ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΟΡΜΗ - ΚΡΟΥΣΕΙΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 1

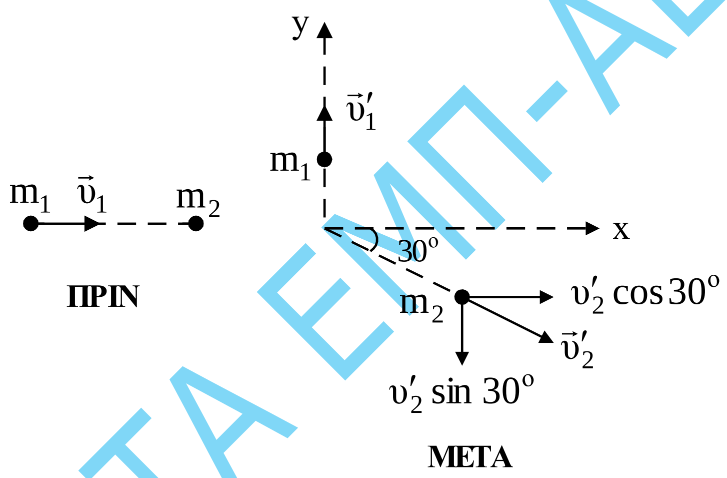
Ένα σώμα μάζας m_1 το οποίο κινείται στον άξονα x με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ συγκρούεται με ακίνητο σώμα του οποίου η μάζα m_2 δεν είναι γνωστή. Μετά την κρούση, το σώμα που έχει μάζα m_1 παρεκκλίνει από την πορεία του και κινείται κατά τον άξονα y, ενώ το δεύτερο σώμα κινείται υπό γωνία 30^o κάτω από τον άξονα x. Η κρούση είναι ελαστική.

α) Να βρείτε τη μάζα m_2 ως συνάρτηση της μάζας m_1, καθώς και τις τελικές ταχύτητες $\vec{\upsilon}'_1$ $\vec{\upsilon}'_2$ ως συναρτήσεις της $\vec{\upsilon}_1$.

β) Να βρείτε τις ταχύτητες των δύο σωματιδίων πριν $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ και μετά την κρούση $(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2)$ στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

(Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει:

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \begin{cases} x: \quad m_1\upsilon_1 = m_2\upsilon'_2 \cos 30^o \Rightarrow m_1\upsilon_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} m_2\upsilon'_2 & \textbf{(1)} \\ y: \quad 0 = m_1\upsilon'_1 - m_2\upsilon'_2 \sin 30^o \Rightarrow m_1\upsilon'_1 = \dfrac{1}{2} m_2\upsilon'_2 & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Διαιρώντας τις **(1)** και **(2)** κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon'_1} = \sqrt{3} \Rightarrow \upsilon'_1 = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{3}} \qquad \textbf{(3)}$$

Λόγω ελαστικής κρούσης ισχύει επίσης η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας. Οπότε:

$$K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} m_1\upsilon_1^2 = m_1\frac{\upsilon_1^2}{3} + m_2\upsilon_2'^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}m_1\upsilon_1^2 = m_2\upsilon_2'^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{2}{3}m_1\upsilon_1^2 = m_2\frac{4}{3}\frac{m_1^2}{m_2^2}\upsilon_1^2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = 2m_1 \quad \textbf{(4)}$$

Τέλος αντικαθιστώντας την **(4)** στην **(1)** προκύπτει: $\upsilon_2' = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{3}}$

Σε διανυσματική γραφή είναι:

$$\vec{\upsilon}_1' = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{3}}\hat{y} \quad \text{και} \quad \vec{\upsilon}_2' = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} - \frac{1}{2}\hat{y}\right) = \frac{\upsilon_1}{2}\hat{x} - \frac{\upsilon_1}{2\sqrt{3}}\hat{y}$$

β) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι σταθερή, αφού

$\Sigma\vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow M\vec{\alpha}_c = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = 0$ δηλαδή $\vec{\upsilon}_c =$ σταθ. και ισούται με:

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\sum m_i\vec{\upsilon}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2} \overset{(4)}{=} \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + 0}{m_1 + 2m_1} \Rightarrow \vec{\upsilon}_c = \frac{1}{3}\vec{\upsilon}_1$$

Θεωρώντας ως κινούμενο το σύστημα του κέντρου μάζας με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_c = \frac{\vec{\upsilon}_1}{3} = \frac{\upsilon_1}{3}\hat{x}$, σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου οι ταχύτητες των σωματιδίων πριν και μετά την κρούση στο κινούμενο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας θα είναι:

Πριν την κρούση: $\vec{u}_1 = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_c = \vec{\upsilon}_1 - \frac{\vec{\upsilon}_1}{3} \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{2}{3}\vec{\upsilon}_1 = \frac{2}{3}\upsilon_1\hat{x}$

$$\vec{u}_2 = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_c = 0 - \frac{\vec{\upsilon}_1}{3} \Rightarrow \vec{u}_2 = -\frac{\vec{\upsilon}_1}{3} = -\frac{\upsilon_1}{3}\hat{x}$$

Μετά την κρούση: $\vec{u}_1' = \vec{\upsilon}_1' - \vec{\upsilon}_c = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{3}}\hat{y} - \frac{\upsilon_1}{3}\hat{x} \Rightarrow \vec{u}_1' = -\frac{\upsilon_1}{3}\hat{x} + \frac{\upsilon_1}{\sqrt{3}}\hat{y}$

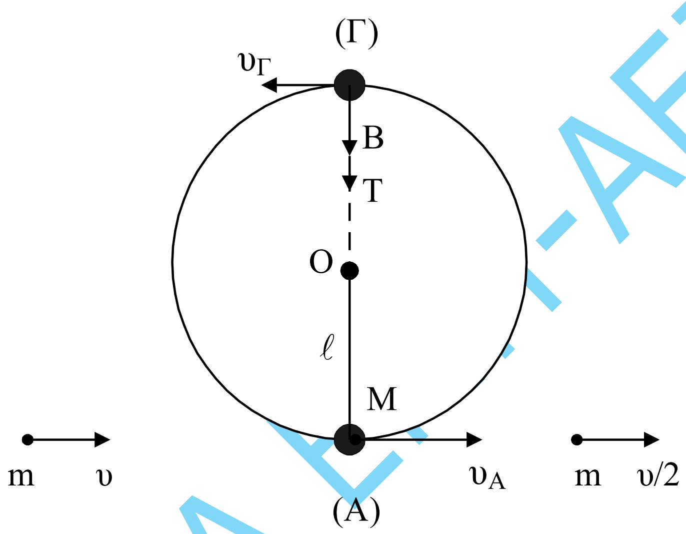
$$\vec{u}_2' = \vec{\upsilon}_2' - \vec{\upsilon}_c = \frac{\upsilon_1}{2}\hat{x} - \frac{\upsilon_1}{2\sqrt{3}}\hat{y} - \frac{\upsilon_1}{3}\hat{x} \Rightarrow \vec{u}_2' = \frac{\upsilon_1}{6}\hat{x} - \frac{\upsilon_1}{2\sqrt{3}}\hat{y}$$

Θέμα 2

Ένα βλήμα μάζας m που κινείται με ταχύτητα υ διαπερνά τη σφαίρα ενός εκκρεμούς μάζας M και διαφεύγει με ταχύτητα υ/2. Η σφαίρα του εκκρεμούς κρέμεται από αβαρές νήμα μήκους ℓ. Ποια η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας υ, ώστε η σφαίρα του εκκρεμούς να διαγράψει πλήρη κύκλο;

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



Μετά την κρούση η σφαίρα του εκκρεμούς αποκτά ταχύτητα υ_A και κινείται στην κυκλική τροχιά του σχήματος υπό την επίδραση του βάρους της B και της τάσης του νήματος T. Στην ανώτατη θέση Γ η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη, οπότε:

$$F_\kappa = M\alpha_\kappa \Rightarrow B + T = M\frac{\upsilon_\Gamma^2}{\ell} \Rightarrow T = M\frac{\upsilon_\Gamma^2}{\ell} - Mg \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά για να κάνει η σφαίρα του εκκρεμούς ανακύκλωση πρέπει στην ανώτατη θέση να ισχύει: $T \geq 0$

Οπότε η **(1)** δίνει: $\dfrac{M\upsilon_\Gamma^2}{\ell} - Mg \geq 0 \Rightarrow \upsilon_\Gamma \geq \sqrt{g\ell}$

Δηλαδή $\upsilon_{\Gamma_{min}} = \sqrt{g\ell}$ **(2)** είναι η ελάχιστη ταχύτητα της μάζας Μ στο σημείο Γ έτσι ώστε να διαγράψει πλήρη κύκλο.
Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για τη σφαίρα του εκκρεμούς μεταξύ των θέσεων Α και Γ προκύπτει:

$$K_A + V_A = K_\Gamma + V_\Gamma \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon^2_{A_{min}} + 0 = \frac{1}{2}M\upsilon^2_{\Gamma_{min}} + Mg2\ell \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2_{A_{min}} = \upsilon^2_{\Gamma_{min}} + 4g\ell \overset{(2)}{=} g\ell + 4g\ell = 5g\ell \Rightarrow \upsilon_{A_{min}} = \sqrt{5g\ell} \quad \textbf{(3)}$$

Έτσι από την αρχή διατήρησης της ορμής για τη κρούση ισχύει:

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m\upsilon_{min} + 0 = M\upsilon_{A_{min}} + m\frac{\upsilon_{min}}{2} \Rightarrow \frac{m\upsilon_{min}}{2} = M\upsilon_{A_{min}} \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

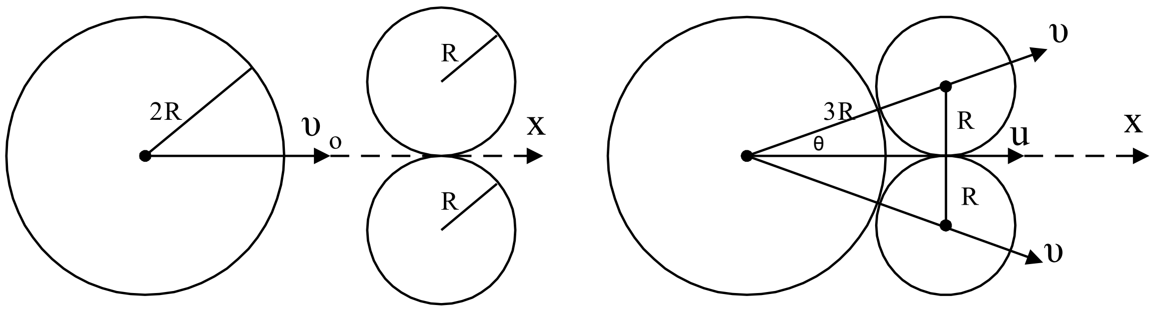
$$\Rightarrow \upsilon_{min} = \frac{2M}{m}\sqrt{5g\ell}$$

Θέμα 3

Δύο ελαστικές σφαίρες ακτίνας R εφάπτονται και βρίσκονται σε οριζόντιο επίπεδο ελεύθερο τριβών. Μια τρίτη ελαστική σφαίρα ακτίνας 2R κινείται στο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα υ_o και προσκρούει ελαστικά ταυτόχρονα στις άλλες δύο.
Να υπολογιστεί η ταχύτητα της μεγάλης σφαίρας μετά την πρόσκρουση.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



Η μάζα κάθε μικρής σφαίρας είναι: $m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$

ενώ της μεγάλης είναι: $M = \rho V' = \rho \frac{4}{3}\pi (2R)^3 = 8\rho \frac{4}{3}\pi R^3$

Δηλαδή: $M = 8m$ **(1)**

Μετά την πρόσκρουση έστω u η ταχύτητα της μεγάλης σφαίρας και υ κάθε μικρής, η οποία σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x. Από το σχήμα φαίνεται εύκολα ότι:

$$\sin\theta = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \text{έτσι} \;\; \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \textbf{(2)}$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής στον άξονα x προκύπτει:

$$\vec{p}_{\chi\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\chi\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow M\upsilon_o = Mu + 2m\upsilon\cos\theta \overset{(1)}{\Rightarrow} 8m\upsilon_o = 8mu + 2m\upsilon\cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\upsilon_o = 4u + \upsilon\cos\theta \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{2\sqrt{2}}{3}\upsilon = 4(\upsilon_o - u) \Rightarrow \upsilon = \frac{6}{\sqrt{2}}(\upsilon_o - u) \qquad \textbf{(3)}$$

Λόγω ελαστικής κρούσης διατηρείται η κινητική ενέργεια, οπότε:

$$K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon_o^2 = \frac{1}{2}Mu^2 + 2\frac{1}{2}m\upsilon^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} 8m\upsilon_o^2 = 8mu^2 + 2m\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$4\upsilon_o^2 = 4u^2 + \upsilon^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} 4\upsilon_o^2 = 4u^2 + \frac{36}{2}(\upsilon_o - u)^2 = 4u^2 + 18\upsilon_o^2 + 18u^2 - 36\upsilon_o u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22u^2 - 36\upsilon_o u + 14\upsilon_o^2 = 0$$

Η παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση έχει λύσεις: $u = \upsilon_o$ και $u = \frac{7}{11}\upsilon_o$.

Η πρώτη λύση απορρίπτεται γιατί αν $u = \upsilon_o$ δεν προκύπτει κρούση μεταξύ των σφαιρών.

Άρα η ζητούμενη ταχύτητα είναι: $u = \frac{7}{11}\upsilon_o$

Θέμα 4

Δύο σωματίδια με ίσες μάζες m κινούνται έτσι ώστε τα διανύσματα θέσης τους να είναι:

$$\vec{r}_1(t) = (5-2t)\hat{x} + (6-t)\hat{y} + (-5t^2 + t - 50)\hat{z}$$

$$\vec{r}_2(t) = (2t-15)\hat{x} + (t-4)\hat{y} + (-5t^2 + 2t - 55)\hat{z}$$

α) Να δείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και να βρείτε που και πότε θα συμβεί η σύγκρουση.
β) Ποια δύναμη ασκείται σε κάθε σωματίδιο;
γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος των δύο σωματιδίων κατά τη διάρκεια της κίνησης; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος.
δ) Κατά την κρούση τα δύο σωματίδια κολλούν. Να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του συσσωματώματος όταν έχει παρέλθει χρονικό διάστημα 2sec μετά την κρούση.

(Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.
Τμήμα Αγρονόμων – Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Για να συγκρουστούν τα δύο σωματίδια θα πρέπει τη χρονική στιγμή της σύγκρουσης t_Σ να είναι $\vec{r}_1(t_\Sigma) = \vec{r}_2(t_\Sigma)$. Δηλαδή θα πρέπει οι αντίστοιχες χωρικές συντεταγμένες να είναι ίσες:

$$x_1(t_\Sigma) = x_2(t_\Sigma) \Rightarrow 5 - 2t_\Sigma = 2t_\Sigma - 15 \Rightarrow 4t_\Sigma = 20 \Rightarrow t_\Sigma = 5\text{sec}$$

$$y_1(t_\Sigma) = y_2(t_\Sigma) \Rightarrow 6 - t_\Sigma = t_\Sigma - 4 \Rightarrow 2t_\Sigma = 10 \Rightarrow t_\Sigma = 5\text{sec}$$

$$z_1(t_\Sigma) = z_2(t_\Sigma) \Rightarrow -5t_\Sigma^2 + t_\Sigma - 50 = -5t_\Sigma^2 + 2t_\Sigma - 55 \Rightarrow t_\Sigma = 5\text{sec}$$

Άρα τα σωματίδια θα συγκρουστούν μετά από χρόνο $t_\Sigma = 5$sec και η θέση στην οποία θα συμβεί αυτό είναι : $\vec{r}_1(t_\Sigma) = \vec{r}_2(t_\Sigma) = -5\hat{x} + \hat{y} - 170\hat{z}$

β) Οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων είναι:

$$\vec{\upsilon}_1(t) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = -2\hat{x} - \hat{y} + (-10t + 1)\hat{z}$$

$$\vec{\upsilon}_2(t) = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = 2\hat{x} + \hat{y} + (-10t + 2)\hat{z}$$

Άρα οι δυνάμεις που δρουν πάνω στα σωματίδια είναι:

$$\vec{F}_1 = m\vec{\alpha}_1 = m\frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} = -10m\hat{z}$$

$$\vec{F}_2 = m\vec{\alpha}_2 = m\frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt} = -10m\hat{z}$$

γ) Η ολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα των δυο σωματιδίων είναι:

$\vec{F}_{ολ} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -20m\hat{z} \neq 0$ κι επειδή $\vec{F}_{ολ} = \dfrac{d\vec{P}_{ολ}}{dt} \neq 0$ η ορμή του συστήματος δεν είναι σταθερή και δε διατηρείται.

Άλλος τρόπος: Η ολική ορμή του συστήματος είναι:

$\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 = m(3-20t)\hat{z}$ δηλαδή δεν είναι σταθερή αφού εξαρτάται από το χρόνο.

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος είναι:

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2}{m+m} = \frac{m(3-20t)\hat{z}}{2m} \Rightarrow \vec{\upsilon}_c = \left(\frac{3}{2} - 10t\right)\hat{z}$$

δ) Τα δύο σώματα συγκρούονται σε χρόνο t_Σ=5sec στη θέση $\vec{r}_o = \vec{r}_1(t_\Sigma) = \vec{r}_2(t_\Sigma) = -5\hat{x} + \hat{y} - 170\hat{z}$

Η ορμή του συστήματος τη στιγμή t_Σ=5sec είναι:

$$\vec{p}_{ολ}(t = 5\,sec) = m(3 - 20\cdot 5)\hat{z} = -97m\hat{z}$$

Άρα η αρχική ταχύτητα του συσσωματώματος είναι:

$$\vec{p}_{ολ}(t = 5\,sec) = 2m\vec{\upsilon}_o \Rightarrow \vec{\upsilon}_o = -\frac{97m}{2m}\hat{z} \Rightarrow \vec{\upsilon}_o = -\frac{97}{2}\hat{z}$$

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται υπό την επίδραση της $\vec{F}_{ολ}$ με επιτάχυνση $\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{F}_{ολ}}{2m} = -10\hat{z}$.

Άρα το διάνυσμα θέσης του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_o + \vec{\upsilon}_o t + \frac{1}{2}\vec{\alpha}t^2 = -5\hat{x} + \hat{y} - 170\hat{z} - \frac{97}{2}t\hat{z} - 5t^2\hat{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = -5\hat{x} + \hat{y} - \left(5t^2 + \frac{97}{2}t + 170\right)\hat{z}$$

Και η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι:

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(-10t + \frac{97}{2}\right)\hat{z}$$

Επομένως για χρόνο t=2sec μετά την κρούση είναι:

$$\vec{r}(t = 2\,sec) = -5\hat{x} + \hat{y} - 287\hat{z} \quad \text{και} \quad \vec{\upsilon}(t = 2\,sec) = -\frac{137}{2}\hat{z}$$

Θέμα 5

Δύο σωματίδια με ίσες μάζες m κινούνται έτσι ώστε τα διανύσματα θέσης τους να είναι:

$$\vec{r}_1(t) = (t^2 + 3t - 5)\hat{x} + (1 - 2t^2)\hat{y}$$

$$\vec{r}_2(t) = (25 - t - t^2)\hat{x} + (2t^2 - 3t)\hat{y}$$

α) Ποια δύναμη ασκείται σε κάθε σωματίδιο;
β) Διατηρείται η ορμή του συστήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
γ) Να βρείτε τη στροφορμή $\vec{L}$ και τη ροπή δύναμης $\vec{\tau}$ του συστήματος ως προς την αρχή των αξόνων.
δ) Να βρείτε το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_c$ και την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_c$ του κέντρου μάζας του συστήματος.
ε) Να βρείτε τη στροφορμή $\vec{L}$ και τη ροπή δύναμης $\vec{\tau}$ του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας του.

(Τμήμα Ναυπηγών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων είναι:

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = (2t + 3)\hat{x} - 4t\hat{y}$$

$$\vec{\upsilon}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = (-1 - 2t)\hat{x} + (4t - 3)\hat{y}$$

Άρα οι δυνάμεις που δρουν πάνω στα σωματίδια είναι:

$$\vec{F}_1 = m\vec{\alpha}_1 = m\frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt} = m(2\hat{x} - 4\hat{y})$$

$$\vec{F}_2 = m\vec{\alpha}_2 = m\frac{d\vec{\upsilon}_2}{dt} = m(-2\hat{x} + 4\hat{y})$$

β) Η ολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα των δύο σωματιδίων είναι:
$\vec{F}_{ολ} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ κι επειδή $\vec{F}_{ολ} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = σταθ.$ δηλαδή η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

γ) Η στροφορμή του συστήματος ως προς την αρχή των αξόνων είναι:

$$\vec{L}_o = \Sigma\vec{L}_i = m\vec{r}_1 \times \vec{\upsilon}_1 + m\vec{r}_2 \times \vec{\upsilon}_2 =$$

$$m[(t^2 + 3t - 5)\hat{x} + (1 - 2t^2)\hat{y}] \times [(2t + 3)\hat{x} - 4t\hat{y}] +$$

$$+m[(25-t-t^2)\hat{x}+(2t^2-3t)\hat{y}]\times[(-1-2t)\hat{x}+(4t-3)\hat{y}]=$$

$$=m[-4t(t^2+3t-5)\hat{x}\times\hat{y}+(1-2t^2)(2t+3)\hat{y}\times\hat{x}+(25-t-t^2)(4t-3)\hat{x}\times\hat{y}+$$
$$+(2t^2-3t)(-1-2t)\hat{y}\times\hat{x}]=$$
$$=m[(-4t^3-12t^2+20t)\hat{z}+(2t+3-4t^3-6t^2)(-\hat{z})+$$

$$+(100t-75-4t^2+3t-4t^3+3t^2)\hat{z}+(-2t^2+3t-4t^3+6t^2)(-\hat{z})]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{L}_o=m(-11t^2+118t-78)\hat{z}$$

Η ροπή δύναμης του συστήματος είναι:

$$\vec{\tau}_o=\frac{d\vec{L}_o}{dt}=m(-22t+118)\hat{z}$$

δ) Το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας είναι:

$$\vec{r}_c=\frac{m\vec{r}_1+m\vec{r}_2}{m+m}=\frac{m[(2t+20)\hat{x}+(1-3t)\hat{y}]}{2m}\Rightarrow\vec{r}_c=(t+10)\hat{x}+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t\right)\hat{y}\quad\textbf{(1)}$$

Ενώ η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:

$$\vec{\upsilon}_c=\frac{d\vec{r}_c}{dt}=\hat{x}-\frac{3}{2}\hat{y}\qquad\textbf{(2)}$$

ε) Σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_1',\vec{r}_2'$ και οι ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1',\vec{\upsilon}_2'$ των σωματιδίων ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας είναι:

$$\vec{r}_1'=\vec{r}_1-\vec{r}_c\overset{(1)}{\Rightarrow}\vec{r}_1'=(t^2+2t-15)\hat{x}+\left(\frac{1}{2}-2t^2+\frac{3}{2}t\right)\hat{y}$$

$$\vec{r}_2'=\vec{r}_2-\vec{r}_c\overset{(1)}{\Rightarrow}\vec{r}_2'=(15-2t-t^2)\hat{x}+\left(2t^2-\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\right)\hat{y}$$

$$\vec{\upsilon}_1'=\vec{\upsilon}_1-\vec{\upsilon}_c\overset{(2)}{\Rightarrow}\vec{\upsilon}_1'=(2t+2)\hat{x}+\left(-4t+\frac{3}{2}\right)\hat{y}$$

$$\vec{\upsilon}_2'=\vec{\upsilon}_2-\vec{\upsilon}_c\overset{(2)}{\Rightarrow}\vec{\upsilon}_2'=(-2-2t)\hat{x}+\left(4t-\frac{3}{2}\right)\hat{y}$$

Άρα η στροφορμή του συστήματος ως προς το κέντρο μάζας είναι:

$$\vec{L}_c = m\vec{r}_1' \times \vec{\upsilon}_1' + m\vec{r}_2' \times \vec{\upsilon}_2' =$$

$$= m\left[(t^2+2t-15)\hat{x} + \left(\frac{1}{2} - 2t^2 + \frac{3}{2}t\right)\hat{y}\right] \times \left[(2t+2)\hat{x} + \left(-4t + \frac{3}{2}\right)\hat{y}\right] +$$

$$+ m\left[(15-2t-t^2)\hat{x} + \left(2t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\right)\hat{y}\right] \times \left[(-2-2t)\hat{x} + \left(4t - \frac{3}{2}\right)\hat{y}\right] =$$

$$= \left[m(t^2+2t-15)\left(-4t+\frac{3}{2}\right)\hat{x}\times\hat{y} + \left(\frac{1}{2} - 2t^2 + \frac{3}{2}t\right)(2t+2)\hat{y}\times\hat{x} +\right.$$

$$\left. + (15-2t-t^2)\left(4t-\frac{3}{2}\right)\hat{x}\times\hat{y} + \left(2t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\right)(-2-2t)\hat{y}\times\hat{x}\right] =$$

$$= m\left[\left(-4t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 8t^2 + 3t + 60t - \frac{45}{2}\right)\hat{z} + (t+1-4t^3-4t^2+3t^2+3t)(-\hat{z}) +\right.$$

$$\left. + \left(60t - \frac{45}{2} - 8t^2 + 3t - 4t^3 + \frac{3}{2}t^2\right)\hat{z} + (-4t^2 - 4t^3 + 3t + 3t^2 + 1 + t)(-\hat{z})\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{L}_c = m(-11t^2 + 118t - 47)\hat{z}$$

Κι επομένως η ροπή δύναμης ως προς το κέντρο μάζας είναι:

$$\vec{\tau}_c = \frac{d\vec{L}_c}{dt} = m(-22t + 118)\hat{z}$$

Θέμα 6

Κατά την κρούση δύο σωματιδίων οι μάζες τους διατηρούνται σταθερές. Αν η κρούση είναι ελαστική σ' ένα σύστημα συντεταγμένων S καθώς και σε όλα τα συστήματα που συνδέονται με το S με μετασχηματισμούς Γαλιλαίου, να δείξετε ότι η ορμή στο S διατηρείται.

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

Έστω υ_1, υ_2 οι αρχικές ταχύτητες των σωματιδίων (πριν την κρούση) και u_1, u_2 οι τελικές ταχύτητες (μετά την κρούση). Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \quad \textbf{(1)}$$

όπου m_1, m_2 οι μάζες των σωματιδίων, οι οποίες παραμένουν αμετάβλητες κατά την κρούση.
Οι ταχύτητες των σωματιδίων (πριν και μετά την κρούση) ως προς ένα σύστημα S', που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς το αδρανειακό σύστημα S, σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Γαλιλαίου είναι:

$$\vec{\upsilon}_1' = \vec{\upsilon}_1 - \vec{v},\ \ \vec{\upsilon}_2' = \vec{\upsilon}_2 - \vec{v},\ \ \vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{v},\ \ \vec{u}_2' = \vec{u}_2 - \vec{v} \quad \textbf{(2)}$$

Η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας στο σύστημα S' δίνει:

$$K'_{\alpha\rho\chi} = K'_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 = \frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1(\vec{\upsilon}_1 - \vec{v})^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{\upsilon}_2 - \vec{v})^2 = \frac{1}{2}m_1(\vec{u}_1 - \vec{v})^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{u}_2 - \vec{v})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1(\upsilon_1^2 - 2\vec{\upsilon}_1\cdot\vec{v} + v^2) + \frac{1}{2}m_2(\upsilon_2^2 - 2\vec{\upsilon}_2\cdot\vec{v} + v^2) =$$

$$= \frac{1}{2}m_1(u_1^2 - 2\vec{u}_1\cdot\vec{v} + v^2) + \frac{1}{2}m_2(u_2^2 - 2\vec{u}_2\cdot\vec{v} + v^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m_1(\upsilon_1^2 - 2\vec{\upsilon}_1\cdot\vec{v}) + \frac{1}{2}m_2(\upsilon_2^2 - 2\vec{\upsilon}_2\cdot\vec{v}) =$$

$$= \frac{1}{2}m_1(u_1^2 - 2\vec{u}_1\cdot\vec{v}) + \frac{1}{2}m_2(u_2^2 - 2\vec{u}_2\cdot\vec{v}) \quad \textbf{(3)}$$

Λόγω της αναλλοιώτητας της αρχής διατήρησης της κινητικής ενέργειας, θα πρέπει αυτή να ισχύει ισοδύναμα σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς κι επομένως οι εκφράσεις **(1)** και **(3)** θα πρέπει να είναι ταυτόσημες. Εύκολα παρατηρείται ότι αυτό συμβαίνει με την προϋπόθεση ότι στην εξίσωση **(3)** τα εσωτερικά γινόμενα στα δύο μέλη είναι ίσα. Δηλαδή όταν:

$$m_1\vec{\upsilon}_1\cdot\vec{v}+m_2\vec{\upsilon}_2\cdot\vec{v}=m_1\vec{u}_1\cdot\vec{v}+m_2\vec{u}_2\cdot\vec{v}\Rightarrow m_1\vec{\upsilon}_1+m_2\vec{\upsilon}_2=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2$$

Άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής στο σύστημα S.