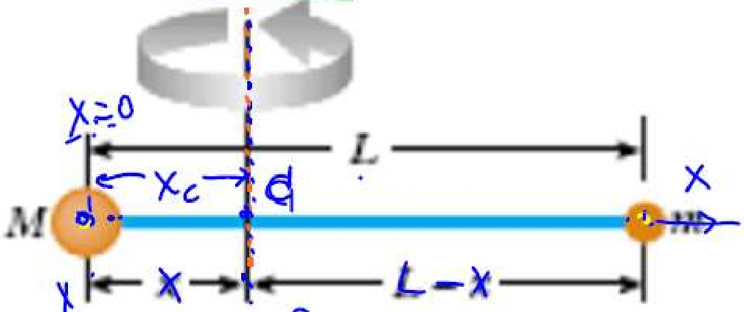
Άσκηση

Δύο μπάλες με μάζες M και m είναι συνδεδεμένες με μια στερεά ράβδο αμελητέας μάζας μήκους L, όπως φαίνεται στο σχήμα. Για ένα άξονα κάθετο στη ράβδο δείξτε ότι το σύστημα έχει την ελάχιστη ροπή αδράνειας όταν ο άξονας περνά από το κέντρο μάζας του συστήματος και υπολογίστε την τιμή της.



$$I_{(x)} = Mx^2 + m(L-x)^2 \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dx} = 0 \xrightarrow{(1)} 2Mx + 2m(L-x)(-1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \cancel{2}Mx = \cancel{2}m(L-x) \rightarrow Mx = mL - mx \rightarrow$$

$$\rightarrow (M+m)x = mL \rightarrow \boxed{x = \frac{mL}{M+m}}$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = 2M + 2m(-1)(-1) = 2(M+m) > 0 \text{ δηλ. min}$$

κ.Μ.: $x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{M \cdot 0 + mL}{M+m} \rightarrow x_c = \frac{mL}{M+m}$

Θ. Steiner: $I_z = I_c + Md^2$

I_c = min

$$I_{min} = I_{\left(x = \frac{mL}{M+m}\right)} \overset{(1)}{=} M \frac{m^2 L^2}{(M+m)^2} + m\left(L - \frac{mL}{M+m}\right)^2 =$$

$$= \frac{M m^2 L^2}{(M+m)^2} + m\left(\frac{ML + \cancel{mL} - \cancel{mL}}{M+m}\right)^2 =$$

$$= \frac{M m^2 L^2}{(M+m)^2} + m\frac{M^2 L^2}{(M+m)^2} = \frac{mM\cancel{(m+M)}}{(M+m)^{\cancel{2}}} L^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \boxed{I_{min} = \frac{mM}{M+m} L^2}$$

μ: ανηγμένη μάζα.

$$\left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}.\right)$$

Άσκηση

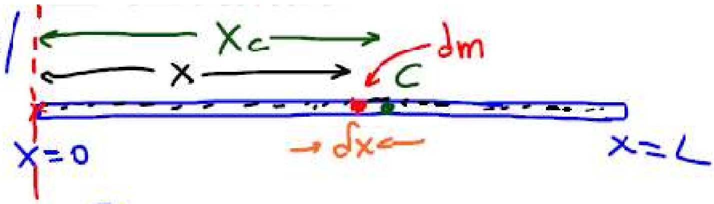
Ευθύγραμμη ράβδος μήκους L και μάζας M τοποθετείται πάνω στον άξονα x, έτσι ώστε το ένα άκρο της να βρίσκεται στην αρχή του άξονα. Η γραμμική πυκνότητα μάζας της ράβδου $\lambda = dm/dx$, αυξάνει από την τιμή λ_0 στο ένα άκρο της (x=0) στην τιμή $2\lambda_0$ στο άλλο άκρο της (x=L), σύμφωνα με τη σχέση $\boxed{\lambda(x) = \lambda_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)}$. μη ομογενής

α) Υπολογίστε τη θέση του κέντρου μάζας της ράβδου.

β) Υπολογίστε την ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον κατακόρυφο άξονα y, που διέρχεται από το ελαφρύ άκρο της ράβδου.

γ) Η ράβδος εκκινώντας από την ηρεμία και σε οριζόντια θέση, περιστρέφεται χωρίς τριβές, υπό την επίδραση του βάρους της, γύρω από άξονα που διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας. Ποια η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή φτάσει στην κατακόρυφη θέση;

α/



$x_c = ?$

$$x_c = \frac{1}{M}\int x\,dm \quad (1)$$

$$\lambda_{(x)} = \frac{dm}{dx} \longrightarrow dm = \lambda(x)\,dx \longrightarrow dm = \lambda_0\left(1+\frac{x}{L}\right)dx \quad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\leadsto} x_c = \frac{\lambda_0}{M}\int_0^L x\left(1+\frac{x}{L}\right)dx = \frac{\lambda_0}{M}\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3L}\right]_0^L =$$

$$= \frac{\lambda_0}{M}\left(\frac{L^2}{2}+\frac{L^{\cancel{3}2}}{3\cancel{L}}\right) = \frac{\lambda_0}{M}\,\frac{5}{6}L^2 \quad (3)$$

(2) $\leadsto \int_0^M dm = \lambda_0 \int_0^L \left(1+\frac{x}{L}\right) dx \to M = \lambda_0\left(L + \frac{L^2}{2L}\right) \to$

$\to M = \frac{3}{2}\lambda_0 L$ (4)

(3) $\overset{(4)}{\leadsto} x_c = \frac{\lambda_0}{\frac{3}{2}\lambda_0 L}\cdot\frac{5}{6}L^2 \to$

$\to \boxed{x_c = \frac{5}{9}L}$ ✓

β/ $I_0 = \int x^2 dm \overset{(2)}{=} \lambda_0 \int_0^L x^2\left(1+\frac{x}{L}\right)dx = \lambda_0\left[\frac{L^3}{3}+\frac{L^4}{4L}\right] \to$

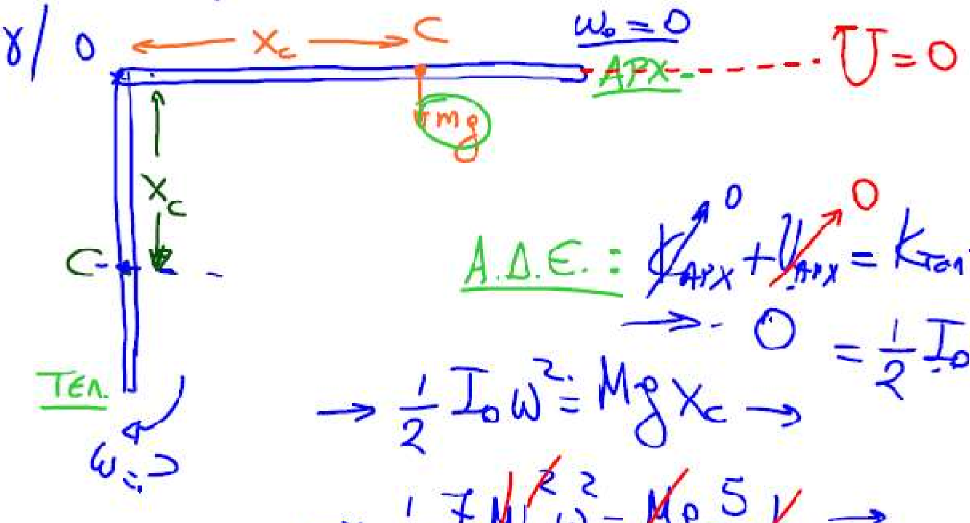
$\to I_0 = \frac{7}{12}\lambda_0 L^3$

(4) $\leadsto \lambda_0 = \frac{2M}{3L}$

$\to I_0 = \frac{7}{12}\frac{2M}{3L}L^3 \to$

$\to \boxed{I_0 = \frac{7}{18}ML^2}$ ✓

γ/



Α.Δ.Ε.: $K_{ΑΡΧ} + U_{ΑΡΧ} = K_{ΤΕΛ} + U_{ΤΕΛ} \to$

$\to 0 = \frac{1}{2}I_0\omega^2 - Mg x_c \to$

$\to \frac{1}{2}I_0\omega^2 = Mg x_c \to$

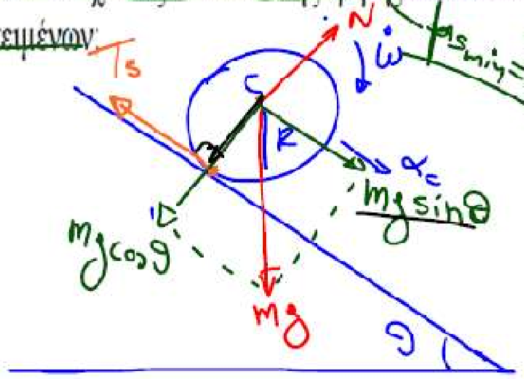
$\to \frac{1}{2}\frac{7}{18}ML^2\omega^2 = Mg\frac{5}{9}L \to$

$\to \omega^2 = \frac{20g}{7L} \to \boxed{\omega = \sqrt{\frac{20g}{7L}}}$

Άσκηση

α/ Συγκρίνετε την επιτάχυνση (α_c) του κέντρου μάζας ενός ομογενούς δίσκου μάζας M και ενός στεφανιού ίδιας μάζας που κυλούν χωρίς να ολισθαίνουν σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ.

β/ Ποιός είναι ο ελάχιστος συντελεστής τριβής που απαιτείται για την καθαρή κύλιση των δύο αντικειμένων; $\mu_{s_{min}} =$



Μεταφ. κιν. κ.μ.:

$$\sum \vec{F}_x = m\vec{\alpha}_c \rightarrow mg\sin\theta - T_s = m\alpha_c \quad (1)$$

Περιστροφ. κιν. περί κ.μ.:

$$\sum \vec{\tau}_c = I_c \dot{\vec{\omega}} \rightarrow R T_s \cancel{\sin 90}^{\,1} = I_c \dot{\omega} \quad (2)$$

Λόγω κύλισης χωρίς ολίσθηση: $V_c = \omega R \rightarrow \frac{dV_c}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R \rightarrow$

$$\rightarrow \alpha_c = \dot{\omega} R \quad (3)$$

$$(2) \overset{(3)}{\rightsquigarrow} R T_s = I_c \frac{\alpha_c}{R} \rightarrow T_s = \frac{I_c}{R^2}\alpha_c \quad (4)$$

$$(1) \overset{(4)}{\rightsquigarrow} mg\sin\theta - \frac{I_c}{R^2}\alpha_c = m\alpha_c \rightarrow mg\sin\theta = \left(m + \frac{I_c}{R^2}\right)\alpha_c \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha_c = \frac{mg\sin\theta}{m + \frac{I_c}{R^2}} \rightarrow \boxed{\alpha_c = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_c}{mR^2}}} \quad (5)$$

Για το δίσκο: $\alpha_{\delta\iota\sigma\kappa.} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{mR^2}} = \frac{2}{3} g\sin\theta.$

Για τη στεφάνη:

$$\alpha_{\sigma\tau\varepsilon\varphi.} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{mR^2}{mR^2}} = \frac{g\sin\theta}{1+1} = \frac{1}{2} g\sin\theta$$

άρα: $\alpha_{\delta\iota\sigma\kappa.} > \alpha_{\sigma\tau\varepsilon\varphi.}$

$④ \overset{(5)}{\rightsquigarrow} \; T_s = \frac{I_c}{R^2} \frac{g \sin\theta}{1 + \frac{I_c}{mR^2}} = \frac{I_c \, g \sin\theta}{R^2 + \frac{I_c}{m}}$ ⑥

Για να κυλίεται χωρίς ολίσθηση πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} T_s \leq \mu_s N \\ \Sigma F_y = 0 \rightarrow N = mg\cos\theta \end{array}\right\} \xrightarrow{(6)} \frac{I_c \, \cancel{g} \sin\theta}{R^2 + \frac{I_c}{m}} \leq \mu_s \, m\cancel{g}\cos\theta \rightarrow$$

$$\rightarrow \mu_s \geq \frac{I_c}{mR^2 + I_c} \cdot \tan\theta$$

Για το δίσκο: $\mu_s \geq \frac{\tan\theta}{3}$ δηλ. $\mu_{s\,min} = \frac{\tan\theta}{3}$

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας