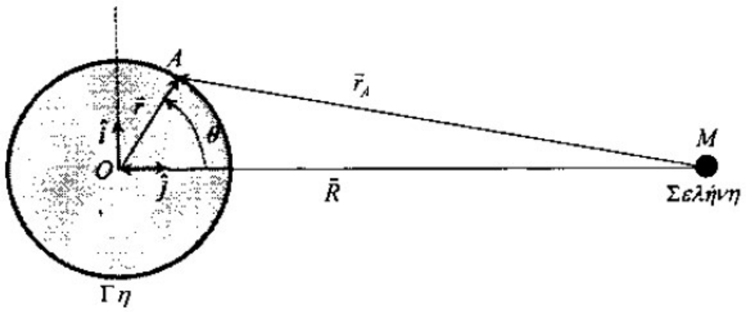
ΠΑΛΙΡΡΟΙΕΣ

Η παλιρροιακή δύναμη σε κάποιο σημείο Α της επιφάνειας της Γης υπολογίζεται από τη διανυσματική διαφορά της βαρυτικής έλξης την οποία ασκεί η Σελήνη σε μια στοιχειώδη μάζα m στο εν λόγω σημείο, και της βαρυτικής έλξης που θα ασκούσε στην ίδια μάζα εάν αυτή βρισκόταν στο κέντρο της Γης.

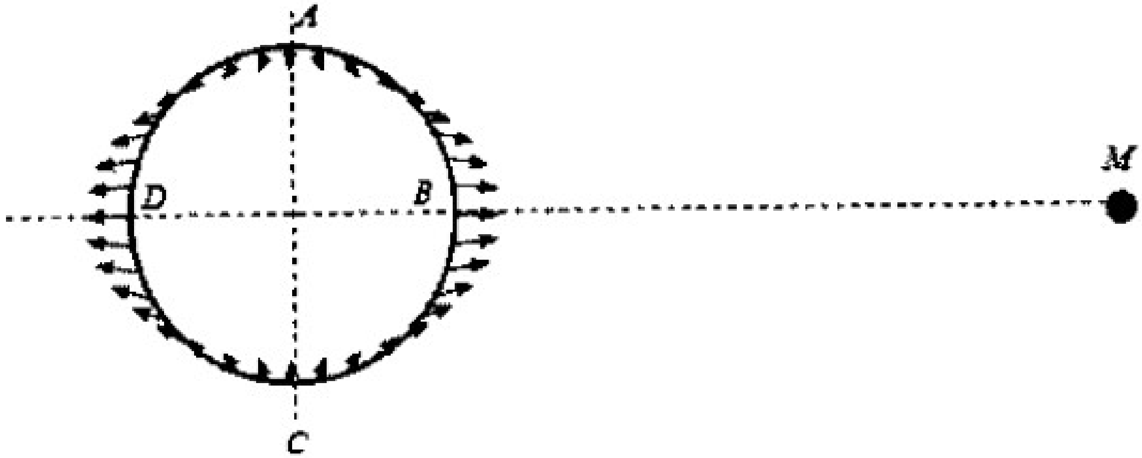
Σύντομη ερμηνεία: Δεδομένου ότι ο άξονας περιστροφής της Γης δείχνει σε σταθερή διεύθυνση σε σχέση με τους αστέρες, μπορούμε να αναφερθούμε σε ένα σύστημα αναφοράς Ο πακτωμένο στο κέντρο της Γης, που εκτελεί μεταφορική κίνηση μαζί της γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος Γη-Σελήνη αλλά δεν περιστρέφεται. Σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα στο διάστημα όλα τα σημεία του Ο κινούνται με την ίδια επιτάχυνση. Κάθε σώμα στο σύστημα αναφοράς Ο υφίσταται μια δύναμη που είναι ανεξάρτητη από τη θέση του. Για υπολογισμούς πάνω στο ίδιο το Ο η δύναμη αυτή θα πρέπει να αφαιρεθεί διανυσματικά από τη δύναμη βαρύτητας. (Για τους υπολογισμούς σας θεωρείστε τη Σελήνη σημειακή. Ο λόγος της ακτίνας της Γης προς την απόσταση του κέντρου της από τη Σελήνη είναι $\frac{r}{R} \approx 1,6\times10^{-2}$. *Όπου χρειαστεί χρησιμοποιείστε την προσέγγιση του διωνυμικού αναπτύγματος:* $(1+x)^n \approx 1+nx$ *για* $|x|<<1,\ n \equiv$ *σταθερά)*



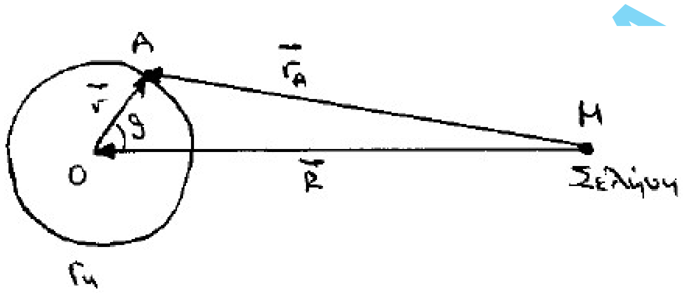
α) Δείξτε ότι η δύναμη παλίρροιας $\vec{F}_{\pi\alpha\lambda}$ την οποία νοιώθει στοιχειώδης μάζα *m* στο σημείο Α δίνεται, σε πρώτη προσέγγιση, από τη σχέση

$$\vec{F}_{\pi\alpha\lambda} \approx -G\frac{mM}{R^3}\left[\vec{r} - 3\vec{R}\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right]$$

β) Η άποψη που αποδίδει τα παλιρροιακά φαινόμενα στην απλή βαρυτική έλξη της Σελήνης μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όταν στην πλησιέστερη προς τη Σελήνη πλευρά, πάνω στην ευθεία που τη συνδέει με το κέντρο της Γης, έχουμε άμπωτη τότε στο αντιδιαμετρικό σημείο θα έχουμε πλημμυρίδα. Στην πράξη όμως παρατηρούμε και στα δύο σημεία ταυτόχρονα άμπωτη όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Εξηγείστε το φαινόμενο, υπολογίζοντας τις δυνάμεις στα σημεία A,B,C,D στο ακόλουθο σχήμα, με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος α.



ΛΥΣΗ



α) Η βαρυτική έλξη την οποία ασκεί η Σελήνη σε μια μάζα m στο σημείο A είναι:

$$\vec{F}_A = -G\frac{Mm}{r_A^2}\hat{r}_A = -G\frac{Mm}{r_A^3}\vec{r}_A \quad (1) \qquad (\text{όπου } \vec{r}_A = r_A\hat{r}_A)$$

Ενώ η βαρυτική έλξη την οποία θα ασκούσε η Σελήνη στην ίδια μάζα αν βρισκόταν στο κέντρο της Γης είναι:

$$\vec{F}_o = -G\frac{Mm}{R^2}\hat{R} = -G\frac{Mm}{R^3}\vec{R} \quad (2) \qquad (\text{όπου } \vec{R} = R\hat{R})$$

Άρα η παλιρροιακή δύναμη σύμφωνα με τις (1) και (2) είναι:

$$\vec{F}_{παλ.} = \vec{F}_A - \vec{F}_o = -G\frac{Mm}{r_A^3}\vec{r}_A - \left(-G\frac{Mm}{R^3}\vec{R}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{F}_{\pi\alpha\lambda.} = -GMm\left(\frac{\vec{r}_A}{r_A^3} - \frac{\vec{R}}{R^3}\right) \quad (3)$$

Από το σχήμα λόγω διανυσματικής άθροισης έχουμε: $\vec{r}_A = \vec{R} + \vec{r}$ (4)

και το μέτρο του $\vec{r}_A$ είναι: $|\vec{r}_A|^2 = (\vec{R}+\vec{r})^2 = |\vec{R}|^2 + |\vec{r}|^2 + 2\vec{R}\cdot\vec{r} \rightarrow$

$$\rightarrow r_A^2 = R^2 + r^2 + 2\vec{R}\cdot\vec{r} \rightarrow r_A = \left(R^2 + r^2 + 2\vec{R}\cdot\vec{r}\right)^{1/2} \quad (5)$$

Συνεπώς η (3) λόγω των (4) και (5) δίνει:

$$\vec{F}_{\pi\alpha\lambda.} = -GMm\left[\frac{\vec{R}+\vec{r}}{(R^2+r^2+2\vec{R}\cdot\vec{r})^{3/2}} - \frac{\vec{R}}{R^3}\right] =$$

$$= -G\frac{Mm}{R^3}\left[\frac{\vec{R}+\vec{r}}{\left(1 + \underbrace{\frac{r^2}{R^2}}_{\simeq 0} + \frac{2\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)^{3/2}} - \vec{R}\right] \overset{\left(\frac{r}{R} \ll 1 \rightarrow \frac{r^2}{R^2} \simeq 0\right)}{=\!=}$$

$$= -G\frac{Mm}{R^3}\left[(\vec{R}+\vec{r})\left(1 + \frac{2\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)^{-3/2} - \vec{R}\right]$$

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα επειδή $\frac{2\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2} \ll 1$:

$$\left(1 + \frac{2\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right)^{-3/2} \simeq 1 - \frac{3}{2}\,\frac{2\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2} \simeq 1 - \frac{3\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2} \quad \text{οπότε:}$$

$$\vec{F}_{\pi\alpha\lambda.} \simeq -G\frac{Mm}{R^3}\left[(\vec{R}+\vec{r})\left(1 - 3\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\right) - \vec{R}\right] \simeq$$

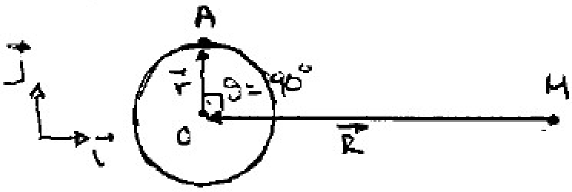
$$\simeq -G\frac{Mm}{R^3}\left[\cancel{\vec{R}} + \vec{r} - 3\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\vec{R} - 3\frac{\vec{R}\cdot\vec{r}}{R^2}\vec{r} - \cancel{\vec{R}}\right]$$

Αλλά: $\frac{\vec R\cdot\vec r}{R^2}\vec r = \frac{Rr\cos(\pi-\theta)}{R^2}r\hat r = \overbrace{\frac{r^2}{R^2}}^{\simeq 0}R\cos(\pi-\theta)\,\hat r \simeq 0$ οπότε

τελικά είναι:

$$\vec F_{παλ.} \simeq -\frac{GMm}{R^3}\left[\vec r - \frac{3\vec R\cdot\vec r}{R^2}\vec R\right] \qquad (6)$$

β/ Με τη βοήθεια της (6) υπολογίζουμε τις παλιρροιακές δυνάμεις στα σημεία A, B, C, D:

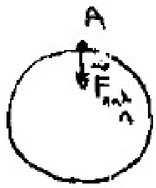


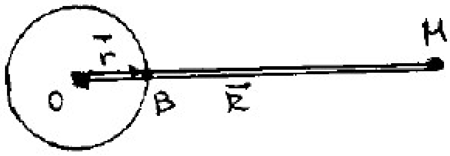
Είναι: $\vec R\cdot\vec r = 0$ γιατί $\vec r \perp \vec R$

και $\vec r = r\vec j$, $\vec R = -R\vec i$

οπότε η (6) δίνει:

$$\vec F_{παλ_A} \simeq -\frac{GMm}{R^3}\left[r\vec j - 0\right] = -\frac{GMm}{R^3}r\vec j$$





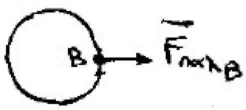
Είναι: $\vec r\cdot\vec R = -rR$ γιατί $\vec r$ αντίρροπο του $\vec R$

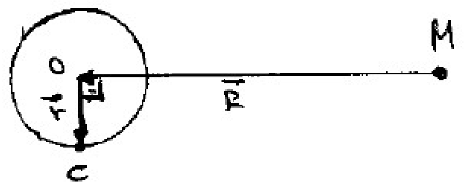
και $\vec r = r\vec i$, $\vec R = -R\vec i$

οπότε η (6) δίνει:

$$\vec F_{παλ_B} \simeq -\frac{GMm}{R^3}\left[r\vec i - 3\frac{(-r\cancel{R})}{\cancel{R^2}}(-R\vec i)\right] \simeq -\frac{GMm}{R^3}(-2r\vec i) \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec F_{παλ_B} \simeq \frac{2GMm}{R^3}r\vec i$$



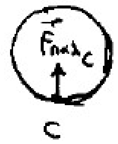


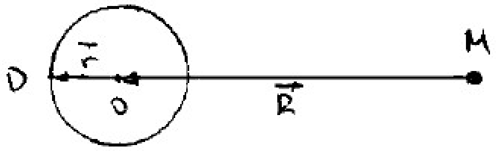
Είναι: $\vec{r} \cdot \vec{R} = 0$ γιατί $\vec{r} \perp \vec{R}$

και $\vec{r} = -r\vec{j}$, $\vec{R} = -R\vec{i}$

οπότε η (6) δίνει:

$$\vec{F}_{παλ,C} \simeq -G\frac{Mm}{R^3}\left[-r\vec{j} - 0\right] \simeq G\frac{Mm}{R^3} r\vec{j}$$





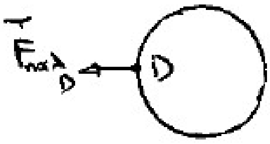
Είναι: $\vec{r} \cdot \vec{R} = rR$ γιατί το $\vec{r}$ ομόρροπο του $\vec{R}$

και $\vec{r} = -r\vec{i}$, $\vec{R} = -R\vec{i}$

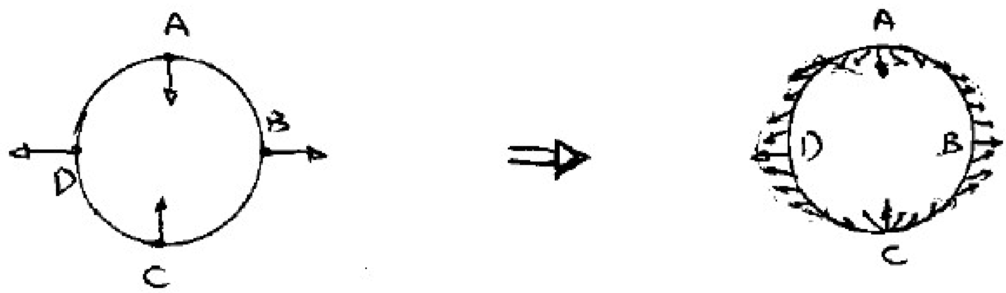
οπότε η (6) δίνει:

$$\vec{F}_{παλ,D} \simeq -G\frac{Mm}{R^3}\left[-r\vec{i} - 3\frac{rR}{\cancel{R^2}}(-R\vec{i})\right] \simeq -G\frac{Mm}{R^3}(2r\vec{i}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{F}_{παλ,D} \simeq -2G\frac{Mm}{R^3} r\vec{i}$$



Σχηματικά τα παραπάνω αποτελέσματα έχουν ως εξής:



Συνεπώς παρατηρείται ότι στα σημεία A και C έχουμε υποχώρηση των νερών δηλ. εμφανίζεται πλημμυρίδα, ενώ στα σημεία B και D έχουμε υπερύψωση των νερών δηλ. εμφανίζεται άμπωτη.

Επίσης από τα προηγούμενα παρατηρείται ότι η παλιρροιακή δύναμη στα σημεία A και C έχει το μισό μέτρο της αντίστοιχης δύναμης στα σημεία B και D.

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας