ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΩΝ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

Μια χορδή με ομοιόμορφη κατανομή σφαιριδίων αποτελείται από τρία σφαιρίδια και τέσσερα τμήματα μήκους α, ενώ η οριακή συνθήκη είναι ότι και τα δύο άκρα της χορδής είναι ελεύθερα (αυτά είναι συνδεδεμένα με αβαρείς κρίκους, που γλιστρούν χωρίς τριβή γύρω από δύο ράβδους). Να προσδιοριστούν οι σχηματισμοί και οι συχνότητες των τρόπων εγκάρσιας ταλάντωσης της χορδής με τα σφαιρίδια.

Λύση

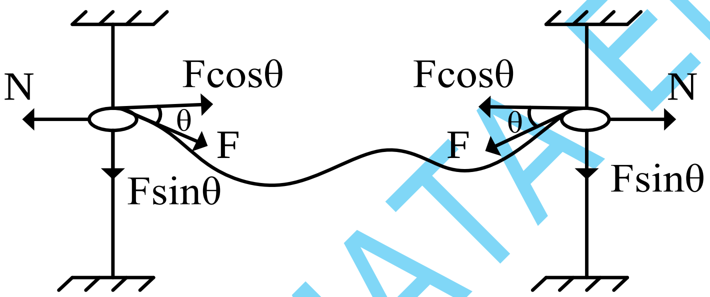
Η εξίσωση για τις μετατοπίσεις των σφαιριδίων είναι:

$$y_n(t) = (A\sin kn\alpha + B\cos kn\alpha)\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(1)}$$

Οι οριακές συνθήκες στα δύο ελεύθερα άκρα της χορδής είναι:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{και} \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=4\alpha} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Απόδειξη της (2):



Σε κάθε αβαρή κρίκο ασκείται μια κάθετη δύναμη N από τη ράβδο και μια δύναμη F από τη χορδή η οποία έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της χορδής στο κάθε άκρο.

Έτσι λόγω ισορροπίας στην οριζόντια διεύθυνση είναι:

$$N = F\cos\theta$$

Αλλά η κάθετη δύναμη N ισούται με την τάση T με την οποία έχει τεντωθεί η χορδή οπότε:

$$T = N = F\cos\theta \Rightarrow F = T/\cos\theta \qquad \textbf{(3)}$$

Κατά την κατακόρυφη διεύθυνση επειδή οι κρίκοι είναι αβαρείς (είναι Μα=0) οπότε ισχύει:

$$F\sin\theta = 0 \overset{(3)}{\Rightarrow} T\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0 \Rightarrow T\tan\theta = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Αλλά η κλίση της χορδής στα ελεύθερα άκρα είναι: $\tan\theta = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0 \text{ ή } x=4\alpha}$ οπότε η **(4)** δίνει τελικά:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{και} \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=4\alpha} = 0$$ **οριακές συνθήκες τύπου Neumann**

Επομένως επειδή είναι x=nα η **(1)** δίνει:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = (Ak\cos kn\alpha - Bk\sin kn\alpha)\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(5)}$$

Άρα στα ελεύθερα άκρα οι οριακές συνθήκες **(2)** λόγω της **(5)** δίνουν:

Για x=0 ή n=0: $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow Ak\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow A = 0$ **(6)**

και για x=4α ή n=4:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=4\alpha} = 0 \Rightarrow (Ak\cos 4k\alpha - Bk\sin 4k\alpha)\cos(\omega t + \varphi) = 0 \overset{(6)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -Bk\sin 4k\alpha\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow \sin 4k\alpha = 0 \Rightarrow 4k\alpha = s\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_s = \frac{s\pi}{4\alpha}, \quad s = 1,2,3 \qquad \textbf{(7)}$$

Αλλά από τη σχέση διασποράς της χορδής με σφαιρίδια **(2-18)** είναι:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{4T}{m\alpha}}\sin\frac{k_s\alpha}{2} \overset{(7)}{\Rightarrow} \omega_s = \sqrt{\frac{4T}{m\alpha}}\sin\frac{s\pi}{8}$$

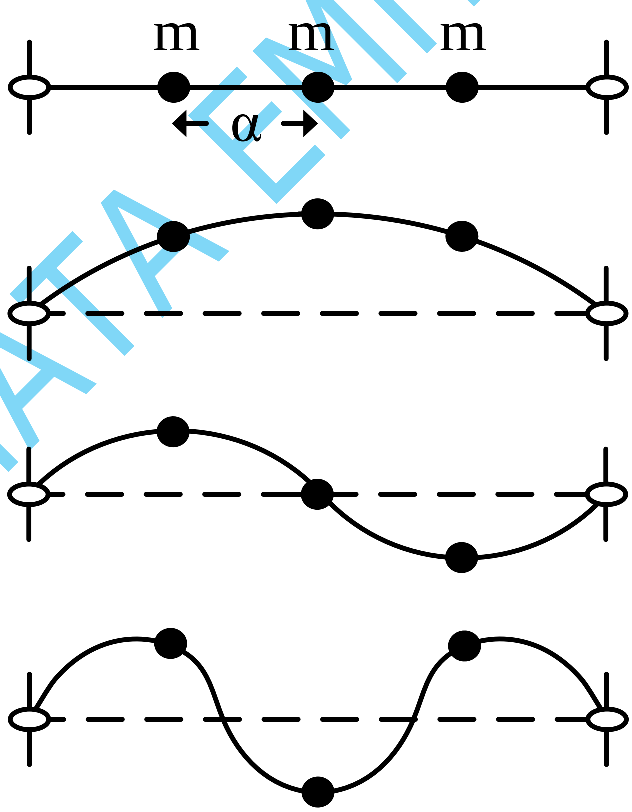
Άρα οι συχνότητες, οι κυματάριθμοι και τα μήκη κύματος των τρόπων εγκάρσιας ταλάντωσης της χορδής είναι:

Για s=1: $\omega_1 = \sqrt{\frac{4T}{m\alpha}} \sin\frac{\pi}{8}, \quad k_1 = \frac{\pi}{4\alpha}, \quad \lambda_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 8\alpha$

Για s=2: $\omega_2 = \sqrt{\frac{4T}{m\alpha}} \sin\frac{\pi}{4}, \quad k_2 = \frac{\pi}{2\alpha}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2} = 4\alpha$

Για s=3: $\omega_3 = \sqrt{\frac{4T}{m\alpha}} \sin\frac{3\pi}{8}, \quad k_3 = \frac{3\pi}{4\alpha}, \quad \lambda_3 = \frac{2\pi}{k_3} = \frac{8\alpha}{3}$

Οι σχηματισμοί των τριών αυτών τρόπων ταλάντωσης φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



ΘΕΜΑ 2

Να βρεθούν οι σχηματισμοί και οι συχνότητες των τρόπων για τις εγκάρσιες ταλαντώσεις μιας χορδής με 5 σφαιρίδια ομοιόμορφα κατανεμημένα, με το ένα άκρο της χορδής σταθερό και το άλλο ελεύθερο. Τοποθετείστε τα 5 αντίστοιχα σημεία στο διάγραμμα της σχέσης διασποράς ω(k).

Λύση

Η εξίσωση για τις μετατοπίσεις των σφαιριδίων είναι:

$$y_n(t) = (A\sin kn\alpha + B\cos kn\alpha)\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(1)}$$

Οι οριακές συνθήκες για τα δύο άκρα της χορδής είναι για $x = n\alpha = 0: y_o = 0$ επειδή το αριστερό άκρο είναι σταθερό και για $x = 6\alpha: \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=6\alpha} = 0$ επειδή το δεξιό άκρο είναι ελεύθερο.
Άρα από την **(1)** προκύπτει:

Για x=nα=0 : $y_o = 0 \Rightarrow B\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow B = 0$

Οπότε $y_n(t) = A\sin kn\alpha\cos(\omega t + \varphi)$

και $\frac{\partial y}{\partial x} = Ak\cos kn\alpha\cos(\omega t + \varphi)$ **(2)**

Έτσι η **(2)** για $x = n\alpha = 6\alpha$ δίνει:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=6\alpha} = 0 \Rightarrow Ak\cos 6k\alpha\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow \cos 6k\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6k\alpha = s\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow k_s = \frac{s\pi}{6\alpha} + \frac{\pi}{12\alpha}, \quad s = 1,2,3,4,5 \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά από τη σχέση διασποράς της χορδής με σφαιρίδια **(2-18)** είναι:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{4T}{m\alpha}}\sin\frac{k_s\alpha}{2} \overset{(3)}{\Rightarrow} \omega_s = \sqrt{\frac{4T}{m\alpha}}\sin\left(\frac{s\pi}{12} + \frac{\pi}{24}\right) \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα οι συχνότητες,οι κυματάριθμοι και τα μήκη κύματος των τρόπων εγκάρσιας ταλάντωσης της χορδής είναι:

Για s=1: $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{4T}{m\alpha}}\sin\dfrac{\pi}{8}, \quad k_1 = \dfrac{\pi}{4\alpha}, \quad \lambda_1 = \dfrac{2\pi}{k_1} = 8\alpha$

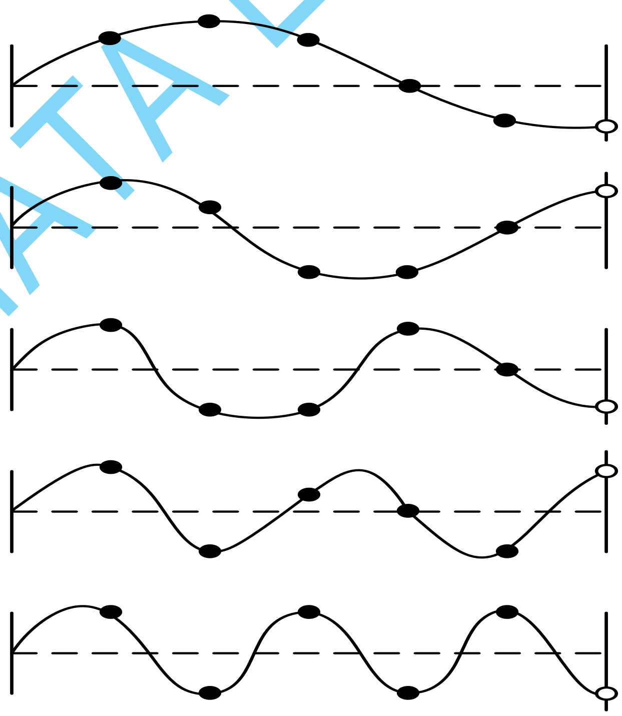
Για s=2: $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{4T}{m\alpha}}\sin\dfrac{5\pi}{24}, \quad k_2 = \dfrac{5\pi}{12\alpha}, \quad \lambda_2 = \dfrac{2\pi}{k_2} = \dfrac{24\alpha}{5}$

Για s=3: $\omega_3 = \sqrt{\dfrac{4T}{m\alpha}}\sin\dfrac{7\pi}{24}, \quad k_3 = \dfrac{7\pi}{12\alpha}, \quad \lambda_3 = \dfrac{2\pi}{k_3} = \dfrac{24\alpha}{7}$

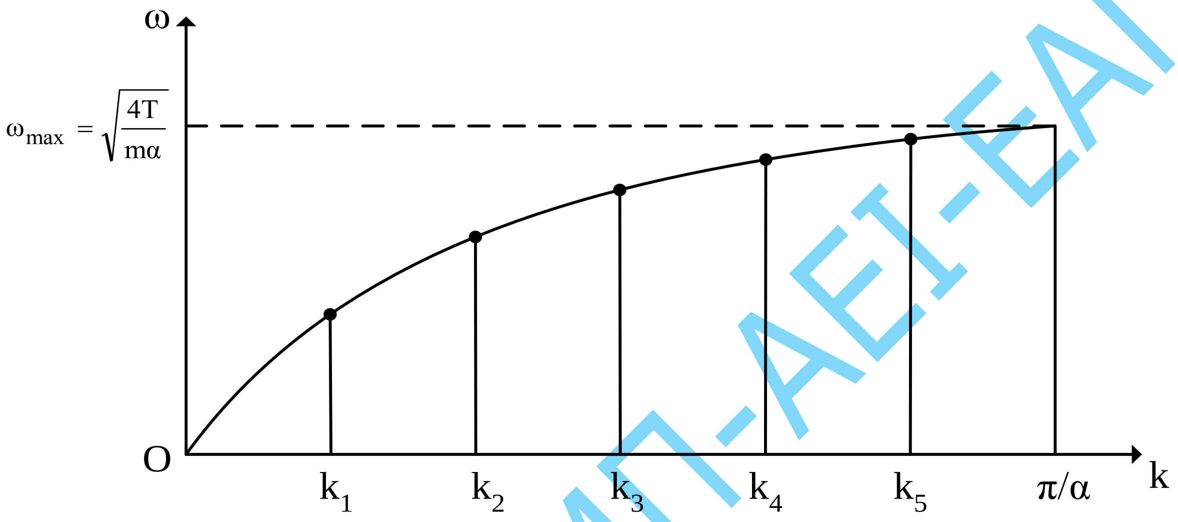
Για s=4: $\omega_4 = \sqrt{\dfrac{4T}{m\alpha}}\sin\dfrac{3\pi}{8}, \quad k_4 = \dfrac{3\pi}{4\alpha}, \quad \lambda_4 = \dfrac{2\pi}{k_4} = \dfrac{8\alpha}{3}$

Για s=5: $\omega_5 = \sqrt{\dfrac{4T}{m\alpha}}\sin\dfrac{11\pi}{24}, \quad k_5 = \dfrac{11\pi}{12\alpha}, \quad \lambda_5 = \dfrac{2\pi}{k_5} = \dfrac{24\alpha}{11}$

Οι σχηματισμοί αυτών των τρόπων ταλάντωσης της χορδής φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα:



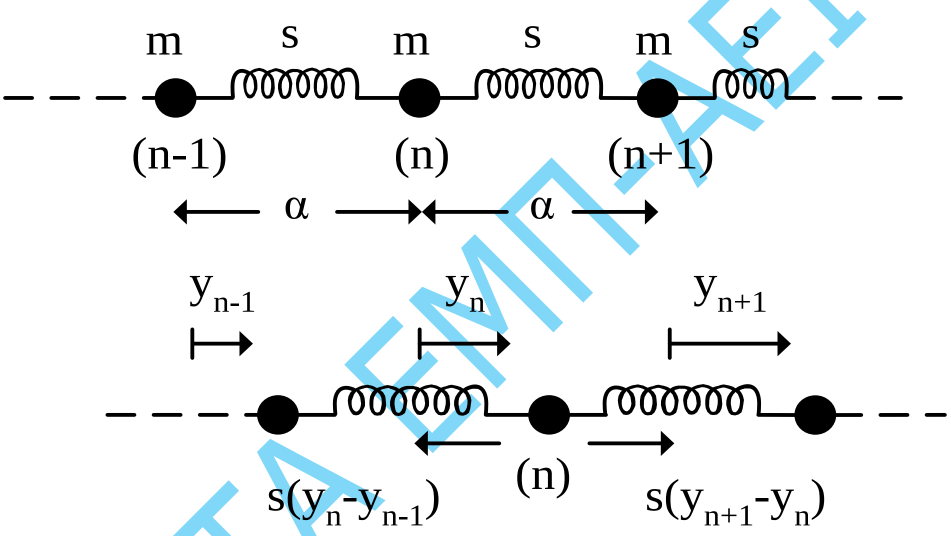
Το διάγραμμα της σχέσης διασποράς **(4)** και τα αντίστοιχα σημεία των τιμών $k_1, k_2, k_3, k_{4,} k_5$ φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα.



ΘΕΜΑ 3

Θεωρείστε μια διάταξη N συζευγμένων σφαιριδίων μάζας m το καθένα, τα οποία ενώνονται με ελατήρια σταθεράς s και μήκους α το καθένα. Η διάταξη τοποθετείται πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι και τα ελατήρια που συνδέουν τα σφαιρίδια έχουν το φυσικό τους μήκος στην κατάσταση ισορροπίας του συστήματος.
α) Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση κίνησης του n – οστού σφαιριδίου.
β) Να βρεθεί η σχέση διασποράς του συστήματος.
γ) Στο όριο του συνεχούς, δηλαδή για α πολύ μικρό να βρεθεί η διαφορική εξίσωση κίνησης.

Λύση



α) Έστω τα τρία διαδοχικά σφαιρίδια n-1, n και n+1, τα οποία στην κατάσταση ισορροπίας βρίσκονται στις θέσεις x=(n-1)α, x = nα και x = (n+1)α αντίστοιχα.
Σε μια τυχαία φάση του συστήματος οι διαμήκεις μετατοπίσεις των σφαιριδίων n-1, n και n+1 είναι y_{n-1}, y_n και y_{n+1} αντίστοιχα από τη θέση ισορροπίας τους.
Έτσι στο n-οστό σφαιρίδιο ασκείται δύναμη από το αριστερό ελατήριο ίση με $s(y_n - y_{n-1})$ και από το δεξιό ελατήριο η δύναμη $s(y_{n+1} - y_n)$, αφού το αριστερό ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $y_n - y_{n-1}$ και το δεξιό κατά $y_{n+1} - y_n$ (επειδή $y_{n-1} < y_n < y_{n+1}$).

Άρα σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton η εξίσωση κίνησης του n-οστού σφαιριδίου είναι:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_n \Rightarrow s(y_{n+1} - y_n) - s(y_n - y_{n-1}) = m\frac{d^2y_n}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y_n}{dt^2} = \frac{s}{m}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) \qquad \textbf{(1)}$$

Δηλαδή παρατηρείται ότι η διαφορική εξίσωση αυτού του συστήματος είναι πανομοιότυπη με τη διαφορική εξίσωση της χορδής με σφαιρίδια **(2-2)** με απλή αντιστοίχιση του s με το Τ/α.

β) Η γενική λύση της **(1)** παρέχει την εξίσωση της μετατόπισης του n-οστού σφαιριδίου και είναι:

$$y_n = (A\sin kn\alpha + B\cos kn\alpha)\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(2)}$$

Ομοίως είναι: $y_{n+1} = [A\sin k(n+1)\alpha + B\cos k(n+1)\alpha]\cos(\omega t + \varphi)$

και $y_{n-1} = [A\sin k(n-1)\alpha + B\cos k(n-1)\alpha]\cos(\omega t + \varphi)$

Οπότε :

$$y_{n+1} + y_{n-1} = [A\sin(kn\alpha + k\alpha) + B\cos(kn\alpha + k\alpha) + A\sin(kn\alpha - k\alpha) +$$

$$+ B\cos(kn\alpha - k\alpha)]\cos(\omega t + \varphi) = [A\sin kn\alpha\cos k\alpha + A\cos kn\alpha\sin k\alpha +$$

$$+ B\cos kn\alpha\cos k\alpha - B\sin kn\alpha\sin k\alpha + A\sin kn\alpha\cos k\alpha - A\cos kn\alpha\sin k\alpha +$$

$$+ B\cos kn\alpha\cos k\alpha + B\sin kn\alpha\sin k\alpha]\cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= (2A\sin kn\alpha\cos k\alpha + 2B\cos kn\alpha\cos k\alpha)\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{n+1} + y_{n-1} = 2(A\sin kn\alpha + B\cos kn\alpha)\cos k\alpha\ \cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα αντικαθιστώντας τις **(2)** και **(3)** στην **(1)** προκύπτει:

$$-\omega^2(A\sin kn\alpha + B\cos kn\alpha)\cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= \frac{s}{m}2(A\sin kn\alpha + B\cos kn\alpha)(\cos k\alpha - 1)\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\omega^2 = \frac{2s}{m}(\cos k\alpha - 1) \Rightarrow \omega^2 = \frac{2s}{m}(1-\cos k\alpha) \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{4s}{m}\sin^2\frac{k\alpha}{2}} \qquad \textbf{(4)}$$

Δηλαδή παρατηρείται και πάλι ότι η σχέση διασποράς **(4)** είναι πανομοιότυπη με αυτήν της χορδής με σφαιρίδια **(2-18)**, όπου πάλι το s αντιστοιχεί με το T/α.

γ) Στο όριο του συνεχούς, δηλαδή για αποστάσεις α πολύ μικρές, οι διαμήκεις μετατοπίσεις των σφαιριδίων από τη θέση ισορροπίας μπορούν να γραφούν ως:

$$y_n(t) = y(n\alpha, t) = y(x,t)$$

$$y_{n-1}(t) = y(n\alpha-\alpha, t) = y(x-\alpha, t) = y(x,t) - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\alpha^2 \qquad \textbf{(5)}$$

$$y_{n+1}(t) = y(n\alpha+\alpha, t) = y(x+\alpha, t) = y(x,t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\alpha^2$$

όπου οι συναρτήσεις $y(x-\alpha,t)$ και $y(x+\alpha,t)$ αναπτύχθηκαν σε σειρές Taylor γύρω από το σημείο x=nα για σταθερό t και κρατήθηκαν όροι μέχρι δεύτερης τάξεως ως προς α.
Συνεπώς αντικαθιστώντας τις σχέσεις **(5)** στην **(1)** προκύπτει:

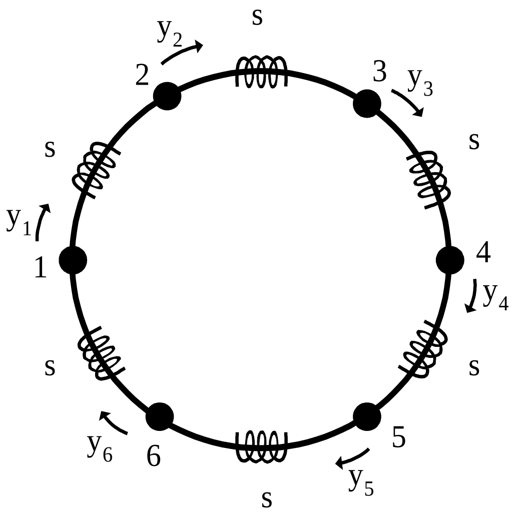
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{s\alpha^2}{m}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \qquad \textbf{(6)}$$

Η διαφορική εξίσωση **(6)** αποτελεί την κυματική εξίσωση του συστήματος, όπου $\upsilon = \sqrt{s\alpha^2/m}$ είναι η ταχύτητα διάδοσης της κίνησης κατά μήκος της διάταξης αυτής.

ΘΕΜΑ 4

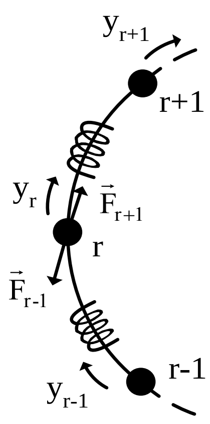
Το μόριο του βενζολίου μπορεί να προσεγγιστεί με έξι ίσες σημειακές μάζες m, που μπορούν να ολισθαίνουν, χωρίς τριβή, στην περιφέρεια οριζοντίου δακτυλίου. Οι μάζες συνδέονται με ίδια ελατήρια σταθεράς s. Όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση ισορροπίας, οι μάζες είναι διατεταγμένες στις κορυφές κανονικού εξαγώνου. Θεωρείστε ότι το σύστημα διαταράσσεται λίγο από την κατάσταση ισορροπίας.
α) Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης για κάθε μία από τις έξι μάζες.
β) Να βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης του συστήματος.

Λύση



Σχήμα 1

Για την μελέτη της κίνησης των 6 σημειακών μαζών επιλέγονται οι συντεταγμένες $y_r\ (r=1,2,...,6)$ που περιγράφουν τις απομακρύνσεις κάθε μάζας από τη θέση ισορροπίας. Οι απομακρύνσεις αυτές θεωρούνται μικρές (προσέγγιση μικρών γωνιών) και παριστάνονται στο **Σχήμα 1**.



Σχήμα 2

Στο **Σχήμα 2** φαίνεται η μάζα r που γειτονεύει με τις r-1 και r+1 μάζες. Στη συνέχεια θα εξαχθεί η διαφορική εξίσωση κίνησης της r-οστής μάζας.
Επειδή τα ελατήρια θεωρούνται επιμηκυνμένα, οι δυνάμεις που ασκούνται στη μάζα r είναι $F_{r+1}=s(y_{r+1}-y_r)$ και
$F_{r-1}=s(y_r-y_{r-1})$ και φαίνονται στο σχήμα.
Επομένως σύμφωνα με τον 2^o νόμο του Newton η εξίσωση κίνησης της r-οστής μάζας είναι:

$$\Sigma\vec{F}_r=m\vec{\alpha}_r \Rightarrow F_{r+1}-F_{r-1}=m\ddot{y}_r \Rightarrow$$
$$s(y_{r+1}-y_r)-s(y_r-y_{r-1})=m\ddot{y}_r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_r = \frac{s}{m}(y_{r+1} - 2y_r + y_{r-1}) \qquad r=1,2,\dots,6 \qquad \textbf{(1)}$$

Η σχέση **(1)** παρέχει τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση των έξι μαζών όπου λόγω περιοδικότητας της δομής είναι $y_{r+6} = y_r$ οπότε για r=1 είναι :

$$y_7 = y_1 \qquad \textbf{(2)}$$

και για r=0 είναι : $y_o = y_6$ **(3)**

Άρα οι εξισώσεις κίνησης για κάθε μάζα προκύπτουν από την **(1)** βάζοντας τιμές στο r.

Για r=1: $\ddot{y}_1 = \frac{s}{m}(y_2 - 2y_1 + y_o) \overset{(3)}{\Rightarrow} \ddot{y}_1 = \frac{s}{m}(y_2 - 2y_1 + y_6)$

Για r=2: $\ddot{y}_2 = \frac{s}{m}(y_3 - 2y_2 + y_1)$

Για r=3: $\ddot{y}_3 = \frac{s}{m}(y_4 - 2y_3 + y_2)$

Για r=4: $\ddot{y}_4 = \frac{s}{m}(y_5 - 2y_4 + y_3)$

Για r=5: $\ddot{y}_5 = \frac{s}{m}(y_6 - 2y_5 + y_4)$

Για r=6: $\ddot{y}_6 = \frac{s}{m}(y_7 - 2y_6 + y_5) \overset{(2)}{\Rightarrow} \ddot{y}_6 = \frac{s}{m}(y_1 - 2y_6 + y_5)$

β) Για την εύρεση των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης θεωρούνται λύσεις της μορφής:

$$y_r = C\cos r\theta \cos \omega t \qquad \textbf{(4)}$$

που υπακούουν τη συνθήκη λόγω περιοδικότητας της δομής :

$$y_r = y_{r+6} \qquad \textbf{(5)}$$

Αντικαθιστώντας την **(4)** στην **(1)** και απαιτώντας να ισχύει για κάθε t προκύπτει:

$$-\omega^2 C\cos r\theta = \frac{s}{m}[C\cos(r+1)\theta - 2C\cos r\theta + C\cos(r-1)\theta] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{m\omega^2}{s}\cos r\theta = \cos(r+1)\theta - 2\cos r\theta + \cos(r-1)\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2-\frac{m\omega^2}{s}\right)\cos r\theta = \cos(r+1)\theta + \cos(r-1)\theta \qquad \textbf{(6)}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα :

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

προκύπτει ότι:

$\cos(r+1)\theta + \cos(r-1)\theta = 2\cos r\theta\cos\theta$ οπότε η **(6)** γίνεται:

$$\left(2-\frac{m\omega^2}{s}\right)\cos r\theta = 2\cos r\theta\cdot\cos\theta \Rightarrow 2-\frac{m\omega^2}{s} = 2\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2s}{m}(1-\cos\theta) \qquad \textbf{(7)}$$

όπου το $\cos r\theta \neq 0$ για να μην προκύπτουν μηδενικά πλάτη και γι' αυτό απλοποιήθηκε. Επίσης από τη συνθήκη περιοδικότητας **(5)** και λόγω της **(4)** προκύπτει:

$$y_r = y_{r+6} \overset{(4)}{\Rightarrow} C\cos r\theta\cos\omega t = C\cos(r+6)\theta\cos\omega t \Rightarrow \cos r\theta = \cos(r+6)\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r+6)\theta = 2n\pi + r\theta \Rightarrow (r+6-r)\theta = 2n\pi \Rightarrow 6\theta = 2n\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{3}, \quad n = 0,1,2,3,4,5 \qquad \textbf{(8)}$$

Σημειώνεται ότι το n=0,1,…,r-1 γιατί πάνω από την τιμή r-1 δηλαδή την r προκύπτουν επαναλαμβανόμενες λύσεις.

Άρα η **(7)** λόγω της **(8)** δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ως:

$$\omega^2 = \frac{2s}{m}\left(1-\cos\frac{n\pi}{3}\right) \qquad n=0,1,2,3,4,5 \qquad \textbf{(9)}$$

Συνεπώς:

Για **n=0**: $\omega_1^2 = \frac{2s}{m}(1-\cos 0) = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_1^2 = 0}$

Για **n=1**: $\omega_2^2 = \frac{2s}{m}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2s}{m}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{2s}{m}\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_2^2 = \frac{s}{m}}$

Για **n=2**: $\omega_3^2 = \frac{2s}{m}\left(1-\cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2s}{m}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{2s}{m}\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_3^2 = \frac{3s}{m}}$

Για **n=3**: $\omega_4^2 = \frac{2s}{m}(1-\cos\pi) = \frac{2s}{m}(1+1) = \frac{2s}{m}2 \Rightarrow \boxed{\omega_4^2 = \frac{4s}{m}}$

Για **n=4**: $\omega_5^2 = \frac{2s}{m}\left(1-\cos\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{2s}{m}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{2s}{m}\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_5^2 = \frac{3s}{m}}$

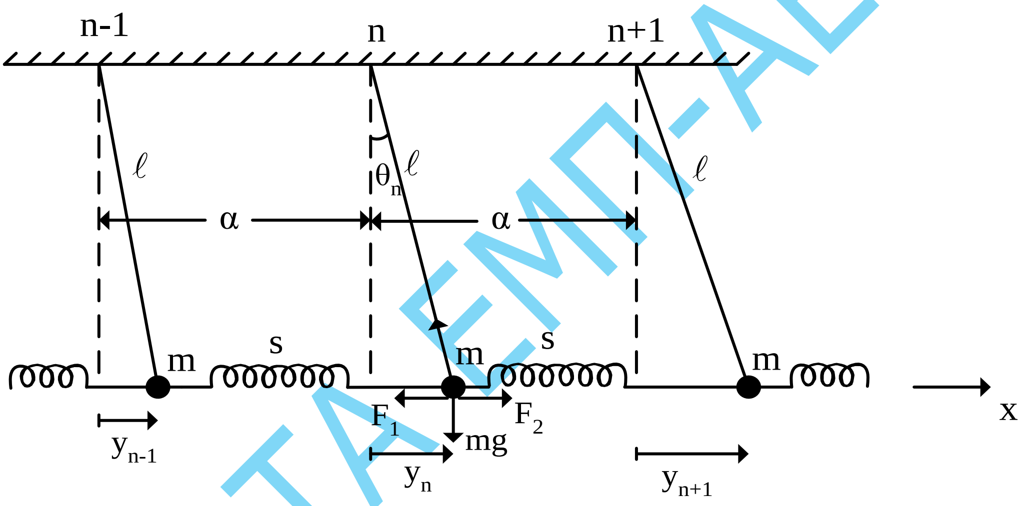
Για **n=5**: $\omega_6^2 = \frac{2s}{m}\left(1-\cos\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{2s}{m}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{2s}{m}\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_6^2 = \frac{s}{m}}$

Παρατηρείται ότι οι τρόποι ταλάντωσης 2 και 6 και οι 3 και 5 έχουν ίσες συχνότητες αντίστοιχα και επομένως δεν μπορούν να διακριθούν. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **εκφυλισμός**.

ΘΕΜΑ 5

Θεωρείστε ένα σύστημα συζευγμένων εκκρεμών σε διαδοχικές ίσες αποστάσεις α μεταξύ τους και με ίσα νήματα μήκους ℓ το καθένα. Οι μάζες των εκκρεμών είναι m η κάθε μία και συνδέονται με ελατήρια σταθεράς s, ενώ οι δύο ακραίες μάζες των εκκρεμών είναι ελεύθερες (δηλαδή δε συνδέονται μέσω ελατηρίων με τα τοιχώματα). Οι μάζες m εκτελούν μικρές ταλαντώσεις ώστε οι κινήσεις τους να θεωρούνται διαμήκεις.
α) Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση κίνησης του n-οστού εκκρεμούς.
β) Να βρεθεί η εξίσωση μετατόπισης κάθε εκκρεμούς και η σχέση διασποράς του συστήματος.
γ) Στο όριο του συνεχούς, δηλαδή για α πολύ μικρό να βρεθούν η διαφορική εξίσωση κίνησης και η σχέση διασποράς.

Λύση



α) Έστω τα τρία διαδοχικά εκκρεμή n-1, n και n+1, τα οποία στην κατάσταση ισορροπίας βρίσκονται στις θέσεις x=(n-1)α, x=nα και x=(n+1)α αντίστοιχα.
Σε μια τυχαία θέση του συστήματος οι διαμήκεις μετατοπίσεις των εκκρεμών n-1, n και n+1 είναι y_{n-1}, y_n και y_{n+1} αντίστοιχα από τη θέση ισορροπίας τους.
Έτσι στο n-οστό εκκρεμές ασκείται το βάρος του mg, η τάση του νήματος T και οι δυνάμεις των ελατηρίων $F_1 = s(y_n - y_{n-1})$ από το αριστερό και $F_2 = s(y_{n+1} - y_n)$ από το δεξιό ελατήριο αντίστοιχα, όπως φαίνονται στο σχήμα.
Θεωρώντας μικρές ταλαντώσεις, ώστε οι κινήσεις να θεωρούνται οριζόντιες κατά την κατακόρυφη διεύθυνση λόγω ισορροπίας ισχύει:

$$T\cos\theta_n - mg = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta_n} \quad \textbf{(1)}$$

Ενώ ο 2ος νόμος του Newton στη διεύθυνση x δίνει την εξίσωση κίνησης του n-οστού εκκρεμούς:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_n \Rightarrow -T\sin\theta_n - F_1 + F_2 = m\ddot{y}_n \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} - mg\tan\theta_n - s(y_n - y_{n-1}) + s(y_{n+1} - y_n) = m\ddot{y}_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_n = -g\tan\theta_n + \frac{s}{m}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά από το σχήμα εύκολα φαίνεται ότι: $\tan\theta_n = y_n/\ell$ οπότε η εξίσωση κίνησης **(2)** γίνεται:

$$\ddot{y}_n = -\frac{g}{\ell}y_n + \frac{s}{m}(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) \qquad \textbf{(3)}$$

β) Η γενική λύση της **(3)** που παρέχει την εξίσωση της μετατόπισης του n-οστού εκκρεμούς είναι:

$$y_n = (A\sin kn\alpha + B\cos kn\alpha)\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(4)}$$

Εφαρμόζοντας την οριακή συνθήκη για τα ελεύθερα άκρα του συστήματος προκύπτει:

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=n\alpha=0} = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} (Ak\cos kn\alpha - Bk\sin kn\alpha)\cos(\omega t + \varphi)\Big|_{n=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ak\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow A = 0$$

Άρα η εξίσωση **(4)** γίνεται :

$$y_n = B\cos kn\alpha\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(5)}$$

Αντικαθιστώντας την **(5)** στην **(3)** προκύπτει η εξίσωση διασποράς ως:

$$-\omega^2 y_n = -\frac{g}{\ell}y_n + \frac{s}{m}[B\cos(kn\alpha + n\alpha)\cos(\omega t + \varphi) -$$

$$-2y_n + B\cos(kn\alpha - n\alpha)\cos(\omega t + \varphi)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\omega^2 y_n = -\frac{g}{\ell} y_n + \frac{s}{m}(2y_n \cos k\alpha - 2y_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\omega^2 = -\frac{g}{\ell} - \frac{2s}{m}(1 - \cos k\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2s}{m}(1 - \cos k\alpha) \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{4s}{m}\sin^2\frac{k\alpha}{2}} \quad \textbf{(6)}$$

γ) Στο όριο του συνεχούς, δηλαδή για αποστάσεις α πολύ μικρές, οι διαμήκεις μετατοπίσεις των εκκρεμών από τη θέση ισορροπίας μπορούν να γραφούν ως:

$$y_n(t) = y(n\alpha, t) = y(x,t)$$

$$y_{n-1}(t) = y(n\alpha - \alpha, t) = y(x-\alpha, t) = y(x,t) - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\alpha^2 \quad \textbf{(7)}$$

$$y_{n+1}(t) = y(n\alpha + \alpha, t) = y(x+\alpha, t) = y(x,t) + \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\alpha + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\alpha^2$$

όπου οι συναρτήσεις y(x-α,t) και y(x+α,t) αναπτύχθηκαν σε σειρές Taylor γύρω από το σημείο x=nα για σταθερό t και κρατήθηκαν όροι μέχρι δεύτερης τάξης ως προς α.
Συνεπώς αντικαθιστώντας τις σχέσεις **(7)** στην **(3)** προκύπτει:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{s\alpha^2}{m}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{g}{\ell}y(x,t)} \quad \textbf{(8)}$$

Η εξίσωση **(8)** λέγεται **εξίσωση Klein-Gordon**.

Επίσης επειδή το α είναι μικρό θα είναι και το kα/2 μικρό, οπότε θα ισχύει η προσέγγιση $\sin(k\alpha/2) \cong k\alpha/2$ και επομένως η σχέση διασποράς **(6)** στο όριο του συνεχούς γίνεται:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{sk^2\alpha^2}{m} \quad \textbf{(9)}$$

ΘΕΜΑ 6

Μια γραμμική διάταξη συζευγμένων εκκρεμών έχει το ένα άκρο ελεύθερο στο z=0, ενώ το άλλο άκρο της διάταξης στο z=Nα=L είναι ακίνητο. Θεωρείστε ότι η σταθερά των ελατηρίων σύζευξης είναι s και ότι τα ελατήρια που συνδέουν τις μάζες των εκκρεμών έχουν το φυσικό τους μήκος στην κατάσταση ισορροπίας του συστήματος.

α) Γράψτε την εξίσωση κίνησης του n-οστού εκκρεμούς.

β) Θεωρείστε στο όριο του συνεχούς ότι $y_n(t)=y(z,t)$ και $y_{n\pm1}(t)=y(z\pm\alpha,t)$ και αναπτύξτε το $y(z\pm\alpha,t)$ σε σειρά Taylor περί το z, όπου α η απόσταση μεταξύ των διαδοχικών εκκρεμών. Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή της κυματικής εξίσωσης του Klein-Gordon:

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2}=\frac{s\alpha^2}{m}\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2}-\omega_o^2 y(z,t) \quad \text{όπου} \quad \omega_o^2=g/\ell$$

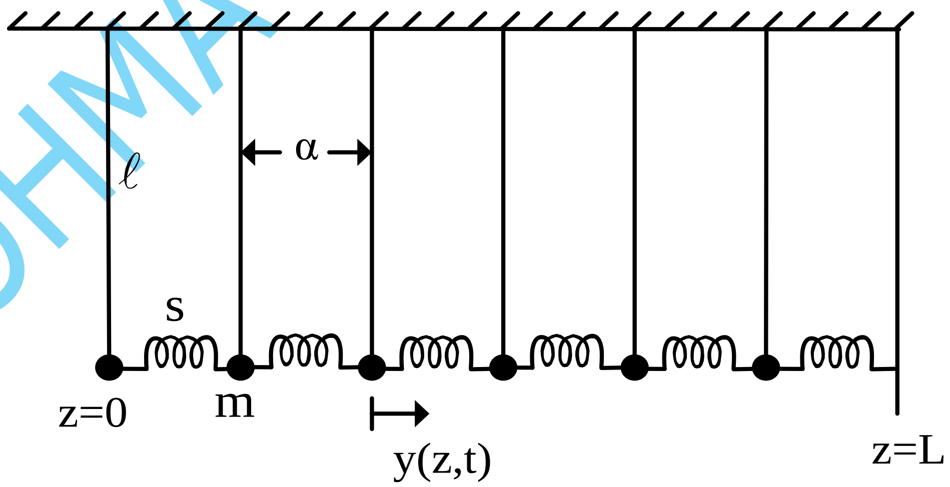
γ) Αναζητείστε λύσεις της μορφής κανονικών τρόπων ταλάντωσης $y(z,t)=A(z)\cos(\omega t+\varphi)$ και βρείτε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί το πλάτος A(z). Μελετήστε τις περιπτώσεις $\omega>\omega_o$, $\omega=\omega_o$ και $\omega<\omega_o$.

δ) Αν η διάταξη διεγείρεται στο ελεύθερο άκρο z=0 με μια αρμονική δύναμη συχνότητας ω παράλληλη προς τη διάταξη και αν $\omega<\omega_o$ να δείξετε ότι η εξάρτηση του πλάτους από το z είναι της μορφής:

$$A(z)=\frac{A_o}{1-e^{-2kL}}(e^{-kz}-e^{-2kL}\cdot e^{kz}), \quad \text{όπου } A_o \text{ σταθερά}$$

Σχολιάστε την εξάρτηση του πλάτους A(z) για την οριακή περίπτωση $L\to\infty$.

Λύση



α,β) Η απόδειξη των δύο αυτών ερωτημάτων γίνεται ακριβώς ίδια όπως αναλύεται στα ερωτήματα **α)** και **γ)** του **Θέματος** 5.

γ) Υποθέτοντας ότι ένας μοναδικός τρόπος ταλάντωσης έχει διεγερθεί τότε όλα τα σημεία του συστήματος ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και φάση, οπότε η λύση της κυματικής εξίσωσης Klein-Gordon του συστήματος έχει τη μορφή:

$$y(z,t) = A(z)\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(1)}$$

Αντικατάσταση της σχέσης **(1)** στην κυματική εξίσωση Klein-Gordon δίνει τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί το πλάτος A(z).

$$-\omega^2 A(z)\cos(\omega t+\varphi) = \frac{s\alpha^2}{m}\frac{d^2A(z)}{dz^2}\cos(\omega t+\varphi) - \frac{g}{\ell}A(z)\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2A(z)}{dz^2} + \frac{m}{s\alpha^2}\left(\omega^2 - \frac{g}{\ell}\right)A(z) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης **(2)** διακρίνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις:

1) Αν $\omega^2 > g/\ell \Rightarrow \omega > \omega_o$ τότε είναι: $\frac{m}{s\alpha^2}\left(\omega^2 - \frac{g}{\ell}\right) = k^2 > 0$ από την οποία προκύπτει η σχέση διασποράς :

$$\omega^2 = \frac{s\alpha^2}{m}k^2 + \frac{g}{\ell} \qquad \textbf{(3)}$$

και η λύση της διαφορικής εξίσωσης **(2)** είναι:

$$A(z) = C\sin kz + D\cos kz \qquad \textbf{(4)}$$

όπου οι σταθερές C, D προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες.

Άρα η μετατόπιση y(z,t) λόγω των **(1)** και **(4)** γίνεται:

$$y(z,t) = (C\sin kz + D\cos kz)\cos(\omega t+\varphi) \qquad \textbf{(5)}$$

Αλλά επειδή το άκρο z=0 είναι ελεύθερο θα ισχύει:

$$\left.\frac{\partial y(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} \left.(Ck\cos kz - Dk\sin kz)\cos(\omega t+\varphi)\right|_{z=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ck\cos(\omega t+\varphi) = 0 \Rightarrow C = 0$$

Επομένως η σχέση **(5)** γίνεται:

$$y(z,t) = D\cos kz\cos(\omega t+\varphi) \qquad \textbf{(6)}$$

Επίσης επειδή το άκρο z=L είναι σταθερό ισχύει:

$$y(L,t) = 0 \overset{(6)}{\Rightarrow} D\cos kL\cos(\omega t+\varphi) = 0 \Rightarrow \cos kL = 0 \Rightarrow kL = \left(r+\frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_r = \left(r+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{L}, \qquad r = 0,1,2,... \qquad \textbf{(7)}$$

Συνεπώς η σχέση διασποράς **(3)** λόγω της **(7)** δίνει τις δυνατές τιμές της συχνότητας.

$$\omega_r^2 = \frac{s\alpha^2}{m}\frac{\pi^2}{L^2}\left(r+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{g}{\ell}, \qquad r = 0,1,2,... \qquad \textbf{(8)}$$

2) Αν $\omega^2 = g/\ell \Rightarrow \omega = \omega_o$ τότε η σχέση **(2)** γίνεται:

$$\frac{d^2A(z)}{dz^2} = 0 \Rightarrow \frac{dA(z)}{dz} = C \Rightarrow \int dA(z) = C\int dz \Rightarrow A(z) = Cz + D \qquad \textbf{(9)}$$

Οπότε η σχέση **(1)** παίρνει τη μορφή:

$$y(z,t) = (Cz+D)\cos(\omega t+\varphi) \qquad \textbf{(10)}$$

Από τις οριακές συνθήκες όμως για το ελεύθερο άκρο z=0 είναι:

$$\left.\frac{\partial y(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \Rightarrow C\cos(\omega t+\varphi) = 0 \Rightarrow C = 0$$

Οπότε:

$$y(z,t) = D\cos(\omega t+\varphi) \qquad \textbf{(11)}$$

Ενώ για το ακλόνητο άκρο z=L είναι:

$$y(L,t)=0\overset{(11)}{\Rightarrow}D\cos(\omega t+\varphi)=0\Rightarrow D=0$$

Δηλαδή στην περίπτωση αυτή είναι y(z,t)=0 και το σύστημα δεν ταλαντώνεται.

3) Αν $\omega^2<g/\ell\Rightarrow\omega<\omega_o$ τότε είναι:

$$\frac{m}{s\alpha^2}\left(\omega^2-\frac{g}{\ell}\right)=-\frac{m}{s\alpha^2}\left(\frac{g}{\ell}-\omega^2\right)=-k^2<0$$

και η λύση της διαφορικής εξίσωσης **(2)** είναι:

$$A(z)=Ce^{-kz}+De^{kz} \qquad \textbf{(12)}$$

Άρα η μετατόπιση y(z,t) λόγω των **(1)** και **(12)** είναι:

$$y(z,t)=(Ce^{-kz}+De^{kz})\cos(\omega t+\varphi) \qquad \textbf{(13)}$$

Στο ελεύθερο άκρο z=0 η οριακή συνθήκη δίνει:

$$\left.\frac{\partial y(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=0\overset{(13)}{\Rightarrow}(-kCe^{-kz}+kDe^{kz})\cos(\omega t+\varphi)\Big|_{z=0}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -kCe^{0}+kDe^{0}=0\Rightarrow C=D \qquad \textbf{(14)}$$

ενώ η οριακή συνθήκη στο ακλόνητο z=L δίνει:

$$y(L,t)=0\overset{(13)}{\Rightarrow}(Ce^{-kL}+De^{kL})\cos(\omega t+\varphi)=0\overset{(14)}{\Rightarrow}Ce^{-kL}+Ce^{kL}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C=D=0$$

Οπότε: y(z,t)=0, δηλαδή το σύστημα δεν ταλαντώνεται.
Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι το σύστημα ταλαντώνεται μόνο όταν $\omega^2>g/\ell$ ή $\omega>\omega_o$ και γι' αυτό η συχνότητα $\omega_o=\sqrt{g/\ell}$ λέγεται **συχνότητα αποκοπής**.

δ) Επειδή $\omega < \omega_o$ σύμφωνα με τα προηγούμενα θα ισχύει η σχέση **(13)**:

$$y(z,t) = (Ce^{-kz} + De^{kz})\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(15)}$$

Λόγω όμως της διέγερσης του συστήματος στο ελεύθερο άκρο του z=0 από αρμονική δύναμη συχνότητας ω η μετατόπιση στο σημείο αυτό θα είναι:

$$y_{(0,t)} = A_o \cos(\omega t + \varphi) \overset{(15)}{\Rightarrow} (Ce^{0} + De^{0})\cos(\omega t + \varphi) = A_o \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C + D = A_o \qquad \textbf{(16)}$$

όπου A_o είναι το πλάτος που προσδίδει η εξωτερική δύναμη.
Από την οριακή συνθήκη στο ακλόνητο άκρο z=L προκύπτει:

$$y(L,t) = 0 \overset{(15)}{\Rightarrow} (Ce^{-kL} + De^{kL})\cos(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ce^{-kL} + De^{kL} = 0 \qquad \textbf{(17)}$$

Συνεπώς λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων **(16)** και **(17)** προκύπτει:

$$C = A_o \frac{e^{2kL}}{e^{2kL} - 1} = \frac{A_o}{1 - e^{-2kL}} \quad \text{και} \quad D = \frac{-A_o}{e^{2kL} - 1} = \frac{-A_o e^{-2kL}}{1 - e^{-2kL}} \qquad \textbf{(18)}$$

Άρα το πλάτος A(z) είναι:

$$A(z) = Ce^{-kz} + De^{kz} \overset{(18)}{=} \frac{A_o \cdot e^{-kz}}{1 - e^{-2kL}} - \frac{A_o e^{-2kL} e^{kz}}{1 - e^{-2kL}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(z) = \frac{A_o}{1 - e^{-2kL}}(e^{-kz} - e^{-2kL} \cdot e^{kz})$$

Για $L \to \infty$ οι σχέσεις **(18)** δίνουν $C \to A_o$ και $D \to 0$ οπότε η σχέση **(15)** γίνεται:

$$y(z,t) = A_o e^{-kz} \cos(\omega t + \varphi)$$

Δηλαδή προκύπτει ταλάντωση με πλάτος $A(z) = A_o e^{-kz}$, που εξαρτάται από τη θέση z και φθίνει καθώς αυξάνει το z.

ΘΕΜΑ 7

Σύστημα συζευγμένων εκκρεμών αποτελείται από δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα (από z=0 μέχρι z=L) αποτελείται από εκκρεμή μήκους ℓ_1, ενώ η δεύτερη (από z=L μέχρι $z \to \infty$) αποτελείται από εκκρεμή μήκους ℓ_2. Κάθε εκκρεμές απέχει από τα γειτονικά του απόσταση α και συνδέεται με αυτά με ελατήρια σταθεράς s. Θεωρείστε γνωστό ότι στο όριο του συνεχούς η ταλάντωση y(z,t) περιγράφεται από την εξίσωση Klein-Gordon. Το πρώτο εκκρεμές της διάταξης (z=0) διεγείρεται σε ταλάντωση της μορφής $y_1(t) = y(z=0,t) = A_o \cos\omega t$, με συχνότητα ω, όπου $\omega_1^2 = g/\ell_1 < \omega^2 < \omega_2^2 = g/\ell_2$.

α) Γράψτε τις λύσεις y_I και y_{II} της εξίσωσης για τις δύο περιοχές I (0<z<L) και II $(L < z < +\infty)$.

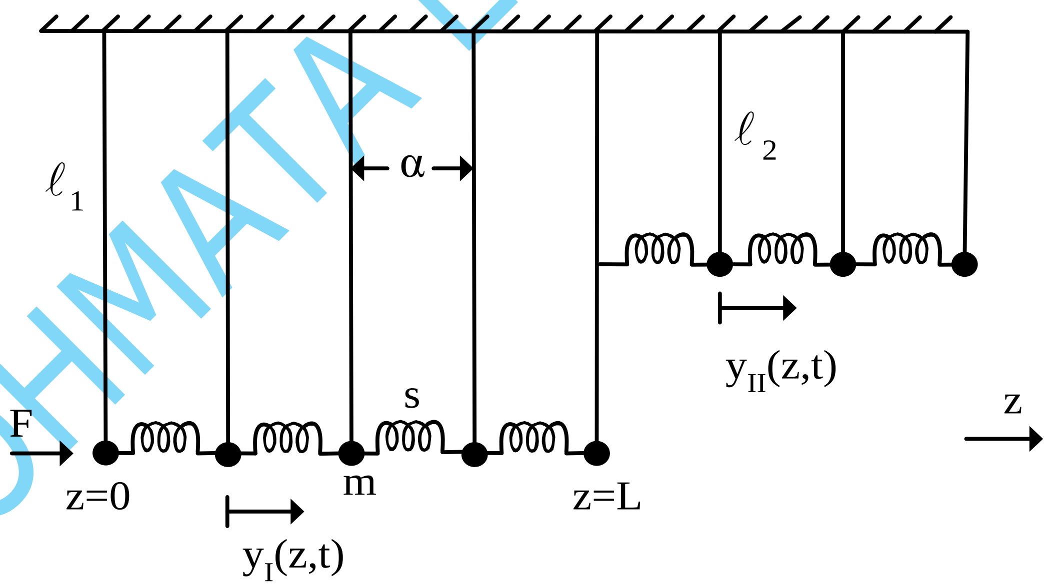
β) Εφαρμόστε στην y_I την οριακή συνθήκη στο z=0.

γ) Βρείτε την πλήρη λύση για κάθε z εφαρμόζοντας τις συνθήκες συνέχειας της απομάκρυνσης y και της παραγώγου dy/dz στο σημείο αλλαγής του "ελαστικού μέσου" z=L.

δ) Υποδείξτε (αριθμητικό ή γραφικό) τρόπο υπολογισμού των συχνοτήτων συντονισμού (ιδιοσυχνοτήτων) του συστήματος.

ε) Συζητήστε αναλογίες με άλλα κλασικά (π.χ. αέρας – ιονόσφαιρα) ή κβαντικά (π.χ. βήμα δυναμικού) συστήματα, καθώς και με συστήματα του τύπου I-II-I (π.χ. αέρας – πλάσμα – αέρας ή πηγάδι δυναμικού στην κβαντομηχανική).

Λύση



α) Καταρχήν από την ανίσωση των συχνοτήτων προκύπτει: $\omega_1^2 < \omega_2^2 \Rightarrow g/\ell_1 < g/\ell_2 \Rightarrow \ell_1 > \ell_2$, δηλαδή τα εκκρεμή της ομάδας II είναι μικρότερα σε μήκος από αυτά της ομάδας I, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

Στο όριο του συνεχούς η ταλάντωση y(z,t) ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon:

$$\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial t^2} = \frac{s\alpha^2}{m}\frac{\partial^2 y(z,t)}{\partial z^2} - \omega_o^2 y(z,t) \qquad \textbf{(1)}$$

Αναζητώντας λύσεις της μορφής κανονικών τρόπων ταλάντωσης:

$$y(z,t) = A(z)\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(2)}$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση **(1)** προκύπτει η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί το πλάτος A(z).

$$-\omega^2 A(z)\cos(\omega t+\varphi) = \frac{s\alpha^2}{m}\frac{d^2A(z)}{dz^2}\cos(\omega t+\varphi) - \omega_o^2 A(z)\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2A(z)}{dz^2} + \frac{m}{s\alpha^2}(\omega^2 - \omega_o^2)A(z) = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Η εξίσωση **(3)** δίνει τη μορφή του πλάτους A(z) στις περιοχές I και II.

Έτσι στην περιοχή I για 0<z<L είναι $\omega_o^2 = g/\ell_1$ και από την ανισότητα του προβλήματος είναι: $\omega^2 > \omega_o^2 \Rightarrow \omega^2 - \omega_o^2 > 0$

Άρα θέτοντας $k_I^2 = \frac{m}{s\alpha^2}(\omega^2 - \omega_o^2) > 0$ **(4)**

η **(3)** γράφεται: $\frac{d^2A_I(z)}{dz^2} + k_I^2 A_I(z) = 0$

και η γενική της λύση (αφού $k_I^2 > 0$) είναι:

$$A_I(z) = C\sin k_I z + D\cos k_I z \qquad \textbf{(5)}$$

Ενώ στην περιοχή II για $L < z < +\infty$ είναι $\omega_o^2 = g/\ell_2$ και από την ανισότητα του προβλήματος είναι: $\omega^2 < \omega_o^2 \Rightarrow \omega^2 - \omega_o^2 < 0 \Rightarrow -(\omega_o^2 - \omega^2) > 0$

Οπότε θέτοντας $k_{II}^2 = \frac{m}{s\alpha^2}(\omega_o^2 - \omega^2)$ **(6)**

η **(3)** γράφεται:

$$\frac{d^2A_{II}(z)}{dz^2}-\frac{m}{s\alpha^2}(\omega_o^2-\omega^2)A_{II}(z)=0 \Rightarrow \frac{d^2A_{II}(z)}{dz^2}-k_{II}^2A_{II}(z)=0$$

και η γενική της λύση είναι:

$$A_{II}(z)=Ee^{-k_{II}z}+Fe^{k_{II}z} \qquad \textbf{(7)}$$

Οι εξισώσεις **(5)** και **(7)** αντιστοιχούν στις περιοχές τους, δηλαδή η **(5)** ισχύει για 0<z<L και η **(7)** για z>L και προκειμένου να υπάρχει ενιαίος συμβολισμός σε όλη την περιοχή ανακλιμακώνεται η μεταβλητή z σε z-L, δηλαδή στην ουσία μετατοπίζεται το σύστημα αξόνων στο σημείο z=L. Οπότε οι λύσεις των πλατών γίνονται:

$$A_I(z)=C\sin k_I(z-L)+D\cos k_I(z-L) \quad \text{και}$$

$$\text{και} \quad A_{II}(z)=Ee^{-k_{II}(z-L)}+Fe^{k_{II}(z-L)} \qquad \textbf{(8)}$$

Άρα τελικά οι λύσεις y_I και y_{II} της εξίσωσης **(1)** στις δύο περιοχές, λόγω των **(2)** και **(8)** είναι:

$$y_I(z,t)=[C\sin k_I(z-L)+D\cos k_I(z-L)]\cos(\omega t+\varphi) \qquad \textbf{(9)}$$

$$y_{II}(z,t)=[Ee^{-k_{II}(z-L)}+Fe^{k_{II}(z-L)}]\cos(\omega t+\varphi) \qquad \textbf{(10)}$$

β) Επειδή το άκρο της διάταξης στο σημείο z=0 διεγείρεται από δύναμη που το ταλαντώνει με εξίσωση απομάκρυνσης $y(t)=A_o\cos\omega t$, η οριακή συνθήκη στο σημείο αυτό είναι:

$$y_I(z=0,t)=y(t)=A_o\cos\omega t \Rightarrow y_I(0,t)=A_o\cos\omega t \overset{(9)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(9)}{\Rightarrow}[C\sin k_I(-L)+D\cos k_I(-L)]\cos(\omega t+\varphi)=A_o\cos\omega t$$

Αλλά για να ισχύει η σχέση αυτή για κάθε χρονική στιγμή t πρέπει φ=0 οπότε:

$$C\sin k_I(-L)+D\cos k_I(-L)=A_o \Rightarrow -C\sin k_IL+D\cos k_IL=A_o \qquad \textbf{(11)}$$

Η σχέση **(11)** αποτελεί την έκφραση της οριακής συνθήκης στο z=0 για την $y_I(z,t)$.

γ) Στο σημείο συνέχειας z=L ισχύουν οι οριακές συνθήκες:

$$y_I(z=L,t) = y_{II}(z=L,t) \qquad \textbf{(12)}$$

και
$$\left.\frac{dy_I}{dz}\right|_{z=L} = \left.\frac{dy_{II}}{dz}\right|_{z=L} \qquad \textbf{(13)}$$

Επειδή οι λύσεις πρέπει να είναι φραγμένες, δηλαδή όταν $z \to +\infty$ πρέπει το $y_{II}(z,t) \to 0$ ο συντελεστής F της σχέσης **(10)** πρέπει να είναι μηδέν (F=0), γιατί αν $F \neq 0$ τότε $y_{II}(z \to \infty, t) \to +\infty$ και οι λύσεις είναι μη φραγμένες.

Οπότε η **(10)** απλοποιείται στην:

$$y_{II}(z,t) = Ee^{-k_{II}(z-L)} \cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(14)}$$

Επομένως από την οριακή συνθήκη **(12)** λόγω των **(9)** και **(14)** προκύπτει:

$$y_I(z=L,t) = y_{II}(z=L,t) \Rightarrow (C\sin 0 + D\cos 0)\cos(\omega t+\varphi) = Ee^0 \cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\cdot 0 + D\cdot 1 = E\cdot 1 \Rightarrow D = E = A \qquad \textbf{(15)}$$

Ενώ από την οριακή συνθήκη **(13)** λόγω των **(9)** και **(14)** προκύπτει:

$$\left.\frac{dy_I}{dz}\right|_{z=L} = \left.\frac{dy_{II}}{dz}\right|_{z=L} \Rightarrow [Ck_I \cos k_I(z-L) - Dk_I \sin k_I(z-L)]\cos(\omega t+\varphi)\Big|_{z=L} =$$

$$= -Ek_{II}e^{-k_{II}(z-L)} \cos(\omega t+\varphi)\Big|_{z=L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Ck_I \cos 0 - Dk_I \sin 0)\cos(\omega t+\varphi) = -Ek_{II}e^0 \cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow Ck_I = -Ek_{II} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = -\frac{k_{II}}{k_I}E \overset{(15)}{\Rightarrow} C = -\frac{k_{II}}{k_I}A \qquad \textbf{(16)}$$

Άρα οι πλήρεις λύσεις για τις δύο περιοχές μετά την εφαρμογή των συνθηκών συνέχειας στο σημείο z=L, δηλαδή οι σχέσεις **(9)**, **(14)** λόγω των **(15)**, **(16)** είναι:

$$y_I(z,t) = A\left[-\frac{k_{II}}{k_I}\sin k_I(z-L) + \cos k_I(z-L)\right]\cos(\omega t+\varphi) \qquad \textbf{(17)}$$

και $$y_{II}(z,t) = Ae^{-k_{II}(z-L)}\cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(18)}$$

δ) Η σχέση **(11)** λόγω των **(15)** και **(16)** δίνει:

$$\frac{k_{II}}{k_I}A\sin k_I L + A\cos k_I L = A_o \Rightarrow A = \frac{A_o}{\dfrac{k_{II}}{k_I}\sin k_I L + \cos k_I L} \qquad \textbf{(19)}$$

Η σχέση **(19)** δίνει το πλάτος της ταλάντωσης σε σχέση με τις αρχικές συνθήκες. Παρατηρείται ότι όταν το $k_I L$ πάρει τέτοιες τιμές ώστε ο παρανομαστής της **(19)** να μηδενίζεται, τότε το πλάτος A θα γίνει άπειρο, αγνοώντας σε πρώτη προσέγγιση την απόσβεση που επιβάλλει η $y_{II}(z,t)$. Αυτές οι τιμές του $k_I L$ ορίζουν τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος, δηλαδή τότε παρατηρείται συντονισμός. Επομένως συντονισμός υπάρχει όταν:

$$\frac{k_{II}}{k_I}\sin k_I L + \cos k_I L = 0 \Rightarrow \frac{k_{II}}{k_I}\sin k_I L = -\cos k_I L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k_{II}^2}{k_I^2}\sin^2 k_I L = \cos^2 k_I L = 1 - \sin^2 k_I L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{k_{II}^2}{k_I^2}\right)\sin^2 k_I L = 1 \Rightarrow \sin^2 k_I L = \frac{k_I^2}{k_I^2 + k_{II}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin k_I L = \pm\frac{k_I}{\sqrt{k_I^2 + k_{II}^2}} \qquad \textbf{(20)}$$

Για τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων πρέπει να επιλυθεί η **(20)**.

Δηλαδή: $$k_I L = \arcsin\frac{k_I}{\sqrt{k_I^2 + k_{II}^2}} \qquad \textbf{(21)}$$

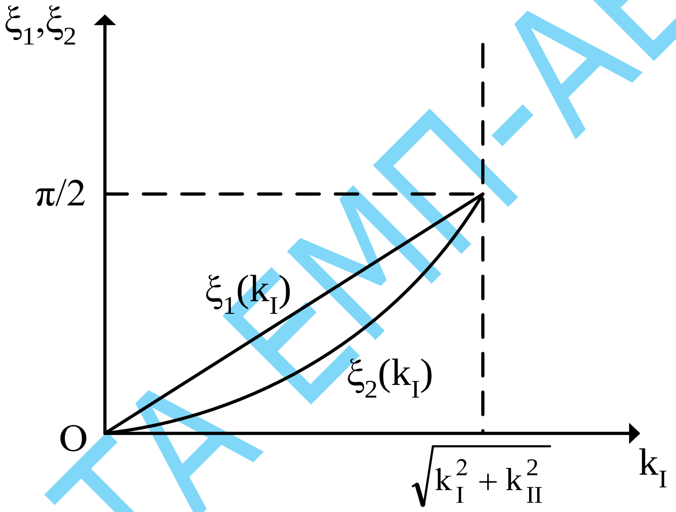
Θέτοντας $\xi_1 = k_I L$ και $\xi_2 = \arcsin\dfrac{k_I}{\sqrt{k_I^2 + k_{II}^2}}$ θα επιλυθεί γραφικά η εξίσωση $\xi_1(k_I) = \xi_2(k_I)$ και οι λύσεις του προβλήματος είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο αυτών συναρτήσεων.

Επίσης λόγω της **(20)** επειδή: $\frac{k_I}{\sqrt{k_I^2+k_{II}^2}}<1 \Rightarrow 0 \le k_I < \sqrt{k_I^2+k_{II}^2}$ δηλαδή στην περιοχή αυτή θα αναζητηθεί η γραφική λύση της **(21)**.

Για $k_I=0$ είναι $\xi_I=0$ και $\xi_2=\arcsin 0=0$

Για $k_I=\sqrt{k_I^2+k_{II}^2}$ είναι $\xi_I=L\sqrt{k_I^2+k_{II}^2}$ και $\xi_2=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$

Η γραφική επίλυση της **(21)** φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Από την παραπάνω γραφική παράσταση παρατηρείται ότι οι συναρτήσεις $\xi_1(k_I)$ και $\xi_2(k_I)$ τέμνονται στο σημείο όπου $k_I=\sqrt{k_I^2+k_{II}^2}$ δηλαδή όταν:

$$\xi_I\left(\sqrt{k_I^2+k_{II}^2}\right)=\xi_2\left(\sqrt{k_I^2+k_{II}^2}\right)\Rightarrow L\sqrt{k_I^2+k_{II}^2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sqrt{k_I^2+k_{II}^2}=\frac{\pi}{2L} \quad \textbf{(22)}$$

Άρα από τις σχέσεις **(4)** και **(6)** είναι $k_I^2=\frac{m}{s\alpha^2}\left(\omega^2-\frac{g}{\ell_1}\right)$ και $k_{II}^2=\frac{m}{s\alpha^2}\left(\frac{g}{\ell_2}-\omega^2\right)$ οπότε

αντικαθιστώντας στην **(22)** προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες ω.

ε) Ένα μέσο, στο οποίο είναι δυνατόν να διατηρηθούν ημιτονικά κύματα ονομάζεται **διασκορπιστικό μέσο**, όπως είναι η περιοχή Ι στο πρόβλημα αυτό και σημαίνει ότι η τιμή της συχνότητας των κυμάτων δεν είναι χαμηλότερη από τη συχνότητα αποκοπής, που στην περιοχή Ι είναι $\omega_{o1}^2 = g/\ell_1$ και ισχύει $\omega_{o1}^2 < \omega^2$. Αντιθέτως ένα μέσο στο οποίο δεν μπορούν να διατηρηθούν ημιτονικά κύματα, αλλά υπάρχουν εκθετικά κύματα ονομάζεται **άεργο μέσο**, όπως η περιοχή ΙΙ του προβλήματος.
Η ιονόσφαιρα της Γης (αέρας – ιονόσφαιρα) είναι παράδειγμα διασκορπιστικού μέσου για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, για συχνότητες πάνω από τη συχνότητα αποκοπής ω_p η οποία ονομάζεται **συχνότητα ταλάντωσης πλάσματος** και συγχρόνως είναι παράδειγμα άεργου μέσου για συχνότητες χαμηλότερες από την ω_p. Οι σχέσεις διασποράς για διεγερμένες ταλαντώσεις στην ιονόσφαιρα της Γης είναι όμοιες με τις αντίστοιχες σχέσεις **(4)** και **(6)** για συζευγμένα εκκρεμή και είναι:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k_I^2, \quad \text{για} \quad \omega > \omega_p \quad \text{και} \quad \omega^2 = \omega_p^2 - c^2 k_{II}^2, \quad \text{για} \quad \omega < \omega_p$$

Αν μια διασκορπιστική περιοχή περικλείεται ανάμεσα σε δύο άεργες περιοχές απείρου πάχους τότε μπορούν να δημιουργηθούν τρόποι ελεύθερων ταλαντώσεων των εκκρεμών στην διασκορπιστική περιοχή σαν τα εκκρεμή να είχαν εγκλωβιστεί μεταξύ δύο τοίχων. Αυτή η εικασία είναι σωστή και οι τρόποι ονομάζονται **δέσμιοι τρόποι ταλάντωσης** και εμφανίζονται περίπου στις συχνότητες συντονισμού του συστήματος που μελετήθηκε. Αυτή είναι και η αναλογία των κβαντικών συστημάτων με τα συζευγμένα εκκρεμή. Δηλαδή οι δέσμιες καταστάσεις των ατόμων εμφανίζονται στις συχνότητες συντονισμού.