1 g/cm^3 \cdot 10cm}{13,6 g/cm^3 \left(1 + \frac{4cm^2}{1cm^2}\right)} = \frac{10 cm}{13,6 \cdot 5} = \frac{10cm}{68} \rightarrow \boxed{h = 0,15 cm}$$

β/ Η υψομετρική διαφορά των ελεύθερων επιφανειών στα δύο δοχεία είναι:

$$y = h_\nu - h_1 \overset{(3)}{=} h_\nu - \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right)h = 10\,cm - \left(1 + \frac{4\,cm^2}{1\,cm^2}\right) 0{,}15\,cm =$$

$$= 10\,cm - 5 \cdot 0{,}15\,cm = 10\,cm - 0{,}75\,cm \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{y = 9{,}25\,cm}$$

Άσκηση 11

Θεωρείστε ένα δοχείο με ρευστό πυκνότητας ρ, το οποίο επιταχύνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με επιτάχυνση a. (α) Να βρεθεί η εξάρτηση της πίεσης από το βάθος h στο ρευστό. Θεωρείστε p_0 την ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια του ρευστού. (β) Πώς αλλάζει η εξάρτηση αυτή, αν το ρευστό επιταχύνεται κατακόρυφα προς τα κάτω με επιτάχυνση a; (γ) Ποια η κατάσταση στην ελεύθερη πτώση;

Λύση

(α) Έστω ένα στοιχειώδες τμήμα του ρευστού πάχους dy (καθ' ύψος) και επιφάνειας Α. Από κάτω το στοιχείο αυτό του ρευστού δέχεται δύναμη pA (προς τα άνω). Στην πάνω πλευρά του δέχεται δύναμη $(p+dp)A$ (προς τα κάτω). Το στοιχείο αυτό έχει βάρος $dw = gdm = g\rho dV = g\rho Ady$ (προς τα κάτω). Αν το δοχείο επιταχύνεται προς τα άνω η συνισταμένη των παραπάνω δυνάμεων με θετική φορά προς τα άνω πρέπει να ισούται με $adm = a\rho dV = a\rho Ady$:

$$pA-(p+dp)A-g\rho Ady = a\rho Ady \Rightarrow dp = -\rho(g+a)dy$$

Με ολοκλήρωση:

$$\int_{p_0}^{p} dp = -\rho(g+a)\int_0^{-h} dy \Rightarrow p-p_0 = \rho(g+a)h \Rightarrow p = p_0+\rho(g+a)h \quad (1)$$

(β) Αν το δοχείο επιταχύνεται προς τα κάτω η συνισταμένη των παραπάνω δυνάμεων με θετική φορά προς τα κάτω πρέπει να ισούται με $adm = a\rho dV = a\rho Ady$:

$$-pA+(p+dp)A+g\rho Ady = a\rho Ady \Rightarrow dp = -\rho(g-a)dy$$

Με ολοκλήρωση:

$$\int_{p_0}^{p} dp = -\rho(g-a)\int_0^{-h} dy \Rightarrow p-p_0 = \rho(g-a)h \Rightarrow p = p_0+\rho(g-a)h \quad (2)$$

Το αποτέλεσμα (2) θα μπορούσε, όπως είναι αναμενόμενο, να προκύψει και από το αποτέλεσμα (1) θέτοντας όπου a το $-a$.

(γ) Στην ελέυθερη πτώση, δηλαδή για $a = g$ παίρνουμε από το αποτέλεσμα (2) ότι η πίεση είναι σταθερή και ίση με την ατμοσφαιρική πίεση σε κάθε σημείο του ρευστού (ανεξάρτητα του βάθους):

$$p = p_0$$