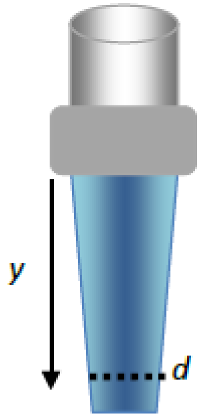
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

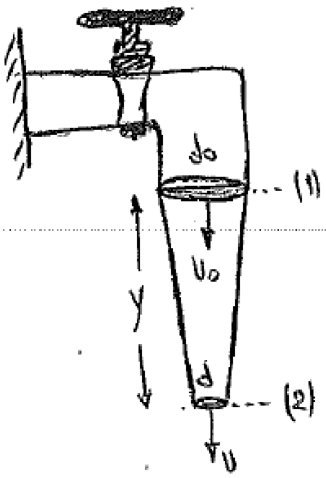
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ **6932 946778**
www.pmoiras.weebly.com

Άσκηση 1

Η ροή του νερού καθώς αφήνει το στόμιο μιας βρύσης έχει σχήμα στήλης της οποίας η διάμετρος συνεχώς ελαττώνεται καθώς αυξάνει η απόσταση *y* από το στόμιο της βρύσης (υποθέτουμε ομαλή στρωτή ροή). Να βρείτε τη σχέση της διαμέτρου, *d*, της στήλης συναρτήσει της απόστασης *y* από το στόμιο της βρύσης, της αρχικής διαμέτρου d_0 της ροής και της ταχύτητας υ_0 στο στόμιο της βρύσης (Βλ. σχήμα).



Λύση



Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ των σταθμών (1) (στόμιο βρύσης) και (2) (απόσταση y απ' το στόμιο).

$$\cancel{P_0} + \rho g y + \frac{1}{2}\rho \upsilon_0^2 = \cancel{P_0} + 0 + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 2gy \rightarrow$$

$$\rightarrow \upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gy} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε στη συνέχεια το νόμο της συνέχειας μεταξύ των σταθμών αυτών παίρνουμε:

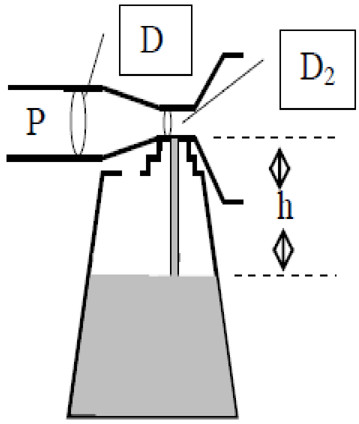
$$S_0 \upsilon_0 = S\upsilon \rightarrow \cancel{\pi}\left(\frac{d_0}{2}\right)^2 \upsilon_0 = \cancel{\pi}\left(\frac{d}{2}\right)^2 \upsilon \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d_0^2}{\cancel{4}}\upsilon_0 = \frac{d^2}{\cancel{4}}\upsilon \rightarrow d^2 = d_0^2 \frac{\upsilon_0}{\upsilon} \xrightarrow{(1)}$$

$$\rightarrow d^2 = d_0^2 \frac{\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gy}} \rightarrow \boxed{d = d_0\sqrt{\frac{\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2+2gy}}}}$$

Άσκηση 2

Ψεκαστήρας βαφέα φαίνεται απλουστευμένος στο σχήμα. Υπολογίστε την απαιτουμένη πίεση P στο δοχείο πίεσης, ώστε να ανυψώνεται το διαλυμένο χρώμα από το δοχείο χρώματος μέχρι το σωληνάκι ψεκασμού, αν η πυκνότητα του διαλυμένου χρώματος είναι ρ = 1.3 gr/cm^3 και το ιξώδες του μηδαμινό. Απαιτουμένη παροχή πεπιεσμένου αέρος, Π = 100lt/min. Διάμετροι σωλήνων, D_1 = 10mm και D_2 = 2mm. h = 25mm. Η πυκνότητα του αέρος είναι ανάλογος της πίεσης, $\rho_1/P_1 = \rho_2/P_2$, και σε ατμοσφαιρική πίεση ισούται με $\rho_{αερ.\ 1\ atm} = 1.29 kg/m^3$.
1 atm= 10^5Pa.



Λύση

Η παροχή είναι: $\Pi = 100\dfrac{lt}{\min} = 100\cdot\dfrac{10^{-3}m^3}{60s} = \dfrac{1}{600}m^3/s$

Από την εξίσωση συνέχειας: $\Pi \equiv \dfrac{dV}{dt} = A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$

Έτσι:

$$\upsilon_1 = \frac{\Pi}{A_1} = \frac{\Pi}{\pi(D_1/2)^2} = \frac{1/600}{\pi\cdot(0.005)^2} = 21.22m/s$$

$$\upsilon_2 = \frac{\Pi}{A_2} = \frac{\Pi}{\pi(D_2/2)^2} = \frac{1/600}{\pi\cdot(0.001)^2} = 530.5m/s$$

Από την εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας (για το χρώμα):

$$p_a + 0 = p_2 + \rho g h \Rightarrow p_2 = p_a - \rho g h \Rightarrow p_2 = 10^5 - 1300\cdot 9.8\cdot 0.025 = 99682Pa$$

$$(\rho = 1.3\frac{gr}{cm^3} = 1.3\frac{10^{-3}kg}{10^{-6}m^3} = 1300kg/m^3,\ p_a = 1atm = 10^5 Pa,\ h = 25mm = 0.025m)$$

Για τον αέρα: $\dfrac{\rho_1}{p_1}=\dfrac{\rho_2}{p_2}=\dfrac{1.29kg/m^3}{10^5 Pa}=1.29\cdot 10^{-5}\dfrac{s^2}{m^2}$

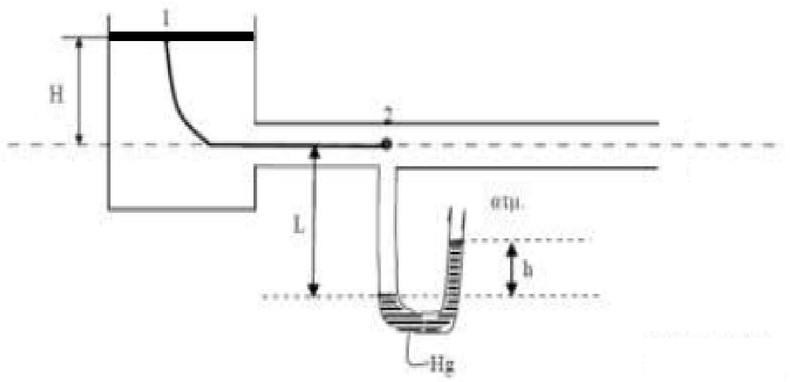
Άρα: $\rho_2 = p_2 \cdot 1.29\cdot 10^{-5}\dfrac{s^2}{m^2}=1.286kg/m^3$ και $\rho_1 = p_1 \cdot 1.29\cdot 10^{-5}\dfrac{s^2}{m^2}$

Από την εξίσωση Bernoulli (για $p_1 = P$): $P+\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^{\,2}=p_2+\frac{1}{2}\rho_2\upsilon_2^{\,2}\Rightarrow$

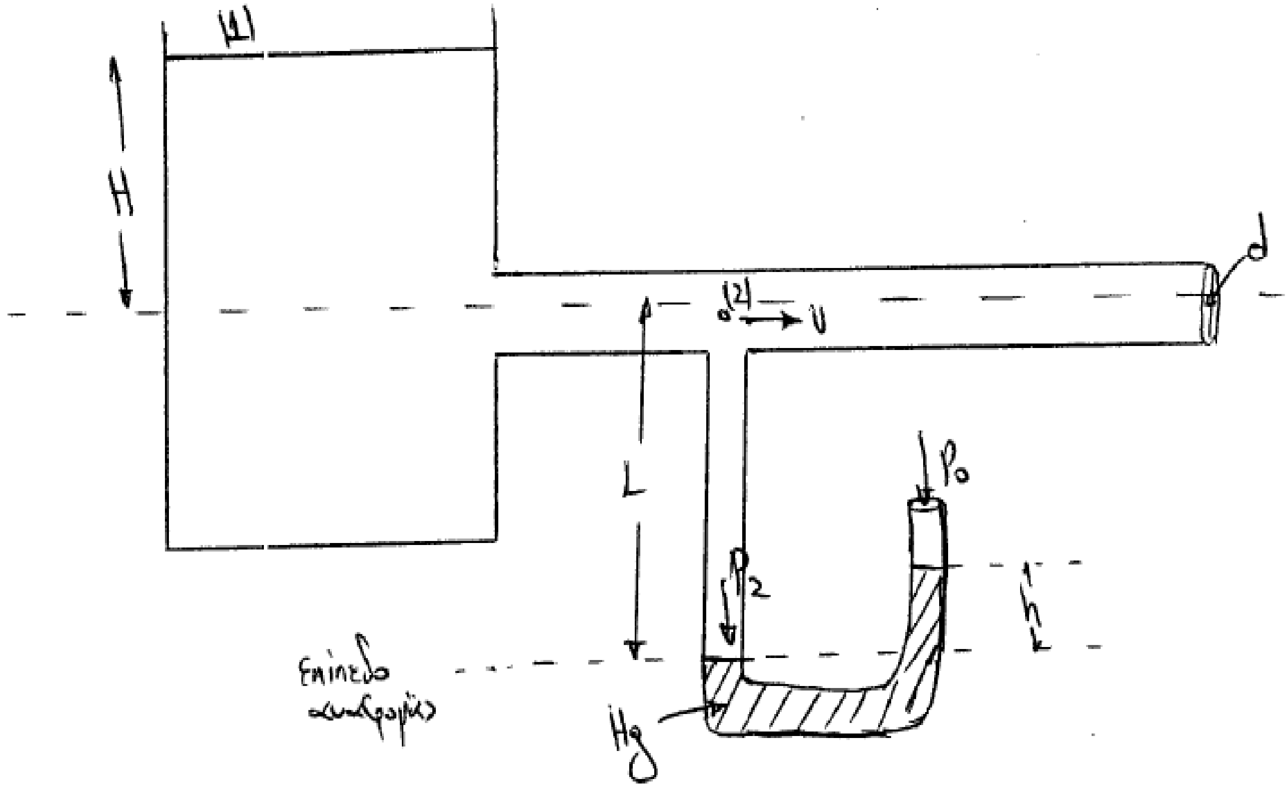
$$P+\frac{1}{2}\rho_1\upsilon_1^{\,2}=p_2+\frac{1}{2}\rho_2\upsilon_2^{\,2}\Rightarrow P+0.0029P=99682+180960\Rightarrow P\simeq 2.80\cdot 10^5 Pa=2.80atm$$

Άσκηση 3

Στη ροή του σχήματος να εκτιμηθεί η ταχύτητα στον οριζόντιο σωλήνα και η παροχή θεωρώντας ότι το νερό συμπεριφέρεται ως ιδανικό ρευστό. Δίδεται η πυκνότητα του υδραργύρου (Hg) ρ_{Hg}=13.6 gr/cm^3, η εσωτερική διάμετρος του σωλήνα 5.0cm, το H=3.66m, το L=0.61m και το h=15.2cm και η πυκνότητα του νερού ρ_v= 1.0 gr/cm^3. Δίδεται επίσης g=10m/s^2.



Λύση



Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ των θέσεων (1) και (2) υποθέτοντας ότι ο ρυθμός εκροής είναι αρκετά μικρός ώστε η ελεύθερη επιφάνεια του νερού να παραμένει κατά προσέγγιση ακίνητη.

ν. Bernoulli $1\to2$: $P_0 + \rho_\nu g(H+\cancel{L}) + 0 = P_2 + \cancel{\rho_\nu g L} + \frac{1}{2}\rho_\nu u^2 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\rho_\nu u^2 = \rho_\nu g H + P_0 - P_2 \rightarrow u^2 = 2gH + \frac{2(P_0-P_2)}{\rho_\nu} \quad (1)$$

Στο ανοικτό υδραργυρικό μανόμετρο ισχύει:

$$P_2 = P_0 + \rho_{Hg} g h \rightarrow P_0 - P_2 = -\rho_{Hg} g h \quad (2)$$

Οπότε η (1) λόγω της (2) δίνει:

$$u^2 = 2gH - \frac{2\rho_{Hg}}{\rho_\nu} g h \rightarrow u = \sqrt{2g\left(H - \frac{\rho_{Hg}}{\rho_\nu}h\right)} =$$

$$= \sqrt{2\cdot 10\frac{m}{sec^2}\left(3{,}66m - \frac{13{,}6g/cm^3}{1g/cm^3}\cdot 0{,}152m\right)} = \sqrt{20(3{,}66-2{,}067)} = \sqrt{20\cdot 1{,}593} = \sqrt{31{,}86} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{u = 5{,}64\ m/sec}$$

Κι επομένως η παροχή του οριζόντιου σωλήνα είναι:

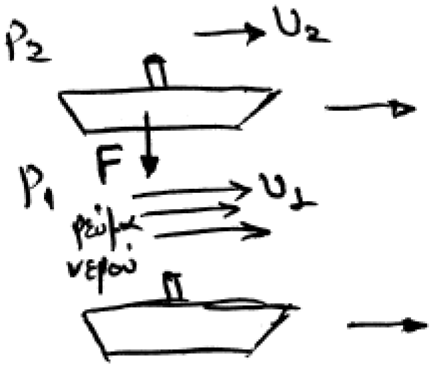
$$\Pi = Su = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 u = \pi\frac{d^2}{4}u = 3{,}14\cdot\frac{0{,}05^2}{4}\cdot 5{,}64 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\Pi = 0{,}011\ m^3/sec}$$

Άσκηση 4

Δυο πλοία που ταξιδεύουν σε παράλληλες πορείες και σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους διακινδυνεύουν να συγκρουστούν. Γιατί;

Λύση



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται τα δυο πλοία που ταξιδεύουν σε παράλληλες πορείες και σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους. Έστω P_1, P_2 η στατική πίεση στις δυο πλευρές του κάθε πλοίου. Εφαρμόζοντας το νόμο Bernoulli και λαμβάνοντας υπόψιν ότι η μεταβολή της υψομετρικής πίεσης μηδενίζεται προκύπτει:

ν. Bernoulli: $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \rightarrow P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right)$ (1)

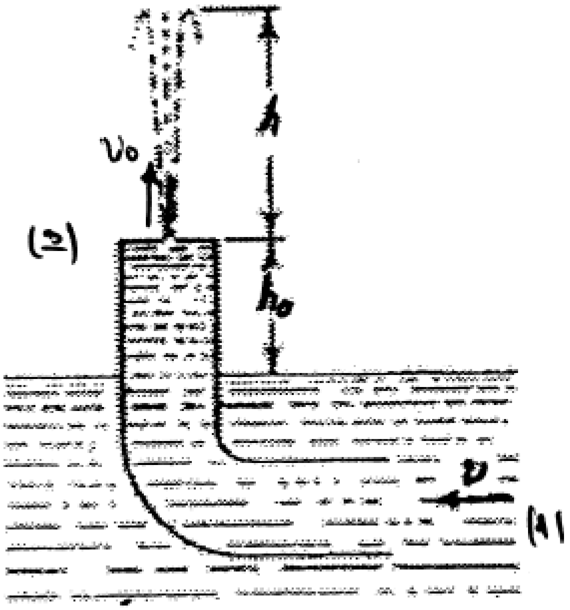
Δηλαδή παρατηρείται ότι η παρουσία του πλοίου μέσα στην κίνηση του νερού αναγκάζει το νερό που περνά απ' την ενδιάμεση περιοχή των πλοίων να επιταχύνει τη ροή του, με αποτέλεσμα να πέσει η πίεση P_1. Δηλαδή δημιουργείται υποπίεση σε σχέση

με το χώρο εκτός του πλοίου,
αφού στην άλλη πλευρά του πλοίου η ταχύτητα του νερού
U_2 ελαττώνεται με αποτέλεσμα να αυξάνεται η στατική πίεση P_2.
Η διαφορά πίεσης $P_2 - P_1$ ανάμεσα στις δυο πλευρές του πλοίου
ασκεί μια ελκτική δύναμη κάθετη, η οποία λέγεται δυναμική άνωση
και το μέτρο της είναι: $F = (P_2 - P_1)S \xrightarrow{(1)} F = \frac{1}{2}\rho(U_1^2 - U_2^2)S$

όπου S το εμβαδόν επιφάνειας της πλευράς του πλοίου.
Άρα εξαιτίας αυτής της ελκτικής δύναμης τα πλοία διακινδυνεύουν
να συγκρουστούν.

Άσκηση 5

Ένας κεκκαμένος σωλήνας βυθίζεται σε ένα ρεύμα νερού και κρατείται σταθερός όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ταχύτητα της ροής του ρεύματος ως προς τον σωλήνα είναι $\upsilon = 2.5 m/s$. Το κλειστό πάνω άκρο του σωλήνα, το οποίο βρίσκεται σε ύψος $h_0 = 12\ cm$, έχει μια μικρή τρύπα από την οποία εξέρχεται νερό. Σε πιο ύψος h θα εκτοξεύεται το νερό; (Θεωρήστε ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι σταθερή στην κλίμακα του προβλήματος).



Λύση

Εφαρμόζοντας το νόμο Bernoulli στις θέσεις (1) και (2) θεωρώντας ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι σταθερή στην κλίμακα του προβλήματος, δηλαδή η στατική πίεση στις δύο θέσεις είναι $P_1 = P_2 = P_0$, προκύπτει:

$$\underline{\text{ν. Bernoulli}}_{1\to 2}: \cancel{P_0} + 0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \cancel{P_0} + \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_0^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\cancel{\rho}\upsilon^2 = \cancel{\rho} g h_0 + \frac{1}{2}\cancel{\rho}\upsilon_0^2 \rightarrow \frac{\upsilon^2}{2} = g h_0 + \frac{\upsilon_0^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow v^2 = 2gh_0 + v_0^2 \rightarrow v_0^2 = v^2 - 2gh_0 \rightarrow v_0 = \sqrt{v^2 - 2gh_0} \quad (1)$$

Το νερό εξερχόμενο απ' την τρύπα του σωλήνα εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_0.

Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$v = v_0 - gt \quad (2) \qquad \text{και} \qquad y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3)$$

Στο μέγιστο ύψος h που εκτοξεύεται το νερό είναι $v=0$ οπότε η (2) δίνει το χρόνο ανόδου του νερού ως:

$$0 = v_0 - g t_{αν} \rightarrow g t_{αν} = v_0 \rightarrow t_{αν} = \frac{v_0}{g} \quad (4)$$

Άρα η (3) λόγω της (4) δίνει το ζητούμενο ύψος ως:

$$h = y(t = t_{αν}) = v_0 t_{αν} - \frac{1}{2} g t_{αν}^2 \overset{(4)}{=} v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} \cancel{g} \frac{v_0^2}{g^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} \rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} \overset{(1)}{\rightarrow}$$

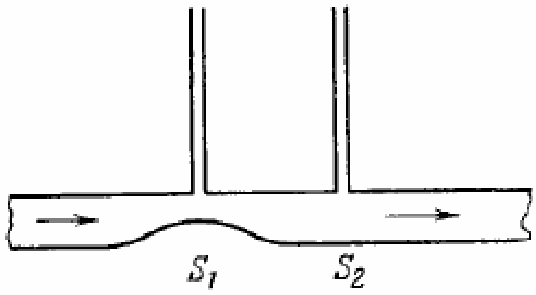
$$\rightarrow h = \frac{v^2 - 2gh_0}{2g} \rightarrow h = \frac{v^2}{2g} - h_0 = \frac{2{,}5^2 \, \cancel{m}^{\cancel{2}}/\cancel{sec^2}}{2 \cdot 10 \, \cancel{m}/\cancel{sec^2}} - 0{,}12m =$$

$$= \frac{6{,}25}{20} m - 0{,}12m = 0{,}31m - 0{,}12m \rightarrow$$

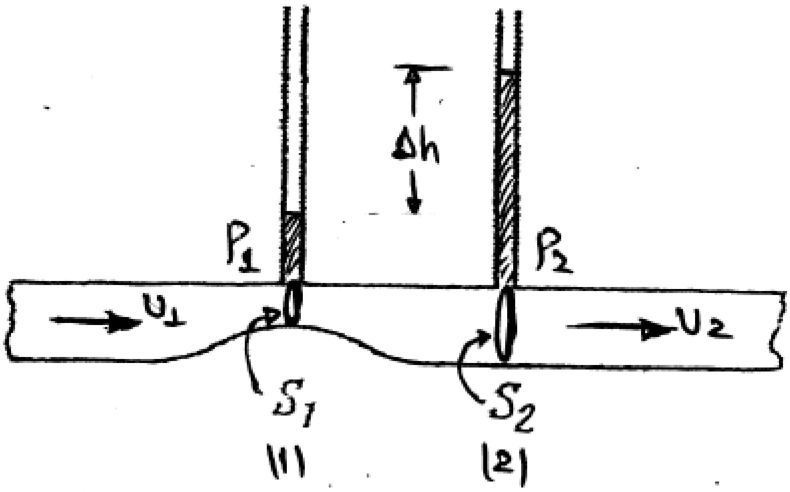
$$\rightarrow \boxed{h = 0{,}19m}$$

Άσκηση 6

Δυο σωλήνες ενός μανομέτρου είναι προσαρτημένοι στον οριζόντιο σωλήνα ο οποίος έχει μεταβλητή διατομή στις τομές S_1 και S_2 (βλ. Σχήμα). Να βρείτε τον όγκο του νερού που ρέει κατά μήκος του σωλήνα ανά μονάδα χρόνου εάν η υψομετρική διαφορά του νερού στους δυο κατακόρυφους σωλήνες είναι Δh. Δίδεται $g = 10\ \mathrm{ms^{-2}}$.



Λύση



Εφαρμόζουμε το νόμο της συνέχειας στις θέσεις (1) και (2) :

$$S_1 U_1 = S_2 U_2 \rightarrow U_1 = \frac{S_2}{S_1} U_2 \quad (1)$$

ενώ ο νόμος Bernoulli δίνει:

$$P_1 + 0 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = P_2 + 0 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 \rightarrow P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho(u_1^2 - u_2^2) \quad (2)$$

Αλλά η υψομετρική διαφορά του νερού στους δύο κατακόρυφους σωλήνες του μανόμετρου μετρά τη διαφορά πίεσης ως:

$$P_2 - P_1 = \rho g \Delta h \quad (3)$$

Έτσι η (2) λόγω της (3) δίνει:

$$\rho g \Delta h = \frac{1}{2}\rho(u_1^2 - u_2^2) \rightarrow u_1^2 - u_2^2 = 2g\Delta h \xrightarrow{(1)}$$

$$\rightarrow \frac{S_2^2}{S_1^2}u_2^2 - u_2^2 = 2g\Delta h \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1\right)u_2^2 = 2g\Delta h \rightarrow u_2 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1}} \quad (4)$$

Άρα ο όγκος του νερού που ρέει κατά μήκος του σωλήνα ανά μονάδα χρόνου είναι η παροχή του σωλήνα, η οποία ισούται με:

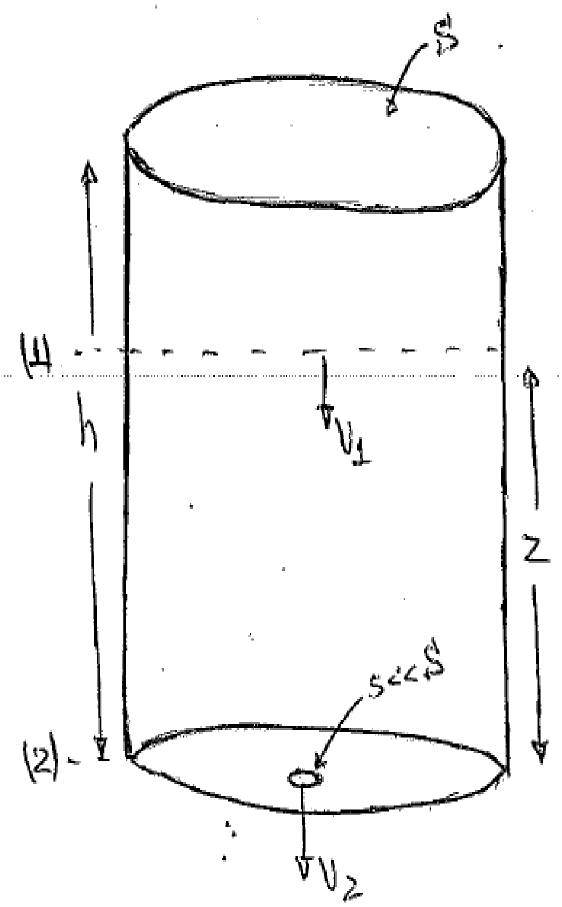
$$\Pi = \frac{dV}{dt} = S \cdot \upsilon = \sigma\tau\alpha\theta. \rightarrow \Pi = S_2 \upsilon_2 \xrightarrow{(4)}$$

$$\rightarrow \Pi = S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{S_2^2}{S_1^2} - 1}}$$

Άσκηση 7

Κυλινδρική δεξαμενή με εμβαδόν βάσης *S* και ύψους *h* είναι γεμάτη νερό. Στη βάση της δεξαμενής ανοίγουμε μια μικρή οπή επιφάνειας *s<<S*. Αμελώντας το ιξώδες του νερού υπολογίστε πόσο χρόνος θα απαιτηθεί για να αδειάσει η δεξαμενή.

Λύση



Ανοίγοντας την οπή στον πυθμένα της δεξαμενής το νερό θα εξέρχεται απ' αυτήν με ταχύτητα $υ_2$ και η ελεύθερη επιφάνεια του νερού (στάθμη 1) θα κατέρχεται με ταχύτητα $υ_1$.

Εφαρμόζοντας το νόμο της συνέχειας μεταξύ των δυο σταθμών προκύπτει:

$$S υ_1 = s υ_2 \rightarrow υ_2 = \frac{S}{s} υ_1 \quad (1)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας το νόμο Bernoulli μεταξύ των δυο σταθμών προκύπτει:

$$\cancel{p_0} + \rho g z + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = \cancel{p_0} + 0 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cancel{\rho} g z + \frac{1}{2}\cancel{\rho} u_1^2 = \frac{1}{2}\cancel{\rho} u_2^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow g z = \frac{1}{2}\left(u_2^2 - u_1^2\right) \xrightarrow{(1)}$$

$$\rightarrow g z = \frac{1}{2}\left[\frac{S_1^2}{S^2}u_1^2 - u_1^2\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow g z = \frac{1}{2}\left(\frac{S_1^2}{S^2} - 1\right)u_1^2 \rightarrow u_1^2 = \frac{2gz}{\frac{S_1^2}{S^2} - 1} \rightarrow$$

$$\rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{2gz}{\frac{S_1^2}{S^2} - 1}} \quad (2)$$

Αλλά από τον ορισμό της ταχύτητας u_1 της ελεύθερης στάθμης του νερού, η οποία καθώς πέφτει το ύψος z ελαττώνεται ισχύει:

$$v_1 = -\frac{dz}{dt} \xrightarrow{(2)} \sqrt{\frac{2g}{\frac{S'^2}{S^2}-1}}\,\sqrt{z} = -\frac{dz}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_0^t dt = -\sqrt{\frac{\frac{S'^2}{S^2}-1}{2g}} \int_h^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} \rightarrow$$

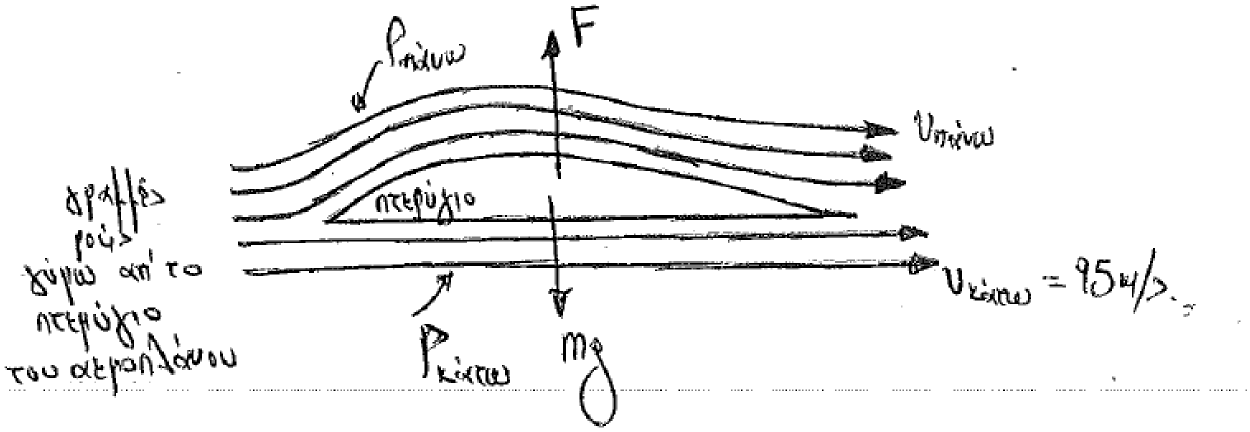
$$\rightarrow t = -\sqrt{\frac{(S'/S)^2-1}{2g}} \left[2\sqrt{z}\right]_h^0 \rightarrow$$

$$\rightarrow t = -2\sqrt{\frac{(S'/S)^2-1}{2g}}\,(0-\sqrt{h}) \rightarrow \boxed{t = 2\sqrt{\frac{\left[\left(\frac{S'}{S}\right)^2-1\right]h}{2g}}}$$

Άσκηση 8

Ένα αεροπλάνο έχει μάζα $2,0\times10^{6}\,kg$. Η ροή του αέρα στην κάτω πλευρά των πτερύγων έχει ταχύτητα 95 m/s. Εάν η επιφάνεια των πτερύγων έχει εμβαδόν 1200 m^2, πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα της ροής του αέρα στην πάνω επιφάνεια των πτερύγων έτσι ώστε το αεροπλάνο να στέκετε στον αέρα; (θεωρείστε μόνο τη δυναμική άνωση, νόμο Bernoulli)

Λύση



Το πτερύγιο του αεροπλάνου αποτελεί μια επιφάνεια, η οποία κινείται οριζόντια μέσα στον αέρα. Μπορούμε ισοδύναμα να θεωρήσουμε ότι το πτερύγιο είναι ακίνητο και ο αέρας διέρχεται οριζόντια πάνω και κάτω απ' αυτό.

Έστω η ταχύτητα και η πίεση του αέρα κάτω απ' το πτερύγιο είναι $υ_{κάτω}$, $P_{κάτω}$, ενώ πάνω απ' αυτό είναι

$v_{πάνω}$, $P_{πάνω}$. Παρατηρείται ότι οι γραμμές ροής του αέρα πυκνώνουν πάνω απ' το πτερύγιο, πράγμα το οποίο υποδηλώνει αύξηση της ταχύτητας ροής και μείωση της πίεσης στην περιοχή αυτή.

Η διαφορά αυτή πίεσης στο πτερύγιο προκαλεί την δράση της δυναμικής άνωσης F, η οποία επιτρέπει στο αεροπλάνο να στέκεται στον αέρα. Έτσι έχουμε:

$$F = (P_{κάτω} - P_{πάνω}) S \rightarrow P_{κάτω} - P_{πάνω} = \frac{F}{S} \quad (1)$$

Λόγω ισορροπίας του αεροπλάνου στον άξονα y ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F = mg \quad (2)$$

Οπότε η (1) λόγω της (2) δίνει:

$$P_{κάτω} - P_{πάνω} = \frac{mg}{S} = \frac{2 \cdot 10^6 \, kg \cdot 10 \, m/s^2}{1200 \, m^2} = \frac{2 \cdot 10^7}{1{,}2 \cdot 10^3} \, Pa \rightarrow$$

$$\rightarrow P_{κάτω} - P_{πάνω} = 1{,}67 \cdot 10^4 \, Pa. \quad (3)$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Bernoulli για τη ροή του αέρα εκατέρωθεν του πτερυγίου προκύπτει:

$$P_{πάνω} + 0 + \frac{1}{2}\rho_{αέρα} U_{πάνω}^2 = P_{κάτω} + 0 + \frac{1}{2}\rho_{αέρα} U_{κάτω}^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\rho_{αέρα} U_{πάνω}^2 = P_{κάτω} - P_{πάνω} + \frac{1}{2}\rho_{αέρα} U_{κάτω}^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow U_{πάνω}^2 = \frac{2(P_{κάτω} - P_{πάνω})}{\rho_{αέρα}} + U_{κάτω}^2$$

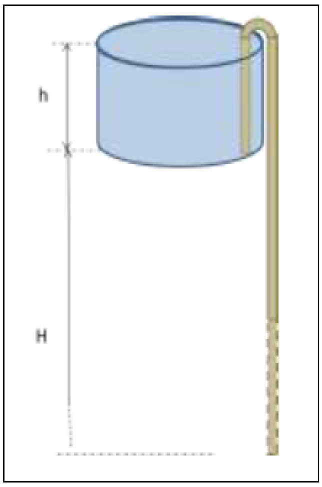
Αντικαθιστώντας στην παραπάνω τις αριθμητικές τιμές λαμβάνοντα για την πυκνότητα του αέρα την τιμή της στην επιφάνεια της Γης, δηλαδή $\rho_{αέρα} = 1{,}29\ kg/m^3$ προκύπτει:

$$U_{πάνω}^2 = \frac{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^4}{1{,}29} + 95^2 = 25891 + 9025 = 34916 \rightarrow$$

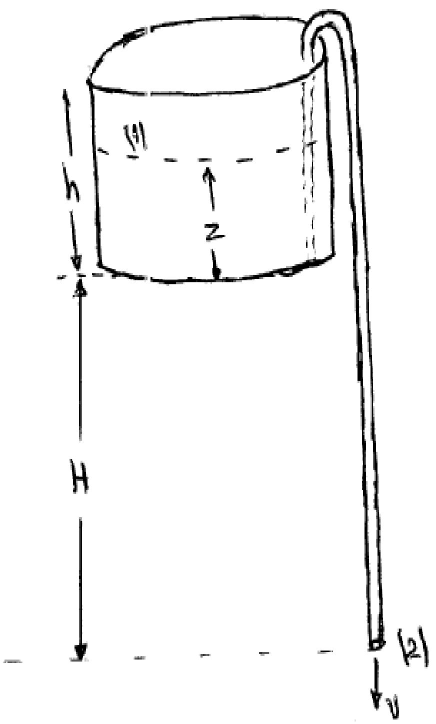
$$\rightarrow \boxed{U_{πάνω} \cong 187\ m/sec}$$

Άσκηση 9

Μια δεξαμενή βρίσκεται στην ταράτσα μια πολυκατοικίας σε ύψος H από το έδαφος (βλέπε σχήμα) και θέλουμε να την αδειάσουμε με σιφώνιο, που αποτελείται από σωλήνα διατομής A΄. Η δεξαμενή είναι κυλινδρική με εμβαδόν βάσης A και είναι γεμάτη με νερό συνολικού ύψους h. Εάν H>>h και A>>A΄, βρείτε (α) τη σχέση που δίδει τον χρόνο που χρειάζεται να αδειάσει η δεξαμενή συναρτήσει των παραπάνω μεγεθών και (β) πόσος είναι ο χρόνος εάν η δεξαμενή έχει διάμετρο D=2m και h=0,5m, H=30m, ενώ ο σωλήνας έχει διατομή A΄=3 cm^2. (Δίδεται g=10m/s^2 καθώς επίσης και η προσέγγιση για x<<1: $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$).



Λύση



α/

Έστω μια τυχαία χρονική στιγμή όπου το ύψος του νερού στη δεξαμενή είναι z.

Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα εκροής του νερού απ' το σιφώνιο εφαρμόζουμε το νόμο Bernoulli μεταξύ της ελεύθερης επιφάνειας του νερού στη δεξαμενή (1) και του κάτω άκρου του σιφωνίου (2), θεωρώντας ότι η ελεύθερη επιφάνεια είναι κατά προσέγγιση ακίνητη.

ν. Bernoulli $1 \to 2$: $\cancel{P_0} + \rho g(H+z) + 0 = \cancel{P_0} + 0 + \frac{1}{2}\rho u^2 \to$

$$\to \cancel{\rho} g(H+z) = \frac{1}{2}\cancel{\rho} u^2 \to u = \sqrt{2g(H+z)} \quad (1)$$

Αλλά η παροχή του σιφωνίου θα ισούται με το ρυθμό μείωσης του όγκου του νερού της δεξαμενής, οπότε θα ισχύει:

$$\Pi = A'u = -\frac{dV}{dt} \to A'u = -\frac{d}{dt}(Az) \to A'u = -A\frac{dz}{dt} \xrightarrow{(1)}$$

$$\to \frac{dz}{dt} = -\frac{A'}{A}\sqrt{2g(H+z)} \to \int_0^t dt = -\frac{A}{A'}\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_h^0 \frac{dz}{\sqrt{H+z}} \to$$

$$\to t = -\frac{A}{\sqrt{2g}A'}\, 2\sqrt{H+z}\Big|_h^0 = -\frac{2A}{\sqrt{2g}A'}\left(\sqrt{H} - \sqrt{H+h}\right) \to$$

$$\to t = \frac{2A}{\sqrt{2g}A'}\left(\sqrt{H+h} - \sqrt{H}\right) \quad (2)$$

Αλλά: $\sqrt{H+h} - \sqrt{H} = \sqrt{H}\left(\sqrt{\frac{H+h}{H}} - 1\right) = \sqrt{H}\left(\sqrt{1+\frac{h}{H}} - 1\right) \quad (3)$

κι επειδή $h \ll H \to \frac{h}{H} \ll 1$ οπότε: $\sqrt{1+\frac{h}{H}} \simeq 1 + \frac{h}{2H}$

οπότε η (3) δίνει:

$$\sqrt{H+h}-\sqrt{H}=\sqrt{H}\left(\cancel{1}+\frac{h}{2H}-\cancel{1}\right)=\frac{\sqrt{H}\,h}{2H}=\frac{h}{2\sqrt{H}} \quad (4)$$

Άρα η (2) λόγω της (4) δίνει τη σχέση του χρόνου που απαιτείται για να αδειάσει η δεξαμενή ως:

$$t=\frac{\cancel{2}A_1}{\sqrt{2g}\,A'}\cdot\frac{h}{\cancel{2}\sqrt{H}} \rightarrow \boxed{t=\frac{Ah}{A'\sqrt{2gH}}}$$

β) Είναι: $A=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=\pi\frac{D^2}{4}=3{,}14\cdot\frac{2^2}{4}\rightarrow A=3{,}14\,m^2$

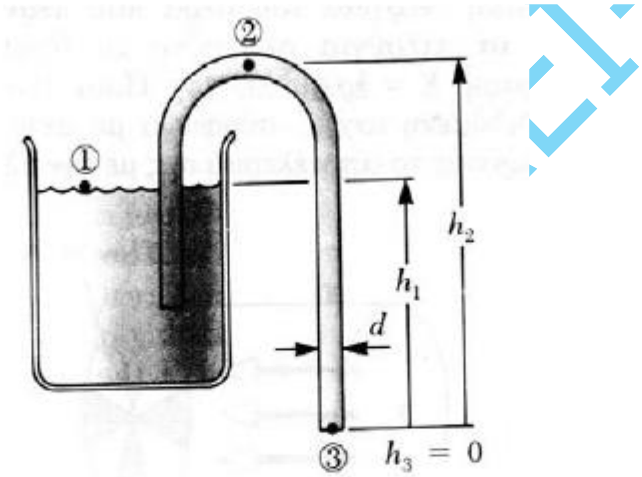
$A'=3cm^2=3\cdot10^{-4}\,m^2$

Οπότε: $t=\dfrac{3{,}14\,\cancel{m^2}\cdot0{,}5m}{3\cdot10^{-4}\,\cancel{m^2}\sqrt{2\cdot10\frac{m}{sec^2}\cdot30m}}=\dfrac{1{,}57\,\cancel{m}}{3\cdot10^{-4}\sqrt{600}\,\frac{\cancel{m}}{sec}}=\dfrac{1{,}57}{73{,}35\cdot10^{-4}}\,sec=$

$=0{,}0214\cdot10^4\,sec\rightarrow \boxed{t=214\,sec\simeq3{,}57\,min}$

Άσκηση 10

Σιφώνιο χρησιμοποιείται για να μεταγγίζει υγρό από μία δεξαμενή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το σιφώνιο έχει σταθερή διάμετρο d .
Α) Να βρεθεί μία έκφραση για το ρυθμό εκροής του όγκου του υγρού από το άκρο του σιφωνίου .
Β) Ποιος είναι ο περιορισμός για το ύψος της κορυφής του σιφωνίου;
Υποθέστε ότι η ροή είναι στρωτή και ότι το υγρό συμπεριφέρεται ως ιδανικό. Επίσης ο ρυθμός εκροής είναι αρκετά μικρός ώστε η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού να παραμένει κατά προσέγγιση ακίνητη.

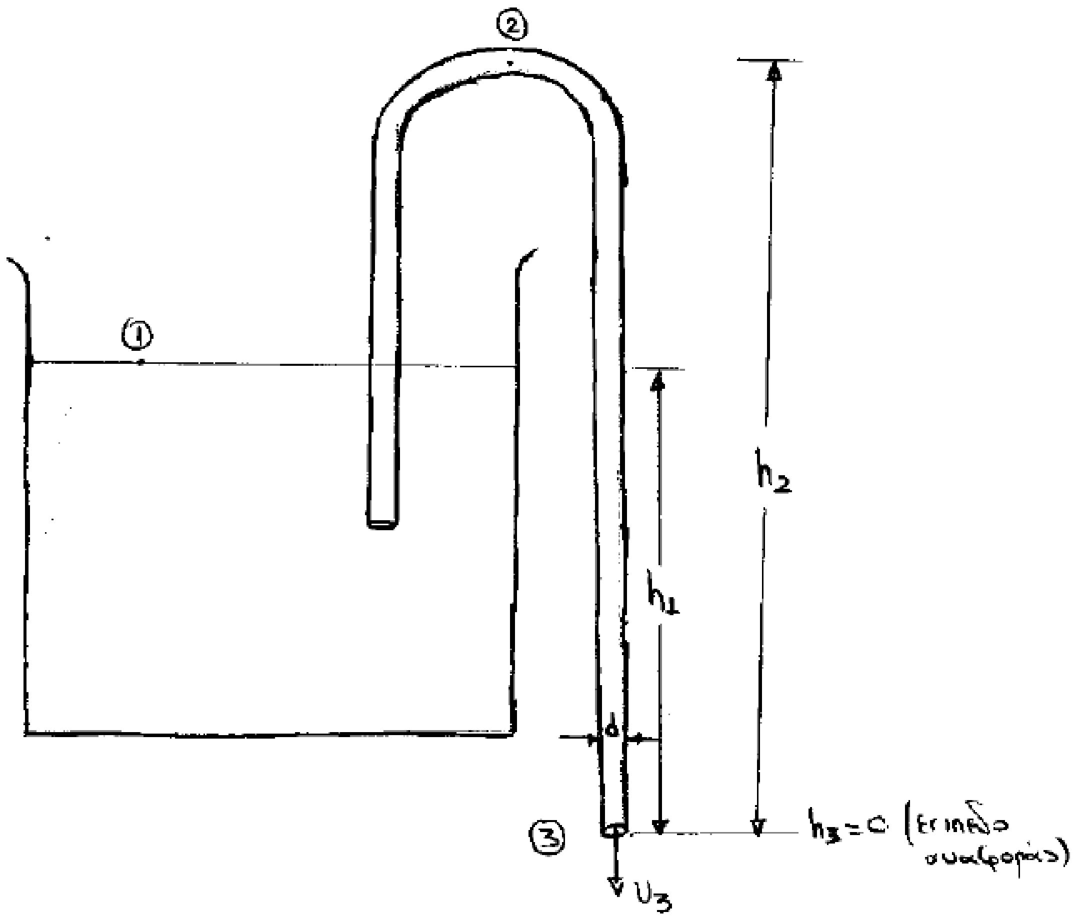


Λύση

A) Εφαρμόζουμε το νόμο Bernoulli μεταξύ των σταθμών (1) και (3)
θεωρώντας ότι η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού παραμένει ακίνητη

ν. Bernoulli$_{1\to3}$: $P_0 + \rho g h_1 + 0 = P_0 + 0 + \frac{1}{2}\rho u_3^2 \to$

$$\to u_3 = \sqrt{2gh_1} \quad (1)$$



Ο ρυθμός εκροής του όγκου του υγρού από το άκρο του σιφωνίου αποτελεί την παροχή του σιφωνίου. Δηλαδή:

$$Π = \frac{dV}{dt} = \frac{S\,dx}{dt} = Sυ_3 = π\left(\frac{d}{2}\right)^2 υ_3 \xrightarrow{(1)}$$

$$\rightarrow \boxed{Π = π\frac{d^2}{4}\sqrt{2gh_1}}$$

Β) Όταν το ύψος της κορυφής του σιφωνίου απ' την επιφάνεια του υγρού $h_2 - h_1$ είναι μέγιστο τότε η ταχύτητα και η πίεση του υγρού στην κορυφή (στάθμη 2) είναι προσεγγιστικά μηδέν.

Συνεπώς εφαρμόζοντας τότε το νόμο Bernoulli μεταξύ των σταθμών (1) και (2) προκύπτει:

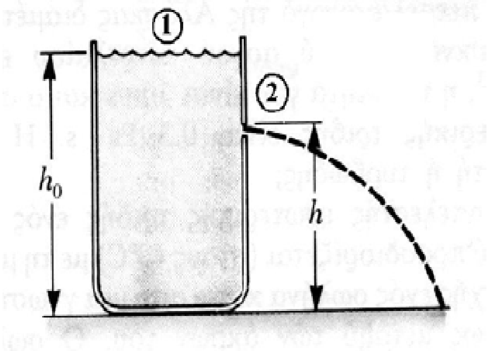
$$\text{ν. Bernoulli}_{1\to 2}: \; P_o + \rho g h_1 + 0 = 0 + \rho g h_2 + 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho g (h_2 - h_1) = P_o \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{(h_2 - h_1)_{max} = \frac{P_o}{\rho g}}$$

Άσκηση 11

Μία μεγάλη δεξαμενή είναι γεμάτη με υγρό μέχρι ύψους h_0. Εάν σε αυτή ανοίξουμε μία μικρή οπή σε ύψος h από τη βάση της δεξαμενής να υπολογισθεί:
α) Σε πόση απόσταση από τη δεξαμενή θα συναντήσει το έδαφος η φλέβα του υγρού που εκτοξεύεται από την οπή;
β) Για ποια τιμή του ύψους h η παραπάνω απόσταση γίνεται μέγιστη;
Υποθέστε ότι ο ρυθμός εκροής είναι αρκετά μικρός ώστε η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού να παραμένει κατά προσέγγιση ακίνητη.



Λύση

α) Από την εξίσωση συνέχειας: $A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = \dfrac{A_2}{A_1}\upsilon_2 \ll \upsilon_2 \overset{A_2 \ll A_1}{\Rightarrow} \upsilon_1 \approx 0$

Από την εξίσωση του Bernoulli:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \underset{p_1=p_2=p_a}{\overset{\upsilon_1\approx 0}{\Rightarrow}} p_a + \rho g\left(y_1 - y_2\right) = p_a + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \Rightarrow$$

$$\cancel{\rho} g\left(y_1 - y_2\right) = \frac{1}{2}\cancel{\rho}\upsilon_2^2 \overset{y_1 - y_2 = h_0 - h}{\Rightarrow} \upsilon_2 = \sqrt{2g\left(h_0 - h\right)}$$

Από τις εξισώσεις οριζόντιας βολής έχουμε:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

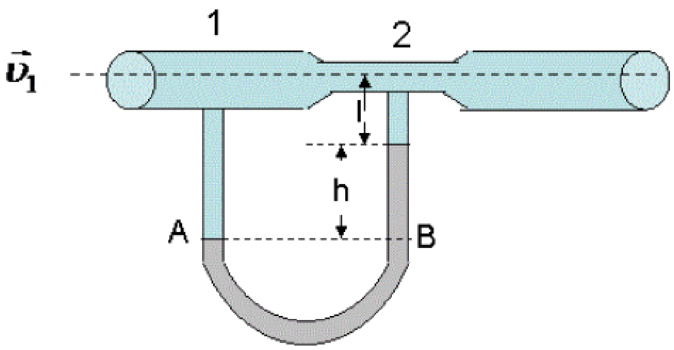
$$S = \upsilon_2 t \Rightarrow S = \sqrt{2g\left(h_0 - h\right)}\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow S = 2\sqrt{\left(h_0 - h\right)h}$$

β) $S = 2\sqrt{(h_0 - h)h} = \max \Leftrightarrow f(h) = h_0 h - h^2 = \max$

$f'(h) = 0 \Rightarrow h_0 - 2h = 0 \Rightarrow h = \dfrac{h_0}{2}$ (μέγιστο, διότι $f''(h) = -2 < 0$)

Άσκηση 12

Σε έναν μετρητή Venturi (διάταξη για τη μέτρηση της ταχύτητας των ρευστών που ρέουν μέσα σε σωλήνες) η είσοδος του υγρού (νερό) έχει διάμετρο 0.12m και η στένωση 0.06m. Η διαφορά ύψους h στις δύο στήλες του υοειδούς μανόμετρου που περιέχει υδράργυρο και είναι συνδεδεμένο στην είσοδο και στη στένωση του μετρητή Venturi είναι 0.09m (βλ. σχήμα) . Να βρεθεί η παροχή της υγρής φλέβας. Δίδεται η πυκνότητα του υδραργύρου 13.6x10^3 kg/m^3. (g=9.81 m/s^2)



Λύση

Επειδή η διατομή A_1 είναι μεγαλύτερη από τη διατομή A_2, η ταχύτητα υ_2 θα είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας υ_1. Από την εξίσωση συνέχειας:

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{A_1}{A_2}\upsilon_1 \ (1)$$

Από την εξίσωση του Bernoulli:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \overset{y_1=y_2}{\underset{(1)}{\Rightarrow}} p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \Rightarrow p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right] \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[(A_1/A_2)^2 - 1\right]}}$$

Η πίεση στην περιοχή 1 είναι μεγαλύτερη από την πίεση στην περιοχή 2, διότι η ταχύτητα ροής είναι μικρότερη στην περιοχή 1 από αυτή στην περιοχή 2. Άρα, προκύπτει μια δύναμη (λόγω διαφοράς πίεσης) που επιταχύνει το ρευστό καθώς εισέρχεται στο λαιμό (με τη μικρότερη διατομή).

Το ότι η πίεση στην περιοχή 1 είναι μεγαλύτερη από αυτή στην περιοχή 2 φαίνεται από το ότι το νερό συμπιέζει περισσότερο την στήλη υδραργύρου στο σωλήνα που συνδέεται με την περιοχή 1 από ό,τι στην περιοχή 2 με αποτέλεσμα την ανύψωση κατά h της στήλης υδραργύρου στο δεξί τμήμα του σωλήνα.

Η διαφορά πίεσης ισούται με:

$$p_1 - p_2 = \rho g h$$

και επομένως:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[(A_1/A_2)^2 - 1\right]}} = \sqrt{\frac{2gh}{(A_1/A_2)^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2gh}{(r_1/r_2)^4 - 1}}$$

διότι $A_1 = \pi r_1^2$ και $A_2 = \pi r_2^2$.

Αντικαθιστώντας $r_1 = \frac{0.12}{2}m = 0.06m$, $r_2 = \frac{0.06}{2}m = 0.03m$, $h = 0.09m$, $g = 9.81\frac{m}{s^2}$:

παίρνουμε:

$$\upsilon_1 = 0.343 m/s$$

Η παροχή (όγκου) της φλέβας είναι:

$$A_1\upsilon_1 = \pi r_1^2 \upsilon_1 = 0.0039 m^3/s = 3.9 \cdot 10^{-3} m^3/s$$

Άσκηση 13

Μεταλλική σφαίρα ακτίνας r=2x10^{-3}m και πυκνότητας ρ_σ=2.7x10^3 kg/m^3 πέφτει ελεύθερα μέσα σε δοχείο που περιέχει γλυκερίνη (πυκνότητας ρ_γ=1.6x10^3 kg/m^3). Ο συντελεστής ιξώδους είναι η=0.83 kg m^{-1} s^{-1}.
Να βρεθεί η οριακή ταχύτητα της σφαίρας και η επιτάχυνσή της όταν η ταχύτητά της ισούται με το μισό της οριακής. (g=9.81 m/s^2)

Λύση

Με βάση το Νόμο του Stokes η σφαίρα δέχεται λόγω του ιξώδους αντίσταση μέτρου:

$$F = 6\pi\eta r\upsilon \text{ (με φορά προς τα πάνω)}$$

Επίσης η σφαίρα δέχεται το βάρος της: $mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\sigma g$ (προς τα κάτω)

και την άνωση: $B = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\gamma g$ (προς τα πάνω)

Η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\sigma g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\gamma g - 6\pi\eta r\upsilon = m\frac{d\upsilon}{dt} \quad (1)$$

Από την εξίσωση κίνησης συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα της σφαίρας αυξάνεται τείνοντας να φθάσει σε μια οριακή (μέγιστη) τιμή οπότε και η επιτάχυνση θα έχει μηδενιστεί:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\sigma g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\gamma g - 6\pi\eta r\upsilon_{o\rho} = 0 \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 g\left(\rho_\sigma - \rho_\gamma\right)}{6\pi\eta r} \Rightarrow$$

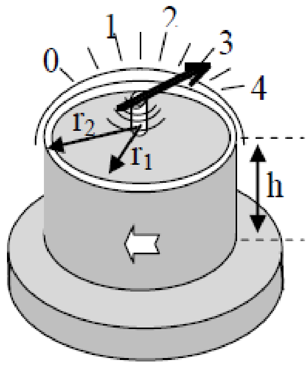
$$\upsilon_{o\rho} = \frac{2r^2 g\left(\rho_\sigma - \rho_\gamma\right)}{9\eta} \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = \frac{2\cdot\left(2\cdot 10^{-3} m\right)^2 \cdot 9.81\frac{m}{s^2}\cdot 1.1\cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}}{9\cdot 0.83\frac{kg}{m\cdot s}} = 11.6\cdot 10^{-3}\frac{m}{s}$$

Η εξίσωση κίνησης (1) γράφεται ισοδύναμα ως:

$$6\pi\eta r\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon\right)=m\frac{d\upsilon}{dt}\Rightarrow 6\pi\eta r\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon\right)=\frac{4}{3}\pi r^{3}\rho_{\sigma}\frac{d\upsilon}{dt}\Rightarrow\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{9\eta\left(\upsilon_{o\rho}-\upsilon\right)}{2r^{2}\rho_{\sigma}}\overset{\upsilon=\upsilon_{o\rho}/2}{\Rightarrow}$$

$$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{9\eta\upsilon_{o\rho}}{4r^{2}\rho_{\sigma}}=\left(\frac{\rho_{\sigma}-\rho_{\gamma}}{2\rho_{\sigma}}\right)g\Rightarrow\frac{d\upsilon}{dt}=\left(\frac{2.7-1.6}{2\cdot 2.7}\right)\cdot 9.81m/s^{2}=2.00m/s^{2}$$

Άσκηση 14



Μετρητής ιξώδους, του οποίου η λειτουργία στηρίζεται προσεγγιστικά στο πείραμα ορισμού του ιξώδους, αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους με ελάχιστα διαφορετικές ακτίνες r_1 και r_2, εκ των οποίων ο εξωτερικός κύλινδρος περιστρέφεται μηχανικά με γωνιακή ταχύτητα ω, ο δε εσωτερικός φέρει δείκτη και ελατήριο επαναφοράς. Ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους τοποθετούμε το υγρό του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε το ιξώδες. Θέτουμε τον εξωτερικό κύλινδρο σε περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα ω, οπότε λόγω του ιξώδους, εξασκείται ροπή T στον εσωτερικό κύλινδρο, την οποίαν μετράμε με τον σχετικό δείκτη. Υπολογίστε το ιξώδες με αυτήν την μέθοδο αν, $r_1 = 4.00$cm, $r_2 = 4.28$cm, ω = 20στροφ/min, T = 3.24 Nm και h = 10.0cm το ύψος του υγρού ανάμεσα στους δύο κυλίνδρους.

Λύση

Η δύναμη που ασκείται σε έναν απειροστό κυλινδρικό φλοιό ύψους h, ακτίνας r και πάχους dr είναι:

$$F = \eta A r \frac{d\omega}{dr} = \eta(2\pi r h) r \frac{d\omega}{dr} = 2\pi h \eta r^2 \frac{d\omega}{dr}$$

όπου $A = 2\pi r h$ η παράπλευρη επιφάνεια του φλοιού.

Η ροπή σε μια επιφάνεια ακτίνας r του απειροστού κυλινδρικού φλοιού είναι:

$$\tau = r \cdot F = 2\pi h \eta r^3 \frac{d\omega}{dr}$$

Επειδή δεν υπάρχει γωνιακή επιτάχυνση (στάσιμη κατάσταση) η καθαρή (ολική) ροπή που δέχεται ο απειροστός φλοιός πρέπει να είναι μηδέν, δηλ. η ροπή στην εσωτερική επιφάνεια ακτίνας r εξουδετερώνεται από τη ροπή στην ακτίνα $r + dr$. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει η ροπή να είναι σταθερή, δηλ. ανεξάρτητη του r:

$$\tau = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow r^3 \frac{d\omega}{dr} = A = \sigma\tau\alpha\theta.$$

$$\frac{d\omega}{dr} = Ar^{-3} \Rightarrow \int d\omega = \int Ar^{-3}dr \Rightarrow \omega(r) = -\frac{Ar^{-2}}{2} + B = -\frac{A}{2r^2} + B$$

Έχουμε:

$$\omega(r_1) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{A}{2r_1^2} + B \Rightarrow B = \frac{A}{2r_1^2} \quad (1)$$

$$\omega(r_2) = \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = -\frac{A}{2r_2^2} + B \Rightarrow \omega_2 = -\frac{A}{2r_2^2} + \frac{A}{2r_1^2} \Rightarrow$$

$$\omega_2 = A\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_1^2 r_2^2}\right) \Rightarrow A = \frac{2r_1^2 r_2^2 \omega_2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Η ροπή σε μια επιφάνεια του φλοιού ακτίνας r είναι:

$$\tau = 2\pi h\eta A = \frac{4\pi h\eta r_1^2 r_2^2 \omega_2}{r_2^2 - r_1^2}$$

Αντικαθιστούμε:

$$\tau = 3.24\ N \cdot m$$

$$r_1 = 4.00cm = 0.0400m$$

$$r_2 = 4.28cm = 0.0428m$$

$$h = 10.0cm = 0.100m$$

$$\omega_2 = 20\frac{\text{στροφές}}{\min} = 20 \cdot \frac{2\pi\ rad}{60s} = \frac{2\pi}{3} rad/s\ ,$$

οπότε το ιξώδες είναι:

$$\eta = \frac{\tau\left(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}\right)}{4\pi h r_1^{\,2} r_2^{\,2}\omega_2} \Rightarrow \eta = 97.4 N\cdot s/m^2 = 97.4 \;\; Pa\cdot s$$

<u>Παρατήρηση</u>: Το ιξώδες αυτό είναι πολύ υψηλό! Τέτοιο συντελεστή ιξώδους θα μπορούσε να παρουσιάσει η λιωμένη σοκολάτα ή το κέτσαπ.