ΠΑΓΚΟΣΜΙΑ ΕΛΞΗ
ΘΕΩΡΙΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ

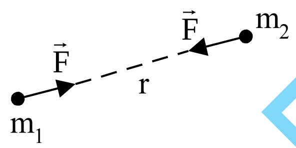
Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ **6932 946778**
www.pmoiras.weebly.com

Νόμος Παγκόσμιας Έλξης

Η βαρυτική δύναμη είναι μια από τις θεμελιώδεις δυνάμεις στη φύση και είναι αρκετά ασθενής, εκτός αν τα αντικείμενα είναι μεγάλα, όπως πλανήτες ή αστέρια. Για παράδειγμα η ηλεκτρική δύναμη μεταξύ δυο πρωτονίων είναι πολύ ισχυρότερη από τη βαρυτική δύναμη αυτών.

Ο Newton απόδειξε ότι η βαρυτική δύναμη μεταξύ δύο σωματίων είναι μια ελκτική κεντρική δύναμη ανάλογη προς τις μάζες των σωματίων και αντιστρόφως ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασης που χωρίζει τα δύο σωμάτια. Δηλαδή:



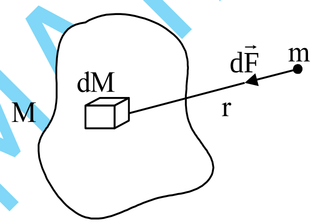
Σχήμα 10.1

$$\vec{F}(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r} \qquad \textbf{(10-1)}$$

όπου $\hat{r}$ το μοναδιαίο διάνυσμα της απόστασης των δυο μαζών και $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 / kgr^2$ είναι μια σταθερά αναλογίας (σταθερά παγκόσμιας έλξης).
Η σχέση **(10-1)** αποτελεί το **νόμο της παγκόσμιας έλξης**.

Σύμφωνα με τον 3^o νόμο του Newton, οι δυνάμεις παγκόσμιας έλξεως ανάμεσα σε δυο σωμάτια είναι ένα ζευγάρι δράσεως – αντιδράσεως.

Όπως διατυπώθηκε ο νόμος της παγκόσμιας έλξης με τη **(10-1)**, ισχύει μόνο για σημειακές μάζες. Για τον υπολογισμό της ελκτικής δύναμης μεταξύ ενός εκτεταμένου σώματος μάζας M και μιας σημειακής μάζας m, εκλέγεται μια στοιχειώδης μάζα dM που απέχει κατά r από τη μάζα m. Τότε η στοιχειώδης δύναμη μεταξύ των δυο αυτών μαζών είναι:



Σχήμα 10.2

$$d\vec{F} = -G\frac{m dM}{r^2}\hat{r}$$

κι ολοκληρώνοντας σε όλη τη μάζα του εκτεταμένου σώματος, τελικά προκύπτει:

$$\boxed{\vec{F} = \int d\vec{F} = -Gm\int \frac{dM}{r^2}\hat{r}} \qquad \textbf{(10-2)}$$

όπου dM = ρdV (ρ η πυκνότητα του εκτεταμένου σώματος).

Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια

Επειδή η βαρυτική δύναμη είναι κεντρική και εξαρτάται μόνο από την απόσταση είναι συντηρητική δύναμη και κατά συνέπεια θα απορρέει από **βαρυτική δυναμική ενέργεια V(r)** σύμφωνα με τη σχέση:

$$F(r) = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_0^V dV = -\int_\infty^r F(r)dr \overset{(10\text{-}1)}{\Rightarrow} V(r) = \int_\infty^r G\frac{m_1m_2}{r^2}dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = -G\frac{m_1m_2}{r}} \qquad \textbf{(10-3)}$$

Κατά ανάλογο τρόπο με τη **(10-2)** προκύπτει ότι η βαρυτική δυναμική ενέργεια μιας σημειακής μάζας m και ενός εκτεταμένου σώματος Μ δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{V = \int dV = -Gm\int\frac{dM}{r}} \qquad \textbf{(10-4)}$$

Εφαρμογή

Στην περίπτωση της Γης με μάζα $M_Γ$ και ακτίνα $R_Γ$ μια σημειακή μάζα m που βρίσκεται σε απόσταση $r \geq R_Γ$ από το κέντρο της Γης δέχεται δύναμη:

$$\vec{F} = -G\frac{M_Γ m}{r^2}\hat{r} \qquad \textbf{(10-5)}$$

και έχει δυναμική ενέργεια :

$$V = -G\frac{M_Γ m}{r} \qquad \textbf{(10-6)}$$

Έστω ότι ένα σώμα μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα $υ_ο$. Η ολική ενέργειά του στην επιφάνεια της Γης είναι:

$$E_o = \frac{1}{2}mυ_o^2 + \left(-G\frac{M_Γ m}{R_Γ}\right)$$

ενώ σε μια τυχαία θέση $r>R_Γ$ η αντίστοιχη ενέργεια είναι:

$$E = \frac{1}{2}mυ^2 + \left(-G\frac{M_Γ m}{r}\right)$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας προκύπτει:

$$E_o = E \Rightarrow \frac{1}{2} m\upsilon_o^2 - G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma} = \frac{1}{2} m\upsilon^2 - G\frac{M_\Gamma m}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_o^2 - 2GM_\Gamma\left(\frac{1}{R_\Gamma} - \frac{1}{r}\right)$$

Η διαφυγή του σώματος από το βαρυτικό πεδίο αντιστοιχεί σε $r \to \infty$, οπότε η παραπάνω σχέση δίνει:

$$\upsilon^2 = \upsilon_o^2 - 2\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}$$

Αλλά πρέπει: $\upsilon^2 \geq 0 \Rightarrow \upsilon_o^2 \geq 2\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}$

Άρα η ελάχιστη αρχική ταχύτητα **(ταχύτητα διαφυγής)** είναι:

$$\boxed{\upsilon_\delta = \sqrt{2\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma}}} \qquad \textbf{(10-7)}$$

Βαρυτικό Πεδίο

Μια μάζα M παράγει στο γύρω της χώρο, μια φυσική κατάσταση που ονομάζεται **βαρυτικό πεδίο,** το οποίο αναγνωρίζεται εξαιτίας της δύναμης την οποία ασκεί η μάζα M πάνω σε μια άλλη μάζα m (υπόθεμα), όταν τη φέρουμε σε αυτή την περιοχή. Σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης η δύναμη αυτή είναι της μορφής της **(10-1)**.
Για την ποσοτική περιγραφή του βαρυτικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου ορίζεται η **ένταση του βαρυτικού πεδίου** $\vec{g}$ ως η δύναμη που ασκείται πάνω στη μάζα – υπόθεμα προς τη μάζα αυτή. Δηλαδή:

$$\boxed{\vec{g}(r) = \frac{\vec{F}(r)}{m} = -G\frac{M}{r^2}\hat{r}} \qquad \textbf{(10-8)}$$

Η έκφραση **(10-8)** περιγράφει το βαρυτικό πεδίο σε απόσταση r από σώμα μάζας M. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε για κάθε σημείο στο χώρο γύρω από τη μάζα M ένα διάνυσμα $\vec{g}$ που το δίνει η εξίσωση **(10-8)** και το διάνυσμα αυτό είναι τέτοιο ώστε η βαρυτική δύναμη, που ασκείται σε οποιαδήποτε μάζα m που τοποθετείται σε αυτό το χώρο, να ισούται με το γινόμενο της μάζας m επί την ένταση του βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$.

☞ **Παρατηρήσεις:**

1) Η ένταση του βαρυτικού πεδίου έχει πάντοτε κατεύθυνση προς τη μάζα που το παράγει, αφού έχει την κατεύθυνση της βαρυτικής δύναμης, σύμφωνα με τη **(10-8)**.
2) Από τη σχέση **(10-8)** φαίνεται ότι η ένταση του βαρυτικού πεδίου έχει μονάδα μέτρησης στο S.I. $N \cdot kgr^{-1}$ ή m/sec^2, δηλαδή έχει τις διαστάσεις της επιταχύνσεως.

3) Συγκρίνοντας την εξίσωση **(10-8)** με τη γνωστή δύναμη του βάρους $\vec{B} = m\vec{g}$, παρατηρείται ότι η βαρυτική επιτάχυνση μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η ένταση του βαρυτικού πεδίου στην επιφάνεια της γης.

Εφαρμογή 1

Να υπολογιστεί η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας $\vec{g}(h)$, σε ύψος h από την επιφάνεια της γης, θεωρώντας R_Γ την ακτίνα της γης, $\vec{g}_o$ την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της γης και h<R.

Λύση

Η βαρυτική επιτάχυνση στην επιφάνεια της γης είναι:

$$\vec{g}_o = -G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2}\hat{r} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου M_Γ η μάζα της γης, ενώ σε ύψος $h<R_\Gamma$ από την επιφάνεια της γης είναι:

$$\vec{g}(h) = -G\frac{M_\Gamma}{(R_\Gamma+h)^2}\hat{r} \overset{(1)}{\Rightarrow} \vec{g}(h) = \vec{g}_o\left(\frac{R_\Gamma}{R_\Gamma+h}\right)^2$$

Δηλαδή η βαρυτική επιτάχυνση ελαττώνεται καθώς απομακρυνόμαστε από την επιφάνεια της γης.

Εφαρμογή 2

Το βάρος ενός αστροναύτη στη Γη είναι 500 Nt. Να υπολογιστεί πόσο ζυγίζει σε έναν πλανήτη που έχει μάζα ίση με 180 M_Γ και ακτίνα ίση με 6 R_Γ (όπου M_Γ, R_Γ η μάζα και η ακτίνα της Γης).

Λύση

Σύμφωνα με τη **(10-8)** το μέτρο της βαρυτικής επιτάχυνσης του πλανήτη είναι:

$$g_\Pi = G\frac{M_\Pi}{R_\Pi^2} = G\frac{180M_\Gamma}{36R_\Gamma^2} = 5G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \Rightarrow g_\Pi = 5g_\Gamma \qquad \textbf{(1)}$$

όπου g_Γ η βαρυτική επιτάχυνση της Γης.

Επομένως το βάρος του αστροναύτη στον πλανήτη είναι:

$$B_\Pi = mg_\Pi \overset{(1)}{=} 5mg_\Gamma = 5B_\Gamma = 5\cdot 500\text{Nt} \Rightarrow B_\Pi = 2500\text{Nt}$$

Άσκηση 1

Να υπολογισθεί η απόσταση από τη Γη, σε σχέση με την απόσταση Γης – Σελήνης d, που πρέπει να τοποθετηθεί ένας δορυφόρος έτσι ώστε να μην ασκείται σ' αυτόν συνιστάμενη βαρυτική δύναμη από τη Γη και τη Σελήνη. Η μάζα της Σελήνης είναι $M_\Sigma = 0{,}012\ M_\Gamma$.

Λύση

Για να είναι η συνιστάμενη βαρυτική δύναμη στο δορυφόρο μηδέν πρέπει:

$$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow G\frac{M_\Gamma m}{x^2}=G\frac{M_\Sigma m}{(d-x)^2}\Rightarrow\frac{(d-x)^2}{x^2}=\frac{M_\Sigma}{M_\Gamma}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{d-x}{x}\right)^2=\left(\frac{d}{x}-1\right)^2=\frac{M_\Sigma}{M_\Gamma}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d}{x}-1=\sqrt{\frac{M_\Sigma}{M_\Gamma}}\Rightarrow\frac{d}{x}=1+\sqrt{\frac{M_\Sigma}{M_\Gamma}}\Rightarrow x=\frac{d}{1+\sqrt{M_\Sigma/M_\Gamma}}=\frac{d}{1+\sqrt{0{,}012}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=0{,}9d$$

Άσκηση 2

Μια μάζα m διαχωρίζεται σε δυο μέρη, xm και (1-x)m. Υπολογίστε την τιμή του x για την οποία η βαρυτική δύναμη των δυο κομματιών γίνεται μέγιστη.

Λύση

Η βαρυτική δύναμη των δυο κομματιών, σύμφωνα με την **(10-1)** έχει μέτρο:

$$F = G\frac{xm(1-x)m}{r^2} \quad \textbf{(1)}$$

όπου r η απόσταση των δυο κομματιών.

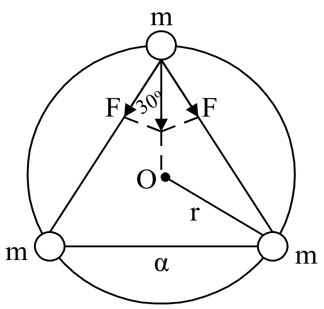
Αλλά: $$\frac{dF}{dx} = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{Gm^2}{r^2}\frac{d}{dx}(1-x)x = 0 \Rightarrow 1-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

κι επειδή $\frac{d^2F}{dx^2} = -2\frac{Gm^2}{r^2} < 0$ παρατηρείται ότι η βαρυτική δύναμη των δυο κομματιών είναι μέγιστη όταν $x = 1/2$, δηλαδή όταν η μάζα m διαιρεθεί σε δυο ίσα μέρη.

Άσκηση 3

Τρεις ίδιες σημειακές μάζες m τοποθετούνται στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α και κινούνται σε κυκλική τροχιά. Για κάθε σημειακή μάζα η απαιτούμενη κεντρομόλος δύναμη παρέχεται από την βαρυτική δύναμη που οφείλεται στις άλλες δυο μάζες. Υπολογίστε την περίοδο του συστήματος των τριών αυτών σημειακών μαζών.

Λύση



Η βαρυτική δύναμη μιας μάζας από κάθε άλλη έχει μέτρο:

$$F = G\frac{m^2}{\alpha^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Η συνισταμένη δύναμη σε κάθε μάζα είναι: $\Sigma F = 2F\cos 30^o$ και παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, οπότε:

$$\Sigma F = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow 2F\cos 30^o = m\frac{\upsilon^2}{r} \overset{(1)}{\Rightarrow} 2G\frac{m^2}{\alpha^2}\frac{\sqrt{3}}{2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{\sqrt{3}Gmr}{\alpha^2}} \qquad \textbf{(2)}$$

Συνεπώς: $\upsilon = \omega r \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon}{r} \overset{(2)}{=} \sqrt{\frac{\sqrt{3}Gm}{\alpha^2 r}}$

Αλλά: $\cos 30^o = \frac{\alpha/2}{r} \Rightarrow r = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ οπότε: $\omega = \sqrt{\frac{3Gm}{\alpha^3}}$

Άρα η περίοδος του συστήματος των τριών μαζών είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha^3}{3Gm}} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2\alpha^3}{3Gm}}$$

Άσκηση 4

Δυο δορυφόροι ίδιας μάζας περιστρέφονται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη γη σε απόσταση r_1 και $r_2 > r_1$ από την επιφάνεια της γης αντίστοιχα. Ποιος από τους δυο δορυφόρους έχει τη μεγαλύτερη κινητική ενέργεια;

Λύση

Η βαρυτική ελκτική δύναμη της γης αποτελεί την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη της κυκλικής τροχιάς του κάθε δορυφόρου. Επομένως:

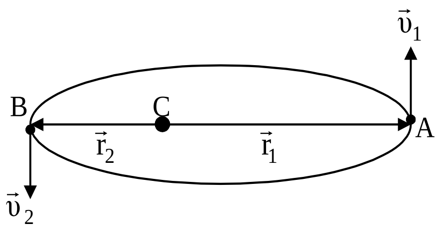
$$F_\kappa = m\alpha_\kappa \Rightarrow G\frac{M_\Gamma m}{(R_\Gamma + r)^2} = m\frac{\upsilon^2}{R_\Gamma + r} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + r}} \qquad \textbf{(1)}$$

Η σχέση **(1)** παρέχει την ταχύτητα του κάθε δορυφόρου κι όπως παρατηρείται αυτή μειώνεται καθώς αυξάνεται η απόστασή του r από την επιφάνεια της γης. Επομένως ο δορυφόρος που βρίσκεται σε απόσταση r_1 από την επιφάνεια της γης έχει μεγαλύτερη ταχύτητα, άρα και κινητική ενέργεια(αφού $K = 1/2m\upsilon^2$), από αυτόν που βρίσκεται σε απόσταση $r_2 > r_1$ από την επιφάνεια της γης.

Άσκηση 5

Δορυφόρος κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από έναν πλανήτη C με ακτίνες r_1 και r_2. Γράψτε τις σχέσεις που συνδέουν τις ακτίνες r_1 και r_2 με τις αντίστοιχες ταχύτητες υ_1 και υ_2 του δορυφόρου στις θέσεις αυτές. Δίνεται η μάζα του πλανήτη M_C.

Λύση



Ο δορυφόρος κινείται κατά μήκος της ελλειπτικής τροχιάς του σχήματος υπό την επίδραση της ελκτικής βαρυτικής δύναμης από τον πλανήτη C :

$$\vec{F} = -G\frac{M_C m}{r^2}\hat{r}$$

Επειδή η δύναμη $\vec{F}$ είναι κεντρική είναι και συντηρητική οπότε εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των θέσεων A και B προκύπτει:

$$K_A + V_A = K_B + V_B \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - G\frac{M_C m}{r_1} = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 - G\frac{M_C m}{r_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_1^2 - \upsilon_2^2 = 2GM_C\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Επίσης επειδή η δύναμη είναι κεντρική η ροπή της ως προς το C είναι μηδέν, οπότε η στροφορμή του δορυφόρου ως προς το C διατηρείται. Επομένως:

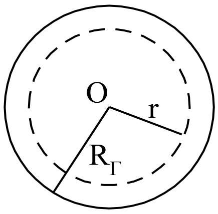
$$\vec{L}_A = \vec{L}_B \Rightarrow m\upsilon_1 r_1 = m\upsilon_2 r_2 \Rightarrow \upsilon_1 r_1 = \upsilon_2 r_2 \qquad \textbf{(2)}$$

Οι σχέσεις **(1)** και **(2)** συνδέουν τις ακτίνες r_1 και r_2 με τις ταχύτητες υ_1 και υ_2 στις θέσεις A και B του δορυφόρου.

Άσκηση 6

Να βρεθεί μια έκφραση για την ελκτική δύναμη $\vec{F}(r)$ και τη δυναμική ενέργεια $V(r)$ μιας σημειακής μάζας m, που απέχει απόσταση r ($r<R_Γ$) από το κέντρο της Γης.

Λύση



Όταν η σημειακή μάζα m βρίσκεται στο εσωτερικό της Γης δέχεται δύναμη μόνο από το τμήμα της μάζας της Γης, που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα ακτίνας $r<R_Γ$. Αν θεωρηθεί η πυκνότητα της Γης σταθερή τότε είναι:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{M_Γ}{\frac{4}{3}\pi R_Γ^3} \Rightarrow M = M_Γ \frac{r^3}{R_Γ^3} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $M_Γ$ η μάζα ολόκληρης της Γης.

Επομένως η ελκτική δύναμη της σημειακής μάζας στο εσωτερικό της Γης είναι:

$$\vec{F}(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} \overset{(1)}{=} -G\frac{M_Γ m r^3/R_Γ^3}{r^2}\hat{r} \Rightarrow \vec{F}(r) = -G\frac{M_Γ m}{R_Γ^3} r\hat{r} \qquad \textbf{(2)}$$

Η δυναμική της ενέργεια είναι:

$$F = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int dV = -\int F(r)dr \overset{(2)}{=} G\frac{M_Γ m}{R_Γ^3}\int r dr \Rightarrow V(r) = G\frac{M_Γ m}{2R_Γ^3}r^2 + c \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά στην επιφάνεια της Γης για $r = R_Γ$, λόγω συνέχειας η **(3)** πρέπει να έχει την ίδια τιμή με την **(10-6)** που ισχύει για $r>R_Γ$. Δηλαδή:

$$-G\frac{M_Γ m}{R_Γ} = G\frac{M_Γ m}{2R_Γ^3}R_Γ^2 + c \Rightarrow c = -\frac{3GM_Γ m}{2R_Γ}$$

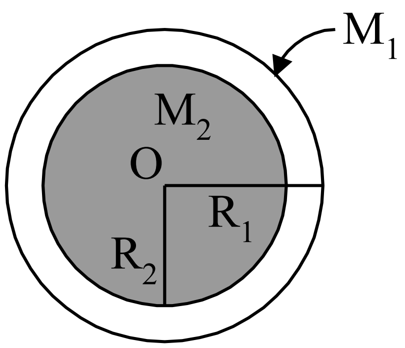
Οπότε η **(3)** γίνεται:

$$V(r) = G\frac{M_Γ m}{2R_Γ^3}r^2 - \frac{3GM_Γ m}{2R_Γ}$$

Άσκηση 7

Ένας ομογενής σφαιρικός φλοιός μάζας M_1 και ακτίνας R_1 περιβάλλει μια ομογενή σφαίρα μάζας M_2 και ακτίνας $R_2<R_1$. Να υπολογιστούν:
α) Η δύναμη που ασκείται σε σημειακή μάζα m σε τυχαίο σημείο του χώρου.
β) Η δυναμική ενέργεια της μάζας m σε τυχαία θέση λαμβάνοντας ως θέση αναφοράς το άπειρο.

Λύση



α) Η βαρυτική δύναμη που ασκείται σε μια σημειακή μάζα m οφείλεται μόνο από τη μάζα που βρίσκεται στο εσωτερικό σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r ίσης με την απόσταση της μάζας m από το κέντρο O.
Επομένως η δύναμη στη σημειακή μάζα είναι:

Για $r > R_1$: $$\vec{F} = -G\frac{(M_1+M_2)m}{r^2}\hat{r} \quad \textbf{(1)}$$

Για $R_2 < r < R_1$: $$\vec{F} = -G\frac{M_2 m}{r^2}\hat{r} \quad \textbf{(2)}$$

Για $r<R_2$ (σύμφωνα με την άσκηση 6): $$\vec{F} = -G\frac{M_2 m}{R_2^3}r\,\hat{r} \quad \textbf{(3)}$$

β) Η δυναμική ενέργεια σε κάθε θέση είναι:

i) Για $r > R_1$: $$V(r) = -\int F dr \overset{(1)}{=} G(M_1+M_2)m\int\frac{dr}{r^2} = -G\frac{(M_1+M_2)m}{r} + c_1$$

Επειδή για $r\to\infty$ είναι $V(r)=0$ προκύπτει ότι $c_1=0$.

Άρα: $$V(r) = -G\frac{(M_1+M_2)m}{r} \quad \text{για } r\geq R_1 \quad \textbf{(4)}$$

ii) Για $R_2 < r < R_1$:

$$V(r) = -\int F dr \overset{(2)}{=} GM_2 m \int \frac{dr}{r^2} = -G\frac{M_2 m}{r} + c_2$$

Για $r = R_1$ λόγω συνέχειας η τιμή της **(4)** πρέπει να επαληθεύει την παραπάνω. Δηλαδή:

$$-G\frac{(M_1+M_2)m}{R_1} = -G\frac{M_2 m}{R_1} + c_2 \Rightarrow c_2 = -G\frac{M_1 m}{R_1}$$

Άρα: $$V(r) = -G\frac{M_2 m}{r} - G\frac{M_1 m}{R_1} \quad \text{για} \quad R_2 \le r \le R_1 \qquad \textbf{(5)}$$

iii) Για $r < R_2$: $$V(r) = -\int F dr \overset{(3)}{=} G\frac{M_2 m}{R_2^3}\int r dr = G\frac{M_2 m}{2R_2^3}r^2 + c_3$$

Για $r = R_2$ η τιμή της **(5)** πρέπει να επαληθεύει την παραπάνω λόγω συνέχειας, οπότε:

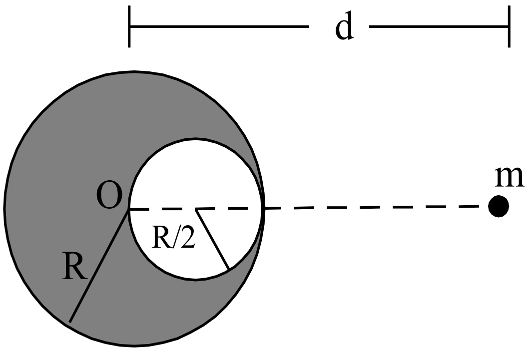
$$-G\frac{M_2 m}{R_2} - G\frac{M_1 m}{R_1} = G\frac{M_2 m}{R_2^3}R_2^2 + c_3 \Rightarrow c_3 = -\frac{3GM_2 m}{2R_2} - G\frac{M_1 m}{R_1}$$

Άρα: $$V(r) = G\frac{M_2 m}{2R_2^3}r^2 - \frac{3GM_2 m}{2R_2} - G\frac{M_1 m}{R_1} \quad \text{για} \quad r \le R_2$$

Άσκηση 8

Σε μια μολυβένια σφαίρα ακτίνας R ανοίγεται μια σφαιρική κοιλότητα έτσι ώστε η επιφάνειά της να αγγίζει την εξωτερική επιφάνεια της μολυβένιας σφαίρας και να περνάει από το κέντρο της. Η μάζα της σφαίρας πριν γίνει η κοιλότητα ήταν M. Με ποια δύναμη σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης, θα έλκει η μολυβένια σφαίρα μια σημειακή μάζα m που βρίσκεται σε απόσταση d από το κέντρο της μολυβένιας σφαίρας πάνω στην ευθεία που ενώνει τα κέντρα της σφαίρας και της κοιλότητας;

Λύση



Το μέτρο της ζητούμενης δύναμης σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας είναι:

$$F = F_o - F_1 \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $F_o = G\dfrac{Mm}{d^2}$ **(2)**

είναι η δύναμη οφειλόμενη στη σφαίρα ακτίνας R, ενώ

$$F_1 = G\frac{M'm}{(d-R/2)^2} \qquad \textbf{(3)}$$

είναι η δύναμη οφειλόμενη στη σφαιρική κοιλότητα ακτίνας R/2.

Αλλά λόγω της σταθερής πυκνότητας της σφαίρας είναι:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M'}{\frac{4}{3}\pi (R/2)^3} \Rightarrow \frac{M}{M'} = 8 \Rightarrow M' = \frac{M}{8} \qquad \textbf{(4)}$$

Επομένως η **(1)** λόγω των **(2)**, **(3)** και **(4)** δίνει:

$$F = G\frac{Mm}{d^2} - G\frac{Mm}{8(d-R/2)^2} = GMm\left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8(d-R/2)^2}\right]$$

Άσκηση 9

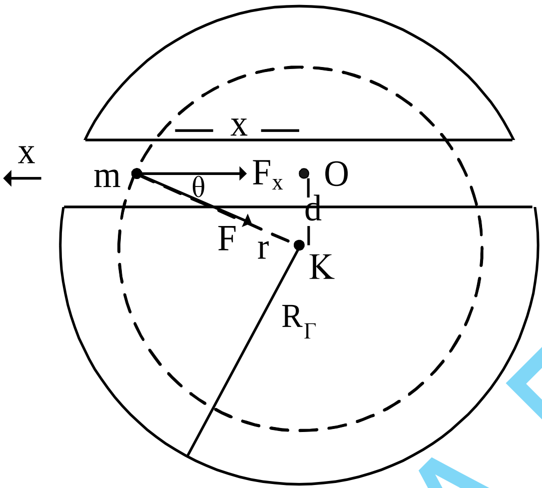
Έστω ότι μια σήραγγα σκάβεται στο εσωτερικό της γης κατά μήκος μιας χορδής και όχι κατά μήκος μιας διαμέτρου σε απόσταση d από το κέντρο της. Η Γη θεωρείται ομογενής με μάζα $M_Γ$ και ακτίνα $R_Γ$. Μια σημειακή μάζα m αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα μέσα στη σήραγγα.

α) Δείξτε ότι η κίνηση της μάζας θα είναι απλή αρμονική.

β) Βρείτε τη θέση και την ταχύτητα της μάζας συναρτήσει του χρόνου.

γ) Υπολογίστε την περίοδο της κινήσεως.

Λύση



α) Έστω ότι η σημειακή μάζα m βρίσκεται στην τυχαία θέση σε απόσταση r από το κέντρο της γης. Σύμφωνα με την άσκηση 6, αυτή δέχεται δύναμη μόνο από το τμήμα της γης που περικλείεται στο εσωτερικό σφαίρας ακτίνας r και είναι:

$$\vec{F} = -G\frac{M_Γ m}{R_Γ^3} r\,\hat{r}$$

Κατά τη διεύθυνση της κίνησης της μάζας ασκείται πάνω της η οριζόντια συνιστώσα της βαρυτικής δύναμης:

$$\vec{F}_x = -G\frac{M_Γ m}{R_Γ^3} r\cos\theta\,\hat{x}$$

Αλλά: $\cos\theta = \frac{x}{r}$ οπότε: $\vec{F}_x = -G\frac{M_Γ m}{R_Γ^3} x\hat{x}$

Επομένως ο 2ος νόμος του Newton στον άξονα x της κίνησης δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -G\frac{M_Γ m}{R_Γ^3}x = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + G\frac{M_Γ}{R_Γ^3}x = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα επειδή η **(1)** αποτελεί διαφορική εξίσωση απλής αρμονικής κίνησης, η σημειακή μάζα θα εκτελεί απλή αρμονική κίνηση περί το Ο.
β) Η γενική λύση της **(1)** είναι:

$x(t) = A\cos\omega t$, όπου $\omega = \sqrt{G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma^3}}$, $A = \sqrt{R_\Gamma^2 - d^2}$ και $\varphi = 0$ επειδή η μάζα αφήνεται από την επιφάνεια της γης.

και $\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t$.

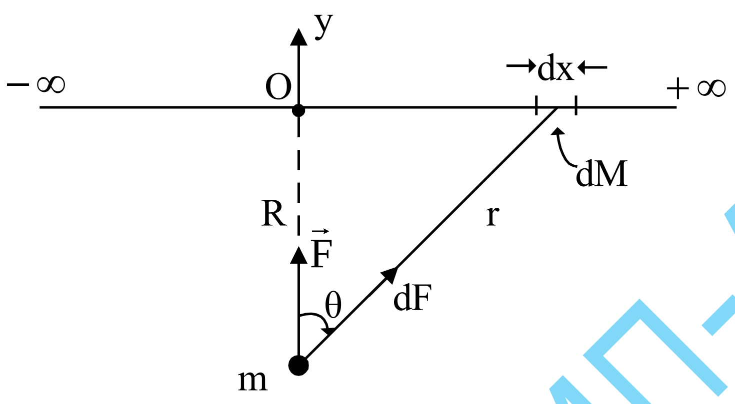
γ) Η περίοδος της κίνησης είναι:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R_\Gamma^3}{GM_\Gamma}}$$

Άσκηση 10

Να υπολογιστεί η δύναμη βαρύτητας που ασκείται σε μια σημειακή μάζα m από μια υλική ευθεία απείρου μήκους και γραμμικής πυκνότητας λ, όταν η μάζα m απέχει απόσταση R από την ευθεία.

Λύση



Επιλέγοντας μια στοιχειώδη μάζα dM, πλάτους dx της υλικής ευθείας σε απόσταση r από τη σημειακή μάζα, θα την έλκει με δύναμη μέτρου:

$$dF = G\frac{m dM}{r^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά: $dM = \lambda dx$ και $dx = r d\theta$ δηλαδή $dM = \lambda r d\theta$ οπότε η **(1)** γίνεται:

$$dF = G\frac{m\lambda r}{r^2}d\theta = G\frac{m\lambda}{r}d\theta \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης: $\cos\theta = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{\cos\theta}$ οπότε η **(2)** γράφεται:

$$dF = G\frac{m\lambda}{R}\cos\theta d\theta$$

Άρα η ολική δύναμη έχει μέτρο:

$$F = \int dF = G\frac{m\lambda}{R}\int_{3\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = G\frac{m\lambda}{R}(\sin\pi/2 - \sin 3\pi/2) = G\frac{m\lambda}{R}[1-(-1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = 2G\frac{m\lambda}{R} \qquad \textbf{(3)}$$

Τα όρια της γωνίας θ είναι για $x \to -\infty : \theta = 3\pi/2$ και για $x \to +\infty : \theta = \pi/2$.

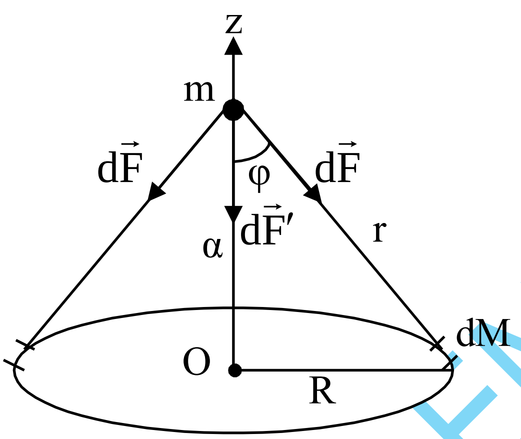
Σε διανυσματική μορφή η **(3)** γράφεται: $\vec{F} = -2G\dfrac{m\lambda}{R}\,\hat{y}$

γιατί όπως παρατηρείται σε δυο τυχαία αντιδιαμετρικά στοιχειώδη τμήματα dM, οι οριζόντιες συνιστώσες αλληλοαναιρούνται και τελικά η συνισταμένη δύναμη είναι κατακόρυφη.

Άσκηση 11

α) Μια σημειακή μάζα m βρίσκεται πάνω στον κατακόρυφο άξονα ενός ομογενούς κυκλικού δακτυλίου μάζας M και ακτίνας R, σε απόσταση α από το κέντρο του δακτυλίου. Υπολογίστε την ελκτική δύναμη που ασκείται στη μάζα από το δακτύλιο.
β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος **(α)** υπολογίστε την ελκτική δύναμη που ασκεί ομογενής κυκλικός δίσκος επιφανειακής πυκνότητας σ και ακτίνας R σε σημειακή μάζα m που απέχει απόσταση α κατακόρυφα από το κέντρο του δίσκου.

Λύση



α) Η δύναμη με την οποία έλκει μια στοιχειώδης μάζα dM του δακτυλίου τη σημειακή μάζα είναι:

$$d\vec{F} = -G\frac{mdM}{r^2}\hat{r} \qquad \textbf{(1)}$$

Αν ληφθεί υπόψη και η αντιδιαμετρική στοιχειώδη μάζα παρατηρείται ότι οι οριζόντιες συνιστώσες αλληλοαναιρούνται. Οπότε συνεισφέρουν μόνο οι κάθετες συνιστώσες, οι οποίες είναι:

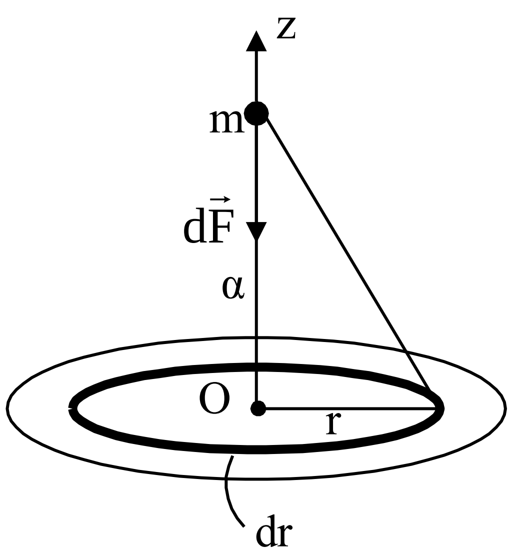
$$d\vec{F}' = dF\cos\varphi\hat{z} \overset{(1)}{=} -G\frac{mdM}{r^2}\cos\varphi\hat{z} \qquad \textbf{(2)}$$

Αλλά: $\cos\varphi = \alpha/r$ και $r^2 = R^2 + \alpha^2$ οπότε η **(2)** γίνεται:

$$d\vec{F}' = -G\frac{mdM\ \alpha}{(R^2+\alpha^2)^{3/2}}\hat{z} \qquad \textbf{(3)}$$

Η ολική δύναμη προκύπτει με ολοκλήρωση πάνω σε όλο το δακτύλιο, οπότε:

$$\vec{F}' = \int d\vec{F}' \overset{(3)}{=} -G\frac{m\alpha}{(R^2+\alpha^2)^{3/2}}\hat{z}\int dM \Rightarrow \vec{F}' = -G\frac{mM\alpha}{(R^2+\alpha^2)^{3/2}}\hat{z} \qquad \textbf{(4)}$$



β) Η δύναμη που οφείλεται σε ένα στοιχειώδη κυκλικό δακτύλιο του δίσκου μάζας dM, ακτίνας r και πλάτους dr είναι σύμφωνα με την **(4)**:

$$d\vec{F} = -G\frac{mdM\ \alpha}{(r^2+\alpha^2)^{3/2}}\hat{z}$$

Αλλά: dM = σdS = σ2πrdr οπότε:

$$d\vec{F} = -G\frac{m\alpha\sigma\ 2\pi r\, dr}{(r^2+\alpha^2)^{3/2}}\hat{z}$$

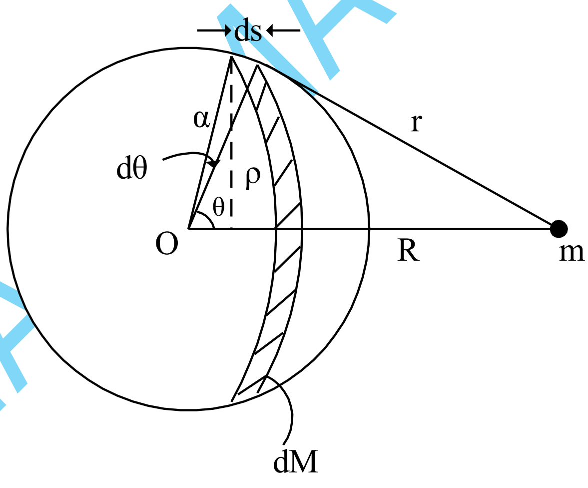
Άρα η ολική δύναμη είναι:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = -Gm\alpha 2\pi\sigma\,\hat{z}\int_0^R \frac{rdr}{(r^2+\alpha^2)^{3/2}} \Rightarrow \vec{F} = -2\pi G\sigma m\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+R^2}}\right)\hat{z}$$

Άσκηση 12

Έστω σφαιρικός φλοιός ακτίνας α και σταθερής επιφανειακής πυκνότητας σ. Να υπολογιστεί η βαρυτική δυναμική ενέργεια του φλοιού και μιας σημειακής μάζας m αν:
α) Η μάζα m απέχει απόσταση R>α από το κέντρο του σφαιρικού φλοιού.
β) Η μάζα m απέχει απόσταση R< α από το κέντρο του σφαιρικού φλοιού.

Λύση



α) Η δυναμική ενέργεια της σημειακής μάζας m και μιας στοιχειώδους κυκλικής ζώνης του φλοιού, που αντιστοιχεί στις γωνίες θ και θ+dθ, μάζας dM είναι:

$$dV = -G\frac{mdM}{r} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου dM =σdS= σ2πρds, και ρ=αsinθ είναι η ακτίνα της στοιχειώδους κυκλικής ζώνης και ds=αdθ το πλάτος αυτής οπότε:

$$dM = \sigma 2\pi\alpha^2 \sin\theta d\theta \qquad \textbf{(2)}$$

Έτσι η **(1)** λόγω της **(2)** γίνεται:

$$dV = -\frac{2\pi G\sigma m\alpha^2 \sin\theta d\theta}{r} \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά η απόσταση r της κυκλικής ζώνης από τη σημειακή μάζα είναι σύμφωνα με το νόμο των συνημίτονων: $r^2 = \alpha^2 + R^2 - 2\alpha R\cos\theta$
και παραγωγίζοντάς την προκύπτει:

$$2rdr = 2\alpha R\sin\theta d\theta \Rightarrow \sin\theta d\theta = \frac{rdr}{\alpha R} \qquad \textbf{(4)}$$

Επομένως η **(3)** λόγω της **(4)** παίρνει τελικά τη μορφή:

$$dV = -\frac{2\pi G\sigma m\alpha}{R}dr \qquad \textbf{(5)}$$

Άρα η δυναμική ενέργεια που οφείλεται σε ολόκληρο το σφαιρικό φλοιό, ολοκληρώνοντας την παραπάνω είναι:

$$V(R) = \int dV = -\frac{2\pi G\sigma m\alpha}{R}\int_{R-\alpha}^{R+\alpha} dr = -\frac{4\pi G\sigma\alpha^2 m}{R} \qquad \textbf{(6)}$$

ή $V(R) = -G\dfrac{mM}{R}$,όπου $M = 4\pi\alpha^2\sigma$ η μάζα του σφαιρικού φλοιού.

Συμπέρασμα: Ομογενές σφαιρικός φλοιός συμπεριφέρεται για τα εξωτερικά σημεία ως υλικό σημείο μάζας M, που βρίσκεται στο κέντρο του σφαιρικού φλοιού.

β) Στην περίπτωση που η σημειακή μάζα βρίσκεται στο εσωτερικό του σφαιρικού φλοιού, δηλαδή όταν R<α, για τον υπολογισμό της δυναμικής ενέργειας ακολουθείται η ίδια διαδικασία με αυτή του ερωτήματος **(α)** μέχρι την απόδειξη της σχέσεως **(5)**. Στη συνέχεια όμως η ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα με όρια α – R και α +R. Δηλαδή:

$$V(R) = \int dV = -\frac{2\pi G\sigma m\alpha}{R}\int_{\alpha-R}^{\alpha+R} dr \Rightarrow V(R) = -4\pi G\sigma m\alpha \qquad \textbf{(7)}$$

Συμπέρασμα: Η δυναμική ενέργεια σε εσωτερικό σημείο του σφαιρικού φλοιού είναι σταθερή, ανεξάρτητη της θέσης του σημείου αυτού.

☞ **Παρατήρηση:** Μέσω της σχέσης $\vec{F}(R) = -\frac{dV}{dR}\hat{R}$ και των **(6)**, **(7)** μπορεί να υπολογιστεί η βαρυτική δύναμη του σφαιρικού φλοιού και της σημειακής μάζας m για R>α και R<α αντίστοιχα. Συγκεκριμένα:

$$\vec{F}(R) = -\frac{4\pi G\sigma\alpha^2 m}{R^2}\hat{R} = -G\frac{mM}{R^2}\hat{R} \qquad \text{για } R>\alpha$$

$$\text{και} \quad \vec{F}(R) = 0 \quad \text{για } R<\alpha.$$