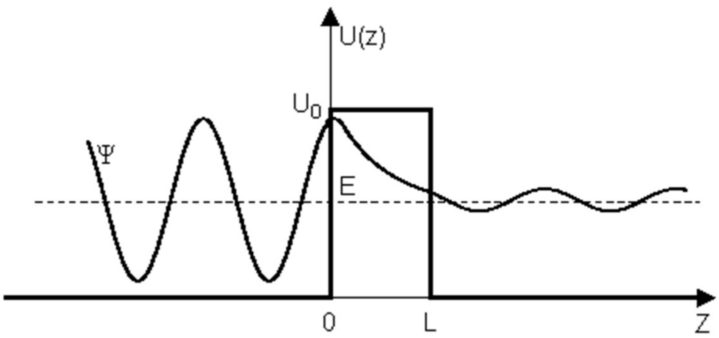
ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΦΡΑΓΜΑ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ & ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΣΗΡΑΓΓΑΣ

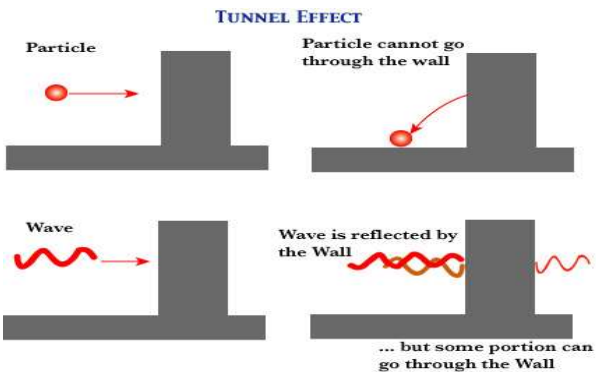


$$V(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ V_0 & 0 \leq z \leq L \\ 0 & z > L \end{cases}$$

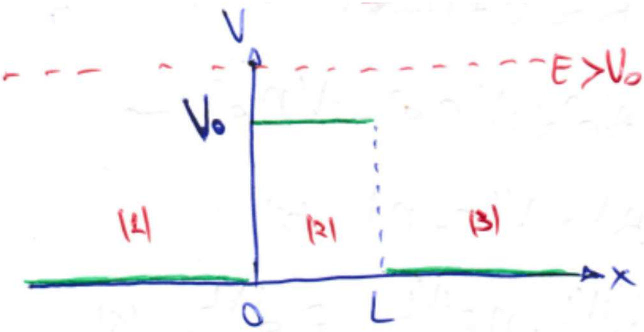
Το ***φράγμα δυναμικού*** αποτελεί την αντίθετη περίπτωση ενός πηγαδιού δυναμικού και σ' αυτή την περίπτωση δεν υπάρχουν δέσμιες καταστάσεις. Σε αυτά τα προβλήματα μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ένα σωματίδιο που προσπίπτει πάνω στο φράγμα να το διαπεράσει ή να ανακλαστεί από αυτό.

Κλασικά ένα σωματίδιο ενέργειας μεγαλύτερης απ΄ το ύψος του φράγματος $E > V_0$ θα το διαπεράσει με πιθανότητα μονάδα, ενώ αν $E < V_0$ θα έχει μηδενική πιθανότητα να το διαπεράσει.

Στην Κβαντομηχανική όμως σωματίδιο με ενέργεια $E > V_0$ έχει και κάποια πιθανότητα να ανακλαστεί, ενώ αν $E < V_0$ έχει κάποια πιθανότητα να διέλθει μέσω του φράγματος. Αυτή η διέλευση σωματιδίων μέσω φραγμάτων δυναμικού λέγεται **φαινόμενο σήραγγας** (tunneling effect).



Αναλυτικός προσδιορισμός των συντελεστών ανάκλασης & διέλευσης



$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{για } x<0 \\ V_0, & \text{για } 0 \le x \le L \\ 0, & \text{για } x>L. \end{cases}$$

A) Αν $E > V_0$:

Περιοχή 1: Για $x<0$ είναι $V(x)=0$ οπότε:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-\cancel{V(x)}^{\,0})\psi_1 = 0 \rightarrow \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2>0}\psi_1 = 0$$

Γεν. λύση: $\psi_1(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$ (1)

Περιοχή 2: Για $0 \le x \le L$ είναι $V(x) = V_0$ οπότε:

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))\psi_2 = 0 \rightarrow \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}_{k'^2>0}\psi_2 = 0$$

$k'^2 > 0$ (γιατί $E > V_0 \rightarrow E - V_0 > 0$)

Γεν. λύση: $\psi_2(x) = C e^{ik'x} + D e^{-ik'x}$ (2)

Περιοχή 3: Για $x > L$ είναι $V(x) = 0$ οπότε:

$$\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - \cancel{V(x)}^{\,0})\psi_3 = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k^2>0}\psi_3 = 0$$

Γεν. λύση: $\psi_3(x) = Fe^{ikx} + Ge^{-ikx}$

Επειδή δεν υπάρχει αίτιο ανάκλασης στην περιοχή αυτή είναι $G = 0$.

Οπότε: $\psi_3(x) = Fe^{ikx}$ (3)

Οριακές συνθήκες:

Στο $x=0$: $\psi_1(0) = \psi_2(0) \xrightarrow{(1,2)} A + B = C + D \xrightarrow{\times k} k(A+B) = k(C+D)$ (4)

$$\left.\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right|_{x=0} \xrightarrow{(1,2)} \cancel{i}kAe^0 - \cancel{i}kBe^0 = \cancel{i}k'Ce^0 - \cancel{i}k'De^0 \rightarrow$$

$$\rightarrow k(A-B) = k'(C-D) \quad (5)$$

Στο $x=L$: $\psi_2(x=L) = \psi_3(x=L) \xrightarrow{(2,3)} Ce^{ik'L} + De^{-ik'L} = Fe^{ikL}$ (6)

$$\left.\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right|_{x=L} = \left.\frac{\partial \psi_3}{\partial x}\right|_{x=L} \xrightarrow{(2,3)} \cancel{i}k'Ce^{ik'L} - \cancel{i}k'De^{-ik'L} = \cancel{i}kFe^{ikL} \rightarrow$$

$$\rightarrow k'(Ce^{ik'L} - De^{-ik'L}) = kFe^{ikL} \quad (7)$$

$(4)+(5) \rightsquigarrow k(A+\cancel{B}) + k(A-\cancel{B}) = k(C+D) + k'(C-D) \rightarrow$

$$\rightarrow 2kA = (k+k')C + (k-k')D \quad (8)$$

$(4)-(5) \rightsquigarrow k(\cancel{A}+B) - k(\cancel{A}-B) = k(C+D) - k'(C-D) \rightarrow$

$$\rightarrow 2kB = (k-k')C + (k+k')D \quad (9)$$

$$(6)+(7) \rightsquigarrow Ce^{ik'L}+De^{-ik'L}+k'\left(Ce^{ik'L}-De^{-ik'L}\right)=Fe^{ikL}+kFe^{ikL} \to$$

$$\to Ce^{ik'L}(1+k')+De^{-ik'L}(1-k')=Fe^{ikL}(1+k) \quad (10)$$

$$(6)-(7) \rightsquigarrow Ce^{ik'L}+De^{-ik'L}+k'\left(Ce^{ik'L}-De^{-ik'L}\right)=Fe^{ikL}-kFe^{ikL} \to$$

$$\to Ce^{ik'L}(1-k')+De^{-ik'L}(1+k')=Fe^{ikL}(1-k) \quad (11)$$

$$\frac{(10)}{(11)} \rightsquigarrow \frac{Ce^{ik'L}(1+k')+De^{-ik'L}(1-k')}{Ce^{ik'L}(1-k')+De^{-ik'L}(1+k')}=\frac{1+k}{1-k} \to$$

$$\to Ce^{ik'L}(1+k')(1-k)+De^{-ik'L}(1-k')(1-k)=Ce^{ik'L}(1-k')(1+k)+De^{-ik'L}(1+k')(1+k)$$

$$\to Ce^{ik'L}\left[(1+k')(1-k)-(1-k')(1+k)\right]=De^{-ik'L}\left[(1+k')(1+k)-(1-k')(1-k)\right]$$

$$\to Ce^{ik'L}\left[\cancel{1}-k+k'-\cancel{k'k}-\cancel{1}-k+k'+\cancel{k'k}\right]=De^{-ik'L}\left(\cancel{1}+k+k'+\cancel{k'k}-\cancel{1}+k+k'-\cancel{k'k}\right)$$

$$\to Ce^{ik'L}\cancel{2}(k'-k)=De^{-ik'L}\cancel{2}(k'+k) \to$$

$$\to D=\frac{Ce^{ik'L}(k'-k)}{e^{-ik'L}(k'+k)} \to D=Ce^{2ik'L}\frac{(k'-k)}{k'+k} \quad (12)$$

Οπότε:

$$(8) \overset{(12)}{\rightsquigarrow} 2kA = (k+k')C + (k-k')C e^{2ik'L}\frac{(k'-k)}{k'+k} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2kA = \left[k+k' + \frac{(k-k')(k'-k)}{k'+k} e^{2ik'L}\right] C \quad (13)$$

$$(9) \overset{(12)}{\rightsquigarrow} 2kB = (k-k')C + (k+k')C e^{2ik'L}\frac{(k'-k)}{k'+k} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2kB = \left[k-k' + \frac{(k+k')(k'-k)}{k'+k} e^{2ik'L}\right] C \quad (14)$$

Άρα: $\dfrac{(14)}{(13)} \rightsquigarrow \dfrac{B}{A} = \dfrac{k-k' + \dfrac{(k+k')(k'-k)}{k'+k} e^{2ik'L}}{k+k' + \dfrac{(k-k')(k'-k)}{k'+k} e^{2ik'L}} =$

$$= \frac{\dfrac{(k'+k)(k-k') + (k+k')(k'-k) e^{2ik'L}}{\cancel{k'+k}}}{\dfrac{(k'+k)(k+k') + (k-k')(k'-k) e^{2ik'L}}{\cancel{k'+k}}} = \frac{k^2-k'^2 + (k'^2-k^2) e^{2ik'L}}{(k+k')^2 - (k-k')^2 e^{2ik'L}} =$$

$$= \frac{(k^2-k'^2) - (k^2-k'^2)e^{2ik'L}}{(k+k')^2 - (k-k')^2 e^{2ik'L}} = \frac{(k^2-k'^2)(1-e^{+2ik'L})}{(k+k')^2-(k-k')^2 e^{2ik'L}} =$$

$$= \frac{(k^2-k'^2)(1-e^{2ik'L})}{k^2+k'^2+2kk' - (k^2+k'^2-2kk')e^{2ik'L}} = \frac{(k^2-k'^2)(1-e^{2ik'L})}{k^2(1-e^{2ik'L}) + k'^2(1-e^{2ik'L}) + 2kk'(1+e^{2ik'L})} =$$

$$= \frac{(k^2-k'^2)(1-e^{2ik'L})}{2kk'(1+e^{2ik'L})+(k^2+k'^2)(1-e^{2ik'L})} \quad (15)$$

Αλλά: $\cos k'L = \frac{e^{ik'L}+e^{-ik'L}}{2} = \frac{e^{-ik'L}(e^{2ik'L}+1)}{2} \rightarrow 1+e^{2ik'L} = 2\cos k'L\, e^{ik'L}$ (16)

και $\sin k'L = \frac{e^{ik'L}-e^{-ik'L}}{2i} = \frac{e^{-ik'L}(e^{2ik'L}-1)}{2i} \rightarrow e^{2ik'L}-1 = 2i\sin k'L\, e^{ik'L} \rightarrow$

$\rightarrow 1-e^{2ik'L} = -2i\sin k'L\, e^{ik'L}$ (17)

Οπότε:

$$(15) \overset{(16,17)}{\rightsquigarrow} \frac{B}{A} = \frac{(k^2-k'^2)(-\cancel{2}i\sin k'L\,\cancel{e^{ik'L}})}{2kk'\cancel{2}\cos k'L\,\cancel{e^{ik'L}}+(k^2+k'^2)(-\cancel{2}i\sin k'L\,\cancel{e^{ik'L}})} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{B}{A} = \frac{i(k'^2-k^2)\sin k'L}{2kk'\cos k'L - i(k^2+k'^2)\sin k'L} \quad (18)$$

Μέτρο μιγαδικού:
Αν $z = i\beta \rightarrow |z| = \beta^2$
Αν $z = \alpha + i\beta \rightarrow |z| = \alpha^2+\beta^2$

Άρα:

$$R = \frac{J_R}{J_I} = \frac{\frac{\cancel{\hbar k}}{\cancel{m}}|B|^2}{\frac{\cancel{\hbar k}}{\cancel{m}}|A|^2} = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(k'^2-k^2)^2\sin^2 k'L}{4k^2k'^2\cos^2 k'L+(k^2+k'^2)^2\sin^2 k'L} =$$

$$= \frac{(k'^2-k^2)^2\sin^2 k'L}{4k^2k'^2(1-\sin^2 k'L)+(k^4+k'^4+2k^2k'^2)\sin^2 k'L} = \frac{(k'^2-k^2)^2\sin^2 k'L}{4k^2k'^2+(k^4+k'^4+2k^2k'^2-4k^2k'^2)\sin^2 k'L}$$

$$= \frac{(k'^2-k^2)^2\sin^2 k'L}{4k^2k'^2+(k^4+k'^4-2k^2k'^2)\sin^2 k'L} \rightarrow R = \frac{(k'^2-k^2)^2\sin^2 k'L}{4k^2k'^2+(k'^2-k^2)^2\sin^2 k'L} \quad (19)$$

Επομένως ο συντελεστής διέλευσης είναι:

$$R+T=1 \rightarrow T=1-R \overset{(19)}{=} 1-\frac{(k'^2-k^2)^2\sin^2 k'L}{4k^2k'^2+(k'^2-k^2)^2\sin^2 k'L} =$$

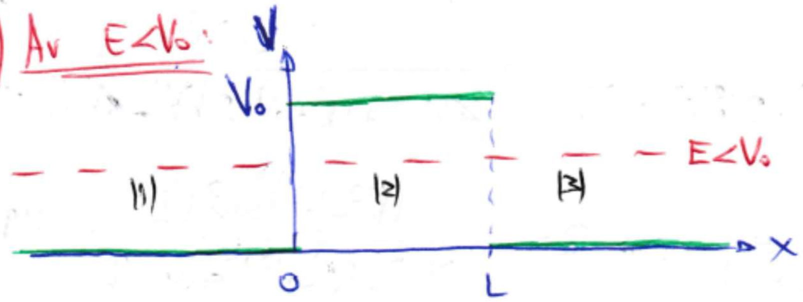
$$=\frac{4k^2k'^2}{4k^2k'^2+(k'^2-k^2)^2\sin^2 k'L} = \frac{1}{1+\frac{(k'^2-k^2)^2}{4k^2k'^2}\sin^2 k'L} \rightarrow$$

$$\rightarrow T=\left[1+\frac{(k'^2-k^2)^2}{4k^2k'^2}\sin^2 k'L\right]^{-1} = \left[1+\frac{\left(\frac{2m}{\hbar^2}(\cancel{E}-V_0)-\frac{2m}{\hbar^2}\cancel{E}\right)^2}{4\cdot\frac{2m}{\hbar^2}E\cdot\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}\sin^2\left(\sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}\cdot L\right)\right]^{-1} =$$

$$=\left[1+\frac{\frac{\cancel{4m^2}}{\cancel{\hbar^4}}V_0^2}{4\cdot\frac{\cancel{4m^2}}{\cancel{\hbar^4}}E(E-V_0)}\sin^2\left(\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}\cdot L\right)\right]^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{T=\left[1+\frac{V_0^2}{4E(E-V_0)}\sin^2\left(\underbrace{\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}}_{k'}\cdot L\right)\right]^{-1}}$$

Β) Αν $E<V_0$:



Στην περίπτωση αυτή η λύση της εξίσ. Schrödinger στην περιοχή 2 μεταβάλλεται ενώ στις περιοχές (1), (3) είναι ακριβώς ίδιες.

Περιοχή 2: Για $0 \le x \le L$ είναι $V(x) = V_0$ και $E<V_0$ οπότε:

$k'^2<0$ (γιατί $E<V_0 \to E-V_0<0$)

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-V(x))\psi_2 = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \left(\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)\right)\psi_2 = 0$$

Επειδή $k'^2<0$ θεωρούμε ως $k' = i\gamma \to k'^2 = (i\gamma)^2 = i^2\gamma^2 = -\gamma^2$, οπότε αντικαθιστούμε όπου $k' \to i\gamma$ στα αποτελέσματα της περίπτωσης (Α).

Είναι: $$\sin k'L = \frac{e^{ik'L} - e^{-ik'L}}{2i} \xrightarrow{(k' \to i\gamma)} \frac{e^{i^2\gamma L} - e^{-i^2\gamma L}}{2i} = \frac{e^{-\gamma L} - e^{\gamma L}}{2i} =$$

$$= i\,\frac{e^{-\gamma L} - e^{\gamma L}}{2i^2} = i\,\frac{e^{\gamma L} - e^{-\gamma L}}{2} \longrightarrow \underline{\sin k'L = i \sinh \gamma L}.$$

Άρα τώρα: $$T = \left[1 + \frac{V_0^2}{4E(E-V_0)}\,\overset{-1}{i^2}\sinh^2(\gamma L)\right]^{-1} \longrightarrow$$

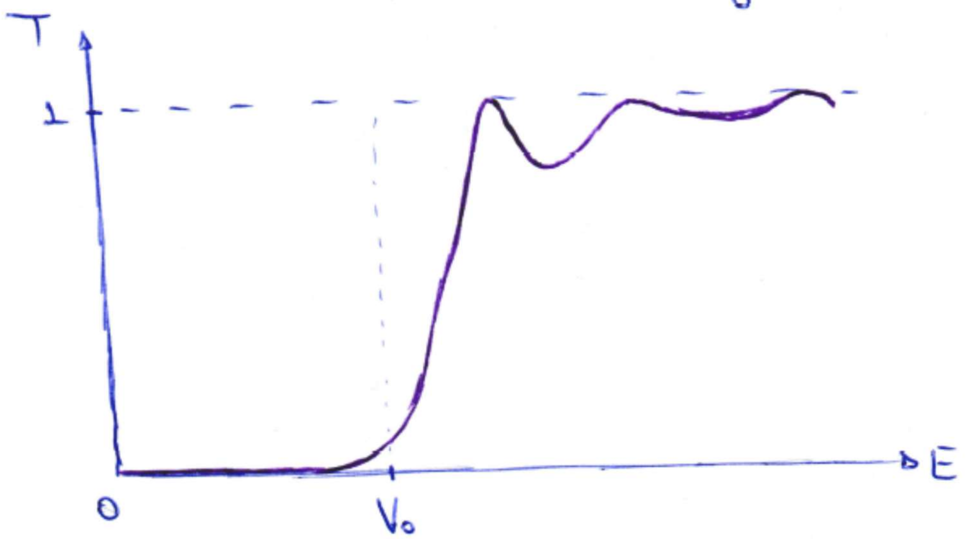
$$\longrightarrow \boxed{T = \left[1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\sinh^2(\gamma L)\right]^{-1} = \left[1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}\,L\right)\right]^{-1}}$$

Αυτή η πιθανότητα διέλευσης σωματιδίου με ενέργεια $E<V_0$ από φράγμα δυναμικού V_0 λέγεται <u>φαινόμενο σήραγγας (tunneling effect)</u>.

Για ευρέα φράγματα, όπου $\gamma L >> 1$ ο συντελεστής διέλευσης προσεγγίζεται ως:

$$\boxed{T \simeq 16\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)e^{-2\gamma L}}$$

Στο ακόλουθο σχήμα παριστάνεται η γραφική παράσταση του συντελεστή διέλευσης T συναρτήσει της ενέργειας του σωματιδίου E.



Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ☎6932 946778
www.pmoiras.weebly.com