ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΟΔΕΥΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ - ΚΥΜΑΤΟΜΑΔΕΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $y(x,t) = 5e^{(4x+8t)^2}$, όπου x η θέση και t ο χρόνος. Να εξεταστεί αν η έκφραση αυτή αποτελεί κύμα και αν ναι, να βρεθεί η διεύθυνση διάδοσης και η φασική του ταχύτητα.

Λύση

Η δοθείσα συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως:

$$y(x,t) = 5e^{(4x+8t)^2} \Rightarrow y(x,t) = 5e^{16(x+2t)^2}$$

Δηλαδή είναι συνάρτηση της μορφής f(x+υt), όπου υ=2.

Άρα επειδή η y(x,t) είναι μια εκθετική συνάρτηση του (x+2t), αποτελεί την κυματοσυνάρτηση ενός κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά (αρνητικά x) με ταχύτητα διάδοσης (φασική ταχύτητα) υ=2m/sec.

Σημείωση: Αν η συνάρτηση ήταν της μορφής f(x-υt) τότε το κύμα θα διαδιδόταν προς τα δεξιά (θετικά x).
Επίσης εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η δοθείσα συνάρτηση ικανοποιεί την κλασική κυματική εξίσωση. Δηλαδή υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους $\partial^2 y/\partial t^2$, $\partial^2 y/\partial x^2$ προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Συνεπώς και πάλι φαίνεται ότι η δοθείσα συνάρτηση y(x,t) παριστάνει κύμα που διαδίδεται με ταχύτητα υ=2m/sec.

ΘΕΜΑ 2

Αποδείξτε ότι μπορεί να εκφραστεί η λύση της κυματικής εξίσωσης $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ με την παρακάτω υπέρθεση οδεύοντων κυμάτων:

$$y=f(x-\upsilon t)+g(x+\upsilon t)$$

όπου f και g είναι αυθαίρετες συναρτήσεις και υ η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.

Λύση

Τα δύο οδεύοντα κύματα f(x-υt) και g(x+υt) είναι κύματα αυθαίρετου σχήματος, με το f(x-υt) να οδεύει προς τα θετικά του άξονα x με ταχύτητα υ, ενώ το g(x+υt) να οδεύει προς τα αρνητικά με ταχύτητα υ.

Θέτοντας: $z=x-\upsilon t$ και $w=x+\upsilon t$

η λύση της κυματικής εξίσωσης γράφεται:

$$y=f(z)+g(w) \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα

$$\frac{\partial y}{\partial t} \overset{(1)}{=} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{dg}{dw}\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{df}{dz}(-\upsilon) + \frac{dg}{dw}\upsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = \upsilon\left(\frac{dg}{dw} - \frac{df}{dz}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Και

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \overset{(2)}{=} \upsilon\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dg}{dw}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dz}\right)\right] = \upsilon\left[\frac{d}{dw}\left(\frac{dg}{dw}\right)\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial t}\right] =$$

$$= \upsilon\left[\frac{d^2 g}{dw^2}\upsilon - \frac{d^2 f}{dz^2}(-\upsilon)\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \upsilon^2\left(\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{d^2 g}{dw^2}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Ομοίως προκύπτει ότι: $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{d^2 g}{dw^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Αντικαθιστώντας τις **(3)** και **(4)** στην κυματική εξίσωση προκύπτει ότι $\upsilon^2 = \upsilon^2$, δηλαδή η y=f(x-υt)+g(x+υt) την ικανοποιεί και αποτελεί μια λύση αυτής.

ΘΕΜΑ 3

Χορδή απείρου μήκους έχει αρχικά για t=0 σχήμα $y(x,0)=e^{-x^2}$ και αρχική εγκάρσια ταχύτητα των σημείων της $\partial y(x,0)/\partial t = x^2+2$.
Να προσδιοριστεί η εξίσωση κίνησης της χορδής για κάθε t.

Λύση

Η γενική μορφή της κίνησης της χορδής, δηλαδή η κυματοσυνάρτηση των οδεύοντων κυμάτων που αναπτύσσονται σε αυτή είναι:

$$y(x,t)=f(x-\upsilon t)+g(x+\upsilon t) \qquad \textbf{(1)}$$

Από την αρχική συνθήκη $y(x,0)=e^{-x^2}$ η σχέση **(1)** για t=0 δίνει:

$$f(x)+g(x)=e^{-x^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Ενώ από την αρχική συνθήκη $\partial y(x,0)/\partial t = x^2+2$ η σχέση **(1)** για t=0 δίνει:

$$\left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = x^2+2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \left.\frac{\partial f(x-\upsilon t)}{\partial t}+\frac{\partial g(x+\upsilon t)}{\partial t}\right|_{t=0} =$$

$$= \left.\frac{df}{d(x-\upsilon t)}\frac{\partial(x-\upsilon t)}{\partial t}+\frac{dg}{d(x+\upsilon t)}\frac{\partial(x+\upsilon t)}{\partial t}\right|_{t=0} =$$

$$= \left.\frac{df}{d(x-\upsilon t)}(-\upsilon)+\frac{dg}{d(x+\upsilon t)}\upsilon\right|_{t=0} =$$

$$= \frac{df}{dx}(-\upsilon)+\frac{dg}{dx}\upsilon = x^2+2 \Rightarrow -\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}=\frac{x^2+2}{\upsilon} \qquad \textbf{(3)}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση **(3)** προκύπτει:

$$-\int df+\int dg=\frac{1}{\upsilon}\int (x^2+2)dx \Rightarrow -f(x)+g(x)=\frac{1}{\upsilon}\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)+c \qquad \textbf{(4)}$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης.

Από τις σχέσεις **(2)** και **(4)** προκύπτει ότι:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}-\frac{1}{\upsilon}\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)-c\right] \text{ και } g(x)=\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}+\frac{1}{\upsilon}\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)+c\right]$$

Αντικαθιστώντας τέλος στην έκφραση της f(x) το x με x-υt και στην έκφραση της g(x) το x με x+υt προκύπτει:

$$f(x-\upsilon t)=\frac{1}{2}\left[e^{-(x-\upsilon t)^2}-\frac{1}{\upsilon}\left(\frac{(x-\upsilon t)^3}{3}+2(x-\upsilon t)\right)-c\right]$$

$$g(x+\upsilon t)=\frac{1}{2}\left[e^{-(x+\upsilon t)^2}+\frac{1}{\upsilon}\left(\frac{(x+\upsilon t)^3}{3}+2(x+\upsilon t)\right)+c\right]$$

Άρα η κυματοσυνάρτηση y(x,t) δίνεται από τη σχέση **(1)** που παίρνει τη μορφή:

$$y(x,t)=\frac{1}{2}[e^{-(x-\upsilon t)^2}+e^{-(x+\upsilon t)^2}]+\frac{1}{2\upsilon}\left[\frac{(x+\upsilon t)^3}{3}+2(x+\upsilon t)-\frac{(x-\upsilon t)^3}{3}-2(x-\upsilon t)\right]$$

ΘΕΜΑ 4

Το άκρο μιας ομογενούς χορδής στο σημείο x=0, διεγείρεται αρμονικά με μια συχνότητα ν=10 Hz και με πλάτος 1cm. Η χορδή έχει άπειρο μήκος (ή αλλιώς είναι προσαρμοσμένη στο τέρμα της ώστε να μην υπάρχουν καθόλου ανακλάσεις). Η φασική ταχύτητα είναι 5 m/sec. Περιγράψτε την κίνηση ενός σημείου της χορδής (συναρτήσει του χρόνου), που βρίσκεται σε απόσταση 3,25 m από το διεγειρόμενο άκρο. Ποια είναι η κίνηση ενός δεύτερου σημείου, που βρίσκεται σε απόσταση 3,5 m από το διεγειρόμενο άκρο;

Λύση

Επειδή η χορδή διεγείρεται αρμονικά η απομάκρυνση κάθε σημείου της τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

όπου A=1cm=0,01m το πλάτος, ω η κυκλική συχνότητα και k ο κυματάριθμος.
Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής είναι:

$$\upsilon_{ph} = \lambda\nu \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon_{ph}}{\nu} = \frac{5m/sec}{10Hz} \Rightarrow \lambda = 0{,}5m$$

Οπότε: $$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}5m} \Rightarrow k = 4\pi\ rad/m$$

Και: $$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 10Hz \Rightarrow \omega = 20\pi\ rad/sec$$

Άρα η κίνηση των σημείων x=3,25 m και x=3,5m θα περιγράφονται από τις συναρτήσεις:

$$y(x = 3{,}25m, t) = 0{,}01\sin(20\pi t - 4\pi 3{,}25) = 0{,}01\sin[(20t - 13)\pi] \qquad (m)$$

$$y(x = 3{,}5m, t) = 0{,}01\sin(20\pi t - 4\pi 3{,}5) = 0{,}01\sin[(20t - 14)\pi] \qquad (m)$$

Παρατηρείται ότι επειδή στις σχέσεις y(3,25, t), y(3,5, t) οι γωνίες των ημιτόνων είναι παραπληρωματικές ή αλλιώς επειδή τα δύο σημεία απέχουν μισό μήκος κύματος λ/2=0,25m, τότε όταν το ένα σημείο παρουσιάζει κοιλία τότε και το άλλο σημείο θα παρουσιάζει κοιλία αντίστοιχα, ενώ όταν το ένα σημείο παρουσιάζει δεσμό και το άλλο σημείο θα παρουσιάζει δεσμό.

ΘΕΜΑ 5

α) Αν μια χορδή πιάνου έχει μήκος 1m και συχνότητα 440 Hz για το χαμηλότερό της τρόπο υπολογίστε τη φασική ταχύτητά της.
β) Αν η χορδή έχει διάμετρο 1mm και είναι κατασκευασμένη από ατσάλι με πυκνότητα $7{,}9\text{gr}/\text{cm}^3$ υπολογίστε την τάση της χορδής σε Nt και σε kp.

Λύση

α) Η φασική ταχύτητα έχει εισαχθεί για την περιγραφή των οδεύοντων κυμάτων και ικανοποιεί τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής $\upsilon_{ph} = \lambda\nu$.

Στη δοθείσα χορδή πιάνου, που έχει πεπερασμένο μήκος και σταθερά άκρα δημιουργούνται στάσιμα κύματα και επομένως λαμβάνοντας τη σημασία των λ και ν στα στάσιμα κύματα μπορεί να υπολογιστεί η φασική ταχύτητα μελετώντας στάσιμα κύματα αντί για οδεύοντα.
Η συνθήκη για τη δημιουργία στάσιμων κυμάτων σε μια χορδή είναι:

$$\lambda = \frac{2\ell}{n}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Άρα για το χαμηλότερο τρόπο, δηλαδή για n=1 είναι $\lambda = 2\ell = 2\text{m}$.
Επομένως η φασική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_{ph} = \lambda\nu = 2\text{m}\cdot 440\text{Hz} \Rightarrow \upsilon_{ph} = 880\text{m}/\text{sec} \qquad \textbf{(1)}$$

β) Είναι γνωστό ότι η φασική ταχύτητα χορδής δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_{ph} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \Rightarrow \upsilon_{ph}^2 = \frac{T}{\rho} \Rightarrow T = \rho\upsilon_{ph}^2 \qquad \textbf{(2)}$$

όπου ρ η γραμμική πυκνότητα μάζας της χορδής, η οποία συνδέεται με τη δοθείσα χωρική πυκνότητα μάζας ρ' μέσω της σχέσης:

$\rho = \rho' A$, όπου Α το εμβαδόν διατομής της χορδής το οποίο είναι:

$A = \pi\dfrac{d^2}{4}$, όπου d η διάμετρος της χορδής.

Δηλαδή είναι: $\rho = \rho'\pi\dfrac{d^2}{4}$ και επομένως η **(2)** δίνει:

$$T = \rho' \pi \frac{d^2}{4} \upsilon_{ph}^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} T = 7{,}9 \cdot \frac{10^{-3}\,kg}{10^{-6}\,m^3} \frac{\pi \cdot 10^{-4}}{4} m^2 880^2 \frac{m^2}{sec^2} \Rightarrow T = 480244 Nt$$

Επειδή είναι 1kp=9,8Nt η μετατροπή μονάδων της τάσης δίνει:

$$T = \frac{480244}{9{,}8} kp \Rightarrow T = 49004 kp$$

ΘΕΜΑ 6

Αποδείξτε ότι ένα στάσιμο κύμα είναι επαλληλία δύο οδεύοντων κυμάτων και αντιστρόφως, δηλαδή ένα οδεύον κύμα είναι επαλληλία δύο στάσιμων κυμάτων.

Λύση

Η γενική κυματοσυνάρτηση ενός οδεύοντος κύματος είναι :

$$y(x,t) = A\cos(\omega t \pm kx) \qquad \textbf{(1)}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα :

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin b$$

η σχέση **(1)** γράφεται: $y(x,t) = A\cos\omega t\cos kx \mp A\sin\omega t\sin kx \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(x,t) = A\cos kx\cos\omega t \mp A\cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Δηλαδή το οδεύον κύμα είναι επαλληλία των στάσιμων κυμάτων Acoskxcosωt και $A\cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Αντίστροφα η κυματοσυνάρτηση ενός στάσιμου κύματος είναι:

$$y(x,t) = A\cos kx\cos\omega t \qquad \textbf{(2)}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα :

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

η σχέση **(2)** γράφεται: $y(x,t) = \frac{A}{2}\left[\cos(kx+\omega t) + \cos(kx - \omega t)\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(x,t) = \frac{A}{2}\cos(\omega t + kx) + \frac{A}{2}\cos(kx - \omega t)$$

Δηλαδή το στάσιμο κύμα είναι επαλληλία των οδεύοντων κυμάτων $\frac{A}{2}\cos(\omega t + kx)$ και $\frac{A}{2}\cos(kx - \omega t)$.

ΘΕΜΑ 7

Δείξτε ότι το άθροισμα δύο οδεύοντων αρμονικών κυμάτων $A_1\cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ και $A_2\cos(\omega t - kx + \varphi_2)$, που διαδίδονται κατά την κατεύθυνση του θετικού άξονα των x και έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα ω είναι οδεύον αρμονικό κύμα της ίδιας μορφής. Δηλαδή το άθροισμα μπορεί να γραφεί με τη μορφή $A\cos(\omega t - kx + \varphi)$.
Βρείτε τις σχέσεις που συνδέουν τα A, φ και τα A_1, A_2, φ_1 και φ_2.

Λύση

Για απλούστευση των πράξεων τα δύο οδεύοντα κύματα σε μιγαδική εκθετική μορφή γράφονται ως:

$$y_1(x,t) = A_1\cos(\omega t - kx + \varphi_1) = A_1 e^{i(\omega t - kx + \varphi_1)}$$

$$y_2(x,t) = A_2\cos(\omega t - kx + \varphi_2) = A_2 e^{i(\omega t - kx + \varphi_2)}$$

Επομένως το άθροισμα των δύο αυτών κυμάτων είναι:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A_1 e^{i(\omega t - kx + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t - kx + \varphi_2)} =$$

$$= A_1 e^{i\varphi_1} e^{i(\omega t - kx)} + A_2 e^{i\varphi_2} e^{i(\omega t - kx)} = (A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}) e^{i(\omega t - kx)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x,t) = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos(\omega t - kx) \qquad \textbf{(1)}$$

Δηλαδή παρατηρείται ότι το άθροισμα έχει τη μορφή $A\cos(\omega t - kx + \varphi)$, όπου σύμφωνα με την **(1)** φαίνεται ότι $A = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2$ και φ=0.

ΘΕΜΑ 8

Η σχέση διασποράς για μια χορδή πιάνου δίνεται από την έκφραση:
$\omega^2 = \upsilon_o^2 k^2 (1+\alpha k^2)$, όπου υ_o σταθερά, k ο κυματάριθμος και α μια μικρή θετική σταθερά. Υπολογίστε τη φασική και ομαδική ταχύτητα ως συνάρτηση του k και δείξτε ότι $\upsilon_g > \upsilon_{ph}$ για κάθε k.

Λύση

Η φασική ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\upsilon_o k\sqrt{1+\alpha k^2}}{k} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \upsilon_o\sqrt{1+\alpha k^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ η ομαδική ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(\upsilon_o k\sqrt{1+\alpha k^2}) = \upsilon_o\sqrt{1+\alpha k^2} + \frac{\upsilon_o k 2\alpha k}{2\sqrt{1+\alpha k^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_g = \upsilon_o\sqrt{1+\alpha k^2} + \frac{\upsilon_o \alpha k^2}{\sqrt{1+\alpha k^2}} \qquad \textbf{(2)}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** εύκολα προκύπτει ότι:

$$\upsilon_g = \upsilon_{ph} + \frac{\upsilon_o \alpha k^2}{\sqrt{1+\alpha k^2}}$$

Δηλαδή είναι $\upsilon_g > \upsilon_{ph}$ για κάθε k.

ΘΕΜΑ 9

Η σχέση διασποράς που συνδέει τη συχνότητα ω και το κυματάνυσμα k ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο δίνεται από τη σχέση $\omega^2 = \omega_o^2 + \alpha k^2$, όπου ω_o και α σταθερές ποσότητες. Δείξτε ότι το γινόμενο της φασικής και της ομαδικής ταχύτητας είναι σταθερό και υπολογίστε το.

Λύση

Η φασική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \frac{\sqrt{\omega_o^2 + \alpha k^2}}{k}$$

Και η ομαδική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}\left(\sqrt{\omega_o^2 + \alpha k^2}\right) = \frac{2\alpha k}{2\sqrt{\omega_o^2 + \alpha k^2}} \Rightarrow \upsilon_g = \frac{\alpha k}{\sqrt{\omega_o^2 + \alpha k^2}}$$

Άρα το γινόμενο των παραπάνω ταχυτήτων είναι:

$$\upsilon_{ph} \cdot \upsilon_g = \frac{\sqrt{\omega_o^2 + \alpha k^2}}{k} \cdot \frac{\alpha k}{\sqrt{\omega_o^2 + \alpha k^2}} \Rightarrow \upsilon_{ph} \cdot \upsilon_g = \alpha = \sigma\tau\alpha\theta.$$

ΘΕΜΑ 10

Η σχέση διασποράς σε κάποιο υλικό δίνεται από τη σχέση :
$\omega = \omega_o(5 + 6\alpha^2k^2 - \alpha^4k^4)$, όπου ω_o και α θετικές σταθερές.
Να υπολογιστεί η φασική, η ομαδική ταχύτητα καθώς και η μεταξύ τους σχέση. Για ποια τιμή του ω η ομαδική ταχύτητα γίνεται μέγιστη;

Λύση

Η φασική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \frac{\omega_o}{k}(5 + 6\alpha^2k^2 - \alpha^4k^4) \qquad \textbf{(1)}$$

Ενώ η ομαδική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}[\omega_o(5 + 6\alpha^2k^2 - \alpha^4k^4)] = \omega_o(12\alpha^2k - 4\alpha^4k^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_g = 4\omega_o(3\alpha^2k - \alpha^4k^3) \qquad \textbf{(2)}$$

Επειδή είναι $\omega = k\upsilon_{ph}$ η σχέση που συνδέει τις υ_{ph} και υ_g προκύπτει ως εξής:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(k\upsilon_{ph}) = \upsilon_{ph} + k\frac{d\upsilon_{ph}}{dk}$$

Η ομαδική ταχύτητα γίνεται μέγιστη, στην τιμή του k για την οποία η συνάρτηση **(2)** $\upsilon_g(k)$ παρουσιάζει μέγιστο, δηλαδή όταν:

$$\frac{d\upsilon_g}{dk} = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} 4\omega_o(3\alpha^2 - 3\alpha^4k^2) = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 - 3\alpha^4k^2 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{\alpha^2} \Rightarrow k = \frac{1}{\alpha}$$

Η δεύτερη παράγωγος της υ_g είναι:

$\dfrac{d^2\upsilon_g}{dk^2} = -24\omega_o\alpha^4k$ και στο σημείο ακρότατου k=1/α γίνεται:

$$\left.\frac{d^2\upsilon_g}{dk^2}\right|_{k=1/\alpha} = -24\omega_o\alpha^3 < 0$$ δηλαδή στο k=1/α παρουσιάζει μέγιστο.

Άρα:

$$\upsilon_{g\max} = \upsilon_g(k=1/\alpha) \overset{(2)}{\Rightarrow} 4\omega_o\left(3\alpha^2\frac{1}{\alpha} - \alpha^4\frac{1}{\alpha^3}\right) = 4\omega_o(3\alpha - \alpha) \Rightarrow \upsilon_{g\max} = 8\omega_o\alpha$$

και η αντίστοιχη τιμή της κυκλικής συχνότητας ω για k=1/α είναι:

$$\omega = \omega_o\left(5 + 6\alpha^2\frac{1}{\alpha^2} - \alpha^4\frac{1}{\alpha^4}\right) \Rightarrow \omega = 10\omega_o$$

ΘΕΜΑ 11

α) Να αποδειχθεί ότι η σχέση που συνδέει την ομαδική ταχύτητα με τη φασική ταχύτητα και το μήκος κύματος είναι:

$$\upsilon_g = \upsilon_{ph} - \lambda \frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda}$$

β) Αν για κάποιο μέσο ισχύει η σχέση: $\upsilon_{ph}^2 = \frac{g}{2\pi}\lambda + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}$, όπου g, σ, ρ σταθερές, να προσδιοριστεί το μήκος κύματος ώστε να μην υπάρχει διασπορά.

Λύση

α) Από τον ορισμό της ομαδικής ταχύτητας και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης προκύπτει:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \Rightarrow \upsilon_g = \frac{d\omega}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά από τον ορισμό της φασικής ταχύτητας είναι: $\upsilon_{ph} = \omega / k \Rightarrow \omega = k\upsilon_{ph}$ κι επειδή k=2π/λ προκύπτει:

$$\omega = \frac{2\pi\upsilon_{ph}}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\omega}{d\lambda} = 2\pi \frac{\frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda}\lambda - \upsilon_{ph}}{\lambda^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Και επειδή: $\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{2\pi}{4\pi^2/\lambda^2} \Rightarrow \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}$ **(3)**

Συνεπώς αντικαθιστώντας τις **(2)**, **(3)** στην **(1)** προκύπτει:

$$\upsilon_g = \frac{2\pi}{\lambda^2}\left(\frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda}\lambda - \upsilon_{ph}\right)\cdot\left(-\frac{\lambda^2}{2\pi}\right) \Rightarrow \boxed{\upsilon_g = \upsilon_{ph} - \lambda\frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda}}$$

β) Για να μην υπάρχει διασπορά, δηλαδή για να είναι κάποιο μέσο μη διασκορπιστικό θα πρέπει $\upsilon_g = \upsilon_{ph}$, δηλαδή η υ_{ph} να είναι σταθερή, οπότε θα είναι και $d\upsilon_{ph}/d\lambda = 0$.

Στο δοσμένο μέσο είναι: $\upsilon_{ph} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}$ **(4)**

Επομένως είναι:

$$\frac{d\upsilon_{ph}}{d\lambda}=0\overset{(4)}{\Rightarrow}\frac{\frac{g}{2\pi}-\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda^2}}{2\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}+2\frac{\pi\sigma}{\rho\lambda}}}=0\Rightarrow\frac{g}{2\pi}-\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda^2}=0\Rightarrow\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda^2}=\frac{g}{2\pi}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda^2=\frac{4\pi^2\sigma}{\rho g}\Rightarrow\lambda=2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$$

ΘΕΜΑ 12

Η φασική ταχύτητα των κυμάτων σε κάποιο μέσο δίνεται από τη σχέση:
$\upsilon_{ph} = \alpha \frac{\sin(kb)}{kb}$, όπου α, b σταθερές και k ο κυματάριθμος.
α) Να υπολογιστεί η ομαδική ταχύτητα.
β) Να προσδιοριστεί η οριακή τιμή της ομαδικής ταχύτητας στα μεγάλα μήκη κύματος.

Λύση

α) Από τον ορισμό της φασικής ταχύτητας προκύπτει η σχέση διασποράς ως:

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \alpha \frac{\sin(kb)}{kb} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = \frac{\alpha}{b}\sin(kb) \qquad \textbf{(1)}$$

Επομένως η ομαδική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \overset{(1)}{=} \frac{\alpha}{b} b\cos(kb) \Rightarrow \upsilon_g = \alpha\cos(kb) \qquad \textbf{(2)}$$

β) Επειδή είναι k=2π/λ η υ_g όπως δίνεται από την **(2)** γράφεται συναρτήσει του μήκους κύματος λ ως:

$$\upsilon_g = \alpha\cos\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα για μεγάλα μήκη κύματος, δηλαδή για $\lambda \to \infty$, ο λόγος $2\pi b/\lambda \to 0$ κι επομένως το $\cos\left(\frac{2\pi b}{\lambda}\right) \to 1$, οπότε η $\upsilon_g \to \alpha$.

Δηλαδή η ζητούμενη οριακή ταχύτητα της υ_g είναι το α.

ΘΕΜΑ 13

Η σχέση διασποράς για τη διάδοση διαμήκων κυμάτων μέσα σε μια χαλύβδινη κατασκευή έχει τη μορφή $\omega = \upsilon_o k + \alpha k^2$, όπου $\upsilon_o = 400\text{m/sec}$ και α κάποια πολύ μικρή σταθερά ($\alpha k << \upsilon_o$).

α) Βρείτε τη φασική ταχύτητα των διαμήκων κυμάτων που διαδίδονται μέσα στην κατασκευή και εκφράστε τον κυματάριθμο συναρτήσει της συχνότητάς τους.
β) Εκφράστε τη φασική ταχύτητα και την ομαδική ταχύτητα των παραπάνω κυμάτων συναρτήσει της συχνότητάς τους.
γ) Αν η ομαδική ταχύτητα είναι 3% μεγαλύτερη από τη φασική ταχύτητα για συχνότητα ν=20000 Hz, προσδιορίστε τη σταθερά α.

Λύση

α) Η φασική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\upsilon_o k + \alpha k^2}{k} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \upsilon_o + \alpha k \qquad \textbf{(1)}$$

Από τη σχέση διασποράς προκύπτει:

$$\omega = \upsilon_o k + \alpha k^2 \Rightarrow \alpha k^2 + \upsilon_o k - \omega = 0$$

Οπότε η λύση της παραπάνω δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:

$$k = \frac{-\upsilon_o + \sqrt{\upsilon_o^2 + 4\alpha\omega}}{2\alpha}$$ (Η αρνητική λύση του k απορρίπτεται γιατί πρέπει πάντα k>0).

Αν το ω δεν είναι πολύ μεγάλο τότε ισχύει η προσέγγιση:

$$\sqrt{\upsilon_o^2 + 4\alpha\omega} = \upsilon_o\sqrt{1 + \frac{4\alpha\omega}{\upsilon_o^2}} = \upsilon_o\left(1 + \frac{4\alpha\omega}{\upsilon_o^2}\right)^{1/2} = \upsilon_o\left(1 + \frac{1}{2}\frac{4\alpha\omega}{\upsilon_o^2}\right) =$$

$$= \upsilon_o + \frac{2\alpha\upsilon_o\omega}{\upsilon_o^2} = \upsilon_o + \frac{2\alpha\omega}{\upsilon_o}$$

Οπότε: $$k = \frac{-\upsilon_o + \upsilon_o + 2\alpha\omega/\upsilon_o}{2\alpha} \Rightarrow k = \frac{\omega}{\upsilon_o} = \frac{2\pi\nu}{\upsilon_o} \qquad \textbf{(2)}$$

β) Η σχέση **(1)** λόγω της **(2)** δίνει τη φασική ταχύτητα συναρτήσει της συχνότητας:

$$\upsilon_{ph} = \upsilon_o + \frac{2\pi\nu\alpha}{\upsilon_o} \qquad \textbf{(3)}$$

Η ομαδική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \upsilon_o + 2\alpha k \overset{(2)}{\Rightarrow} \upsilon_g = \upsilon_o + \frac{4\pi\nu\alpha}{\upsilon_o} \qquad \textbf{(4)}$$

γ) Αν η υ_g είναι 3% μεγαλύτερη από τη υ_{ph} για ν=20000 Hz θα ισχύει:

$$\upsilon_g = \upsilon_{ph} + \frac{3}{100}\upsilon_{ph} \Rightarrow \upsilon_g = 1{,}03\upsilon_{ph} \overset{(3),(4)}{\Rightarrow} \upsilon_o + \frac{4\pi\nu\alpha}{\upsilon_o} = 1{,}03\left(\upsilon_o + \frac{2\pi\nu\alpha}{\upsilon_o}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1{,}94\pi\nu\alpha}{\upsilon_o} = 0{,}03\upsilon_o \Rightarrow \alpha = \frac{0{,}03\upsilon_o^2}{1{,}94\pi\nu} = \frac{3\upsilon_o^2}{194\pi\nu} = \frac{3\cdot 400^2\, m^2/sec^2}{194\cdot 3{,}14\cdot 20000\, sec^{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 0{,}04 \;\; m^2/sec$$

ΘΕΜΑ 14

Δείξτε ότι για ένα σύστημα συζευγμένων εκκρεμών η ομαδική ταχύτητα είναι μηδέν και στην κάτω και στην άνω συχνότητα αποκοπής, δηλαδή στην ελάχιστη και μέγιστη συχνότητα. Να υπολογιστεί η φασική ταχύτητα στις δύο αυτές συχνότητες. Να σχεδιαστεί η σχέση διασποράς, δηλαδή να παρασταθεί γραφικά η εξάρτηση της κυκλικής συχνότητας ω από τον κυματάριθμο k και να δειχθεί πως προκύπτουν η ομαδική και η φασική ταχύτητα από ένα τέτοιο διάγραμμα.

Λύση

Σύμφωνα με το **Θέμα 5** στις περιοδικές δομές ταλαντωτών, η σχέση διασποράς των ημιτονικών κυμάτων που αναπτύσσονται σε ένα σύστημα συζευγμένων εκκρεμών δίνεται από τη σχέση:

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{4s}{m}\sin^2\frac{k\alpha}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου k ο κυματάριθμος, ω η κυκλική συχνότητα και s η σταθερά των ελατηρίων του συστήματος.

Η κάτω συχνότητα αποκοπής, δηλαδή η ελάχιστη συχνότητα είναι όταν $\sin^2(k\alpha/2) = 0$ και είναι:

$\omega_1^2 = \dfrac{g}{\ell}$ οπότε η ομαδική ταχύτητα για αυτή είναι: $\upsilon_{g_1} = \dfrac{d\omega_1}{dk} = 0$

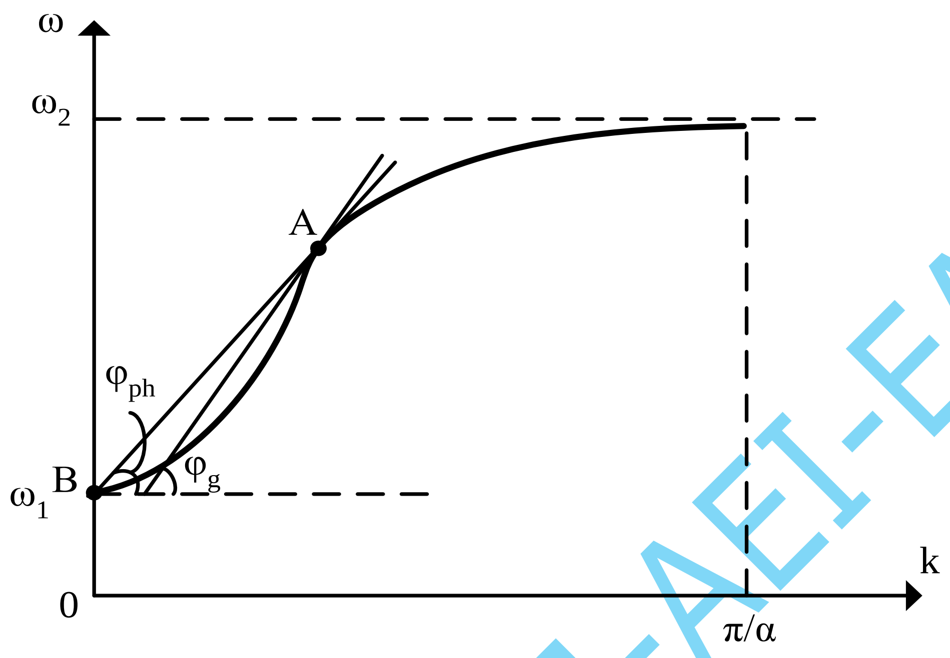
Ενώ η άνω συχνότητα αποκοπής, δηλαδή η μέγιστη συχνότητα είναι όταν $\sin^2(k\alpha/2) = 1$ και είναι:

$\omega_2^2 = \dfrac{g}{\ell} + \dfrac{4s}{m}$ οπότε η ομαδική ταχύτητα για αυτή είναι: $\upsilon_{g_2} = \dfrac{d\omega_2}{dk} = 0$

Η φασική ταχύτητα στις δύο αυτές συχνότητες είναι:

$$\upsilon_{ph_1} = \frac{\omega_1}{k} = \frac{\sqrt{g/\ell}}{k} \quad \text{και} \quad \upsilon_{ph_2} = \frac{\omega_2}{k} = \frac{\sqrt{g/\ell + 4s/m}}{k}$$

Η γραφική παράσταση της σχέσης διασποράς **(1)** φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Για ένα τυχαίο σημείο A του διαγράμματος η ομαδική ταχύτητα δίνεται από την κλίση της καμπύλης, δηλαδή: $\upsilon_g = \tan\varphi_g$

Ενώ η φασική ταχύτητα δίνεται από την κλίση της καμπύλης ως προς το αρχικό σημείο B, δηλαδή: $\upsilon_{ph} = \tan\varphi_{ph}$

ΘΕΜΑ 15

Να εξαχθεί μια σχέση για την ομαδική ταχύτητα των οδευόντων κυμάτων σε ένα ελατήριο με σφαιρίδια. Σχεδιάστε τη σχέση διασποράς για το ελατήριο με σφαιρίδια από k=0 ως τη μέγιστη τιμή k_{max}. Επίσης σχεδιάστε την ομαδική ταχύτητα συναρτήσει του k και τη φασική ταχύτητα συναρτήσει του k από k=0 ως k_{max}.

Λύση

Σύμφωνα με το **Θέμα 3** στις περιοδικές δομές ταλαντωτών, η σχέση διασποράς των κυμάτων που αναπτύσσονται στο σύστημα του ελατηρίου με σφαιρίδια δίνεται από τη σχέση:

$$\omega^2 = \frac{4s}{m}\sin^2\frac{k\alpha}{2} \Rightarrow \omega = 2\sqrt{\frac{s}{m}}\sin\frac{k\alpha}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου s η σταθερά των ελατηρίων του συστήματος.

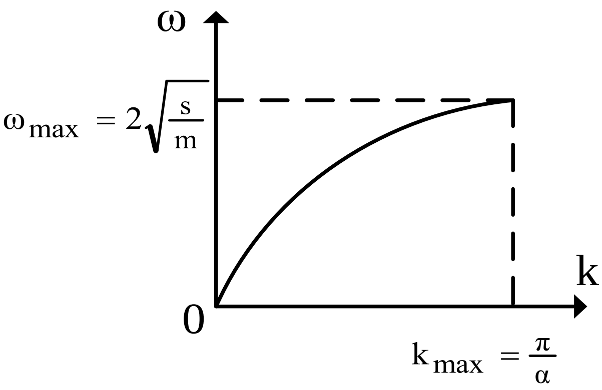
Επομένως η ομαδική ταχύτητα είναι:

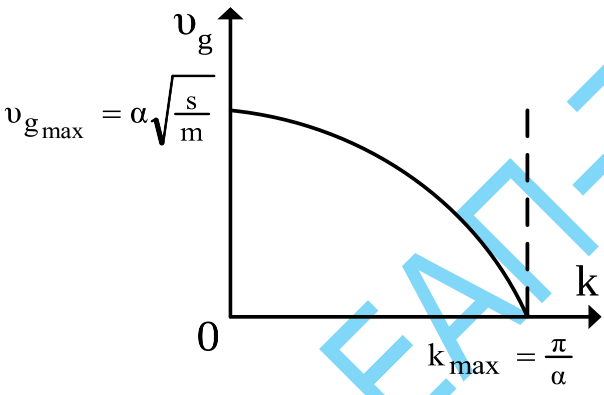
$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \overset{(1)}{=} 2\sqrt{\frac{s}{m}}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{k\alpha}{2} \Rightarrow \upsilon_g = \alpha\sqrt{\frac{s}{m}}\cos\frac{k\alpha}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

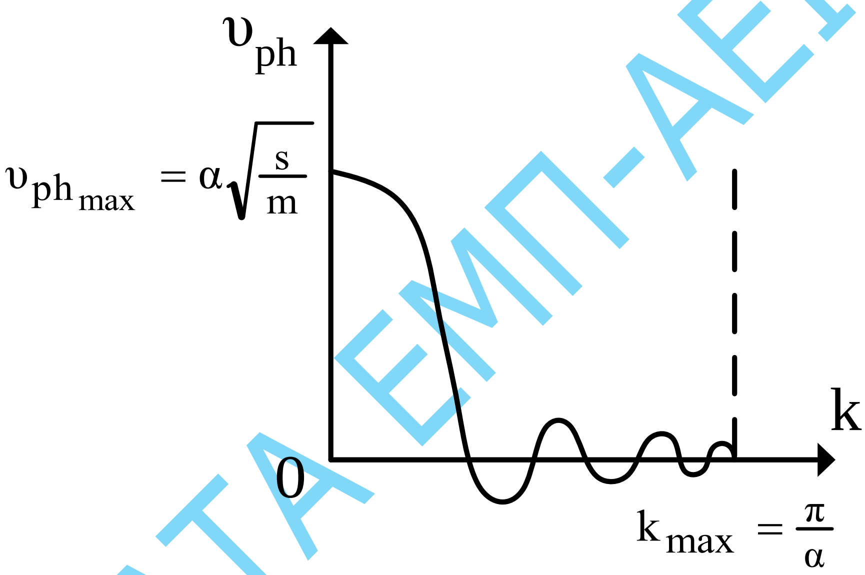
Ενώ η φασική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} \overset{(1)}{=} \frac{2}{k}\sqrt{\frac{s}{m}}\sin\frac{k\alpha}{2} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \alpha\sqrt{\frac{s}{m}}\frac{\sin(k\alpha/2)}{k\alpha/2} \qquad \textbf{(3)}$$

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων ω(k), $\upsilon_g(k)$ και $\upsilon_{ph}(k)$ φαίνονται στα ακόλουθα σχήματα.


ω
$\omega_{max} = 2\sqrt{\frac{s}{m}}$
k
0
$k_{max} = \frac{\pi}{\alpha}$


υ_g
$\upsilon_{g_{max}} = \alpha\sqrt{\frac{s}{m}}$
k
0
$k_{max} = \frac{\pi}{\alpha}$


υ_{ph}
$\upsilon_{ph_{max}} = \alpha\sqrt{\frac{s}{m}}$
k
0
$k_{max} = \frac{\pi}{\alpha}$

ΘΕΜΑ 16

Η εξίσωση που διέπει τη διάδοση εγκάρσιου κύματος σε μια μη ιδανική χορδή είναι της μορφής : $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \upsilon_o^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha \upsilon_o^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$

όπου y=y(x,t) είναι η εγκάρσια μετατόπιση της χορδής και υ_o, α σταθερές.
Να βρεθεί η σχέση διασποράς και να υπολογιστεί η φασική και η ομαδική ταχύτητα.

Λύση

Για τον προσδιορισμό της σχέσης διασποράς ω=ω(k), αντικαθίσταται η λύση οδεύοντων κυμάτων στη δοσμένη κυματική εξίσωση και απαιτώντας να ισχύει για κάθε χωρική και χρονική στιγμή το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι η σχέση διασποράς.
Για απλούστευση των πράξεων χρησιμοποιείται η λύση των οδεύοντων κυμάτων που διαδίδονται στη χορδή στην μιγαδική τους εκθετική μορφή, δηλαδή:

$$y(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} \qquad \textbf{(1)}$$

Η y(x,t) ικανοποιεί τη δοσμένη κυματική εξίσωση, οπότε:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \upsilon_o^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \alpha \upsilon_o^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[Ae^{i(\omega t - kx)}] = \upsilon_o^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}[Ae^{i(\omega t - kx)}] - \alpha \upsilon_o^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4}[Ae^{i(\omega t - kx)}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (i\omega)^2 Ae^{i(\omega t - kx)} = \upsilon_o^2 (-ik)^2 Ae^{i(\omega t - kx)} - \alpha \upsilon_o^2 (-ik)^4 Ae^{i(\omega t - kx)} \overset{\forall x,t}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow -\omega^2 = -\upsilon_o^2 k^2 - \alpha \upsilon_o^2 k^4 \Rightarrow \omega^2 = \upsilon_o^2 k^2 + \alpha \upsilon_o^2 k^4 \qquad \textbf{(2)}$$

Η σχέση **(2)** αποτελεί τη ζητούμενη σχέση διασποράς.
Η φασική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega}{k} \overset{(2)}{=} \frac{\sqrt{\upsilon_o^2 k^2 + \alpha \upsilon_o^2 k^4}}{k} = \sqrt{\frac{\upsilon_o^2 k^2 + \alpha \upsilon_o^2 k^4}{k^2}} = \sqrt{\upsilon_o^2 + \alpha \upsilon_o^2 k^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_{ph} = \upsilon_o \sqrt{1+\alpha k^2}$$

Ενώ η ομαδική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \overset{(2)}{=} \frac{d}{dk}\left(\sqrt{\upsilon_o^2 k^2 + \alpha \upsilon_o^2 k^4}\right) = \frac{2\upsilon_o^2 k + 4\alpha\upsilon_o^2 k^3}{2\sqrt{\upsilon_o^2 k^2 + \alpha\upsilon_o^2 k^4}} = \frac{\upsilon_o^2 k(1+2\alpha k^2)}{\upsilon_o k\sqrt{1+\alpha k^2}} \Rightarrow$$

$$\upsilon_g = \frac{\upsilon_o (1+2\alpha k^2)}{\sqrt{1+\alpha k^2}}$$

ΘΕΜΑ 17

Η σχέση διασποράς των κυμάτων στο νερό είναι:

$$\upsilon_{ph}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}\right)\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας, ρ η πυκνότητα του υγρού, h το βάθος του υγρού και γ η επιφανειακή τάση.

α) Να βρεθεί το μήκος κύματος λ_o για το οποίο η φασική ταχύτητα γίνεται ελάχιστη αν το υγρό είναι πολύ βαθύ, δηλαδή για h>>λ.

β) Να ερευνηθούν οι διάφοροι όροι της σχέσης **(1)** και θεωρώντας ότι γ=0 να βρεθεί η ταχύτητα των κυμάτων στα πολύ βαθειά και στα ρηχά.

γ) Στην περίπτωση μιας ομάδας μεγάλων θαλάσσιων κυμάτων, που ταξιδεύουν στην ανοικτή θάλασσα, δείξτε ότι η ομαδική ταχύτητα είναι το μισό της φασικής ταχύτητας.

δ) Αν λ<<h και η βαρύτητα είναι αμελητέα να βρεθεί η φασική και η ομαδική ταχύτητα.

Λύση

α) Αν το υγρό είναι πολύ βαθύ, δηλαδή για h>>λ είναι:

$$kh >> k\lambda \Rightarrow kh >> \frac{2\pi}{\lambda}\lambda \Rightarrow kh >> 2\pi \Rightarrow 2\pi h/\lambda >> 1 \text{ οπότε } \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \cong 1$$

Άρα από τη σχέση διασποράς **(1)** προκύπτει ότι η φασική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_{ph}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως η έκφραση για τη υ_{ph} γίνεται ελάχιστη όταν:

$$\frac{d\upsilon_{ph}^2}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda^2} = 0 \Rightarrow \frac{g}{2\pi} = \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{4\pi\gamma}{\rho g} \Rightarrow \lambda_o = 2\pi\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \qquad \textbf{(3)}$$

Κι επειδή η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$\left.\frac{d^2\upsilon_{ph}^2}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda_o} = \left.\frac{4\pi\gamma}{\rho\lambda^3}\right|_{\lambda=\lambda_o} = \frac{4\pi\gamma}{\rho 8\pi^3(\gamma/\rho g)^{3/2}} = \frac{\gamma}{2\pi^2\rho}\left(\frac{\rho g}{\gamma}\right)^{3/2} > 0$$

η τιμή **(3)** του λ αποτελεί το μήκος κύματος για το οποίο η υ_{ph}^2, άρα και η υ_{ph} γίνεται ελάχιστη.

β) Στη σχέση διασποράς **(1)** ο πρώτος όρος στην παρένθεση gλ/2π περιγράφει την επίδραση της βαρύτητας, ενώ ο δεύτερος όρος 2πγ/ρλ την επίδραση της επιφανειακής τάσης. Τέλος η υπερβολική εφαπτομένη $\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)$ δίνει την επίδραση του βάθους του υγρού στα κύματα.

Για γ=0 η σχέση **(1)** απλοποιείται στη μορφή:

$$\upsilon_{ph}^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \quad \textbf{(4)}$$

Επομένως αν h>>λ, δηλαδή για βαθύ υγρό είναι 2πh/λ>>1 οπότε $\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \cong 1$ και η **(4)** δίνει:

$$\upsilon_{ph}^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \quad \textbf{(5)}$$

Ενώ αν h<<λ, δηλαδή για ρηχό υγρό είναι 2πh/λ<<1 οπότε $\tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \cong \frac{2\pi h}{\lambda}$ και η **(4)** δίνει:

$$\upsilon_{ph}^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}\frac{2\pi h}{\lambda} = gh \Rightarrow \upsilon_{ph} = \sqrt{gh} \quad \textbf{(6)}$$

γ) Στην περίπτωση μεγάλων θαλάσσιων κυμάτων, που ταξιδεύουν στην ανοικτή θάλασσα επειδή διαδίδονται σε βαθιά νερά η φασική τους ταχύτητα δίνεται από τη σχέση **(5)**. Δηλαδή:

$$\upsilon_{ph} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad \textbf{(7)}$$

όπου k=2π/λ ο κυματάριθμος.

Επομένως η ομαδική τους ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(k\upsilon_{ph}) \overset{(7)}{=} \frac{d}{dk}\left(k\sqrt{\frac{g}{k}}\right) = \sqrt{g}\frac{d}{dk}(\sqrt{k}) = \sqrt{g}\frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_g = \frac{1}{2}\upsilon_{ph}$$

δ) Αν h>>λ, οπότε όπως έχει αποδειχθεί προηγούμενα $\tan\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \cong 1$ και η βαρύτητα είναι αμελητέα, δηλαδή g=0 η σχέση **(1)** δίνει τη φασική ταχύτητα ως:

$$\upsilon_{ph}^2 = \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}} = \sqrt{\frac{k\gamma}{\rho}} \qquad \textbf{(8)}$$

Ενώ η ομαδική ταχύτητα είναι:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(k\upsilon_{ph}) \overset{(8)}{=} \frac{d}{dk}\left(k\sqrt{\frac{k\gamma}{\rho}}\right) = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}}\frac{d}{dk}(k^{3/2}) = \frac{3}{2}\sqrt{k}\sqrt{\frac{\gamma}{\rho}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{k\gamma}{\rho}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_g = \frac{3}{2}\upsilon_{ph}$$

ΘΕΜΑ 18

Γιγαντιαίο παλιρροϊκό κύμα (τσουνάμι) προκαλείται στον Ειρηνικό ωκεανό από υποθαλάσσιο σεισμό. Το κύμα αυτό έχει μήκος κύματος πολύ μεγαλύτερο από το μέσο βάθος του ωκεανού που είναι 5km. Υπολογίστε την ταχύτητα με την οποία κινείται το τσουνάμι. Μέσα σε πόσο χρόνο θα πρέπει να εκκενωθεί παραθαλάσσια πόλη αν οι αρχές της πόλης πληροφορηθούν δύο ώρες μετά το σεισμό ότι το επίκεντρο βρισκόταν σε απόσταση 3200 km από την πόλη;

Λύση

Επειδή το τσουνάμι έχει μήκος κύματος λ πολύ μεγαλύτερο από το μέσο βάθος του ωκεανού h δηλαδή λ>>h ισχύει σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στο **Θέμα 17** η προσέγγιση:

$$\tan\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right) \cong \frac{2\pi h}{\lambda} = hk$$

Οπότε η σχέση διασποράς που ισχύει για τα επιφανειακά κύματα σε υγρό πυκνότητας ρ, επιφανειακής τάσης γ και βάθους h γίνεται:

$$\upsilon_{ph}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\rho\lambda}\right)\frac{2\pi h}{\lambda} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά ο όρος που οφείλεται στην επιφανειακή τάση είναι ασήμαντος (δηλαδή γ=0) οπότε η **(1)** παίρνει τη μορφή:

$$\upsilon_{ph}^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g\lambda}{2\pi}\frac{2\pi h}{\lambda} = gh \Rightarrow \upsilon_{ph} = \sqrt{gh}$$

Η ομαδική ταχύτητα των κυμάτων αυτών είναι:

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(k\upsilon_{ph}) = \frac{d}{dk}(k\sqrt{gh}) = \sqrt{gh} = \upsilon_{ph}$$

Δηλαδή η ομαδική είναι ίση με τη φασική τους ταχύτητα.

Αντικαθιστώντας τις τιμές βρίσκεται η ταχύτητα με την οποία κινείται το τσουνάμι ως:

$$\upsilon_{ph} = \sqrt{10\cdot 5\cdot 10^3}\,m/sec = 224m/sec$$

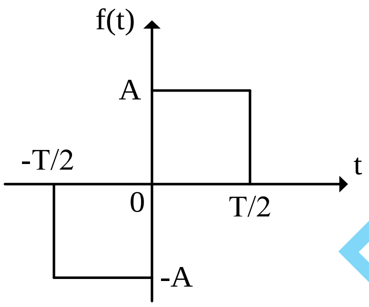
Άρα ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει το κύμα αυτό σε απόσταση 3200 km είναι:

$$t = \frac{3{,}2 \cdot 10^6}{2{,}24 \cdot 10^2} \sec = 1{,}43 \cdot 10^4 \sec \cong 4\text{h}$$

Επομένως αφού στην πόλη πληροφορούνται μετά από δύο ώρες το σεισμό, θα πρέπει η πόλη να εκκενωθεί το πολύ μέσα σε δύο ώρες για να διασωθεί όλος ο πληθυσμός της.

ΘΕΜΑ 19

Έστω ο παλμός f(t) που φαίνεται στο σχήμα.



Δηλαδή: $$f(t)=\begin{cases}0, & -\infty<t<-T/2\\ -A, & -T/2\le t\le 0\\ A, & 0\le t\le T/2\\ 0, & T/2\le t\le +\infty\end{cases}$$

α) Να προσδιοριστούν οι συντελεστές Fourier A(ω), B(ω) και να γίνει η γραφική τους παράσταση.
β) Αν μια γέφυρα προσομοιωθεί με χορδή που έχει τα άκρα της σταθερά, να εξεταστεί πότε η γέφυρα θα επηρεαστεί περισσότερο από σεισμό, ο οποίος περιγράφεται από τον παλμό f(t).
γ) Αν ο παλμός f(t) παριστάνει τη μετατόπιση του άκρου x=0 μιας ημιάπειρης χορδής να υπολογιστεί η μετατόπιση y(x,t) των σημείων της χορδής σε μορφή ολοκληρώματος.

Λύση

α) Οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης f(t) είναι:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-T/2}^{0}-A\sin\omega t dt+\int_{0}^{T/2}A\sin\omega t dt\right]=$$

$$=\frac{A}{\pi\omega}\left[\cos\omega t\Big|_{-T/2}^{0}-\cos\omega t\Big|_{0}^{T/2}\right]=\frac{A}{\pi\omega}(\cos 0-\cos(-\omega T/2)-\cos(\omega T/2)+\cos 0)=$$

$$=\frac{A}{\pi\omega}(1-\cos(\omega T/2)-\cos(\omega T/2)+1)=\frac{2A}{\pi\omega}[1-\cos(\omega T/2)]\Rightarrow$$

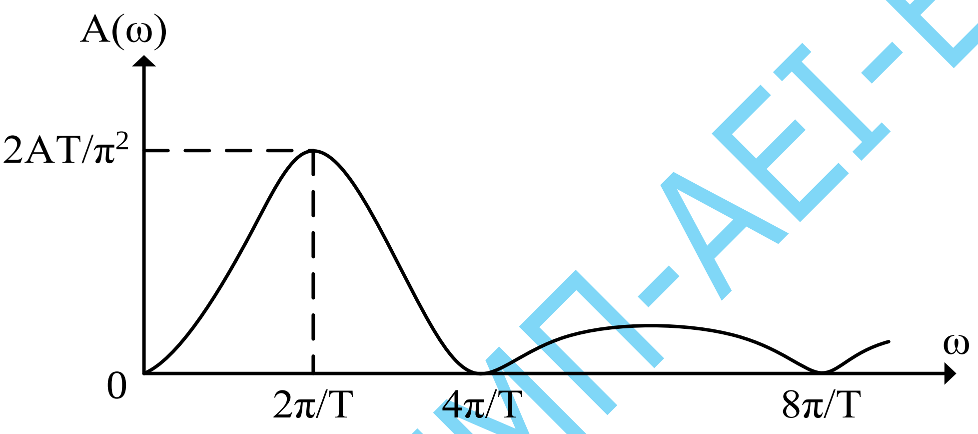
$$\Rightarrow A(\omega)=\frac{4A}{\pi\omega}\sin^2(\omega T/4) \qquad \textbf{(1)}$$

Και: $$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t dt=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-T/2}^{0}-A\cos\omega t dt+\int_{0}^{T/2}A\cos\omega t dt\right]=$$

$$=\frac{A}{\pi\omega}\left[\sin\omega t\Big|_{-T/2}^{0}+\sin\omega t\Big|_{0}^{T/2}\right]=\frac{A}{\pi\omega}(-\sin 0+\sin(-\omega T/2)+\sin(\omega T/2)-\sin 0)=$$

$$=\frac{A}{\pi\omega}(-\sin(\omega T/2)+\sin(\omega T/2)\Rightarrow B(\omega)=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Η γραφική παράσταση του συντελεστή Α(ω) φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Το μέγιστο $\dfrac{4A}{\pi\omega}=\dfrac{4A}{\pi 2\pi/T}=\dfrac{2AT}{\pi^2}$ παρουσιάζεται όταν:

$$\sin^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)=1\Rightarrow\frac{\omega T}{4}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}$$

Επίσης ο συντελεστής Α(ω) μηδενίζεται όταν:

$$\sin^2\left(\frac{\omega T}{4}\right)=0\Rightarrow\frac{\omega T}{4}=n\pi\Rightarrow\omega=n\frac{4\pi}{T} \qquad n=0,1,2,...$$

β) Σύμφωνα με τη σχέση διασποράς μιας χορδής μήκους ℓ με ακλόνητα άκρα (η οποία προσομοιάζει τη γέφυρα), δίνει τις ιδιοσυχνότητές της ως:

$$\omega_n=\frac{n\pi}{\ell}\sqrt{\frac{F}{\rho}} \qquad n=1,2,... \qquad \textbf{(3)}$$

όπου F η τάση της χορδής και ρ η γραμμική πυκνότητα μάζας της.
Επειδή η ενέργεια του σεισμού είναι μεγάλη στις συχνότητες όπου οι συντελεστές A(ω) ή B(ω) είναι μεγάλοι, παρατηρείται από το προηγούμενο σχήμα ότι αν οι συχνότητες ω_n είναι μεγαλύτερες από 4π/T τότε ο σεισμός δεν επηρεάζει καταστροφικά τη γέφυρα, γιατί το A(ω) είναι μικρό. Δηλαδή:

$$\omega_n > \frac{4\pi}{T} \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{n\pi}{\ell}\sqrt{\frac{F}{\rho}} > \frac{4\pi}{T} \Rightarrow T > \frac{4\ell}{n}\sqrt{\frac{\rho}{F}}$$

Συνεπώς από την τελευταία σχέση παρατηρείται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια T του σεισμού τόσο μικρότερες είναι οι καταστροφές που προκαλεί στη γέφυρα.

γ) Σύμφωνα με τα δεδομένα είναι y(0,t)=f(t) και αναλύοντας τη συνάρτηση f(t) σε ολοκλήρωμα Fourier και μετά αντικαθιστώντας τους συντελεστές A(ω), B(ω) προκύπτει:

$$y(0,t) = \int_0^{+\infty} A(\omega)\sin\omega t d\omega + \int_0^{+\infty} B(\omega)\cos\omega t d\omega \overset{(1),(2)}{\Rightarrow}$$

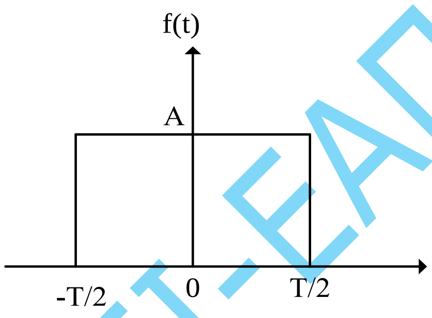
$$\Rightarrow y(0,t) = \frac{4A}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\omega T/4)}{\omega}\sin\omega t d\omega \qquad \textbf{(4)}$$

Αλλά την κίνηση του άκρου x=0 επαναλαμβάνει το τυχαίο σημείο x της χορδής μετά από χρόνο x/υ, όπου υ είναι η ταχύτητα του κύματος, οπότε αντικαθιστώντας το t με t-x/υ στη σχέση **(4)** προκύπτει η μετατόπιση y(x,t) κάθε σημείου της χορδής. Δηλαδή:

$$y(x,t) = \frac{4A}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\omega T/4)}{\omega}\sin[\omega(t - x/\upsilon)]d\omega$$

Θέμα 20

Έστω ο τετραγωνικός χρονικός παλμός του σχήματος.
α) Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier Α(ω), Β(ω) και να γίνει η γραφική τους παράσταση.
β) Αν ο παλμός αυτός παριστάνει την απομάκρυνση y(0,t) του σημείου x ενός μέσου με σχέση διασποράς $\omega = ck^2$, όπου c σταθερά να βρεθεί η απομάκρυνση y(x,t).
Εξετάστε αν το σχήμα του παλμού αλλάζει για x>0.



Λύση

α) Οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης f(t) είναι:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} A\sin\omega t dt = \frac{A}{\pi\omega}\Big[-\cos\omega t\Big]_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{A}{\pi\omega}\big[-\cos(\omega T/2) + \cos(-\omega T/2)\big] = \frac{A}{\pi\omega}[-\cos(\omega T/2) + \cos(\omega T/2)] \Rightarrow$$

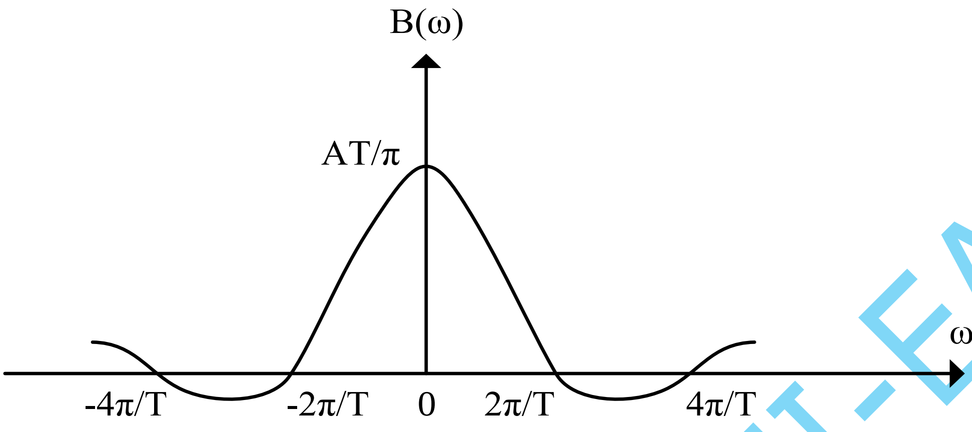
$$\Rightarrow A(\omega) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Και : $$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos\omega t dt = \frac{A}{\pi\omega}\Big[\sin\omega t\Big]_{-T/2}^{T/2} =$$

$$= \frac{A}{\pi\omega}\big[\sin(\omega T/2) - \sin(-\omega T/2)\big] = \frac{A}{\pi\omega}[\sin(\omega T/2) + \sin(\omega T/2)] =$$

$$= \frac{2A}{\pi\omega}\sin(\omega T/2) \Rightarrow B(\omega) = \frac{AT}{\pi}\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \qquad \textbf{(2)}$$

Η γραφική παράσταση του συντελεστή Β(ω) φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Παρατηρείται ότι στο ω=0 η συνάρτηση B(ω) παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή AT/π, αφού σύμφωνα με τον κανόνα του De L' Hospital είναι:

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} = 1$$

Ενώ ο συντελεστής B(ω) μηδενίζεται όταν:

$$\sin\frac{\omega T}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\omega T}{2} = n\pi \Rightarrow \omega = \frac{2n\pi}{T}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

β) Επειδή y(0,t)=f(t) αν αναλυθεί η f(t) σε ολοκλήρωμα Fourier και αντικατασταθούν οι συντελεστές A(ω), B(ω) από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει:

$$y(0,t) = \int_0^{+\infty} A(\omega)\sin\omega t d\omega + \int_0^{+\infty} B(\omega)\cos\omega t d\omega \overset{(1),(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow y(0,t) = \int_0^{+\infty} \frac{2A}{\pi\omega}\sin(\omega T/2)\cos\omega t d\omega \qquad \textbf{(3)}$$

Αντικαθιστώντας το t με t-x/υ προκύπτει η απομάκρυνση y(x,t)ως:

$$y(x,t) = \frac{2A}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega}\cos[\omega(t - x/\upsilon)]d\omega \qquad \textbf{(4)}$$

όπου η φασική ταχύτητα υ, σύμφωνα με τη δοθείσα σχέση διασποράς είναι:

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} = \frac{ck^2}{k} \Rightarrow \upsilon = ck \qquad \textbf{(5)}$$

Από τη σχέση **(5)** παρατηρείται ότι η φασική ταχύτητα είναι ανάλογη του κυματάριθμου, με συνέπεια κάθε κύμα από το οποίο αποτελείται ο παλμός να διαδίδεται με διαφορετική ταχύτητα. Δηλαδή ο παλμός σύμφωνα με την **(4)** είναι επαλληλία συνημιτονοειδών κυμάτων τα οποία διαδίδονται με διαφορετική ταχύτητα. Άρα ο παλμός θα αλλάξει σχήμα, αφού κάποια κύματα διαδίδονται γρηγορότερα σε σχέση με τα άλλα.
Αντίθετα αν η φασική ταχύτητα ήταν ανεξάρτητη του κυματάριθμου, δηλαδή αν δεν υπήρχε διασπορά, ο παλμός θα διατηρούσε το σχήμα του, αφού όλες οι συνιστώσες του θα διαδίδονταν με την ίδια ταχύτητα.

ΘΕΜΑ 21

Γέφυρα μήκους L=200m μπορεί να προσομοιωθεί από πλευρά ταλαντώσεων με κλασική χορδή που έχει σταθερά τα άκρα της και ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων υ=400m/sec. Αν η γέφυρα προσβληθεί από σεισμό μορφής τετραγωνικού παλμού διάρκειας Δt=2sec, να βρεθεί αν κινδυνεύει να καταστραφεί από το σεισμό.

Λύση

Η γέφυρα, η οποία προσομοιώνεται με χορδή μήκους L με ακλόνητα άκρα έχει ιδιοσυχνότητες:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\upsilon = n\pi\frac{400\text{m}/\sec}{200\text{m}} \Rightarrow \omega_n = n2\pi, \qquad n = 1,2,\ldots\ (\text{rad}/\sec) \qquad \textbf{(1)}$$

Επομένως το εύρος των συχνοτήτων Δω του παλμού είναι σύμφωνα με το θεώρημα εύρους ζώνης:

$$\Delta\omega\Delta t = 2\pi \Rightarrow \Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \Delta\omega = \pi \ \ \text{rad}/\sec \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα για να μην προκαλούνται εγκάρσιες ταλαντώσεις στη γέφυρα από το σεισμό, θα πρέπει όλες οι επιτρεπόμενες συχνότητες εγκάρσιας ταλάντωσης της γέφυρας ω_n να βρίσκονται έξω από το διάστημα Δω. Δηλαδή σύμφωνα με τις **(1)**, **(2)**, είναι:

$$\Delta\omega < \omega_1 \Rightarrow \pi < 2\pi$$

Οπότε η γέφυρα δεν κινδυνεύει να καταστραφεί από το σεισμό.

ΘΕΜΑ 22

Έστω ο παλμός $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-t/2\pi}, & t\geq 0\end{cases}$

Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier A(ω) και B(ω) της συνάρτησης αυτής.

Λύση

Οι συντελεστές Fourier δίνονται από τις σχέσεις:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt \Rightarrow iA(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} if(t)\sin\omega t dt \quad \textbf{(1)}$$

Και:
$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt \quad \textbf{(2)}$$

Προσθέτοντας τις **(1)**, **(2)** προκύπτει ο συντελεστής:

$$C(\omega)=B(\omega)+iA(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos\omega t+i\sin\omega t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-t/2\pi}e^{i\omega t}dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{(i\omega-1/2\pi)t}dt=\frac{1}{\pi\left(i\omega-\frac{1}{2\pi}\right)}\int_{0}^{+\infty} e^{(i\omega-1/2\pi)t}d\left[\left(i\omega-\frac{1}{2\pi}\right)t\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi\left(i\omega-\frac{1}{2\pi}\right)}e^{(i\omega-1/2\pi)t}\Bigg|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{i\pi\omega-1/2}\left[e^{i\omega t}\cdot e^{-t/2\pi}\right]_{0}^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{i\pi\omega-1/2}(e^{+\infty}\cdot e^{-\infty}-e^{0}\cdot e^{0})=$$

$$= \frac{1}{i\pi\omega - 1/2}(0-1) \Rightarrow C(\omega) = \frac{-1}{i\pi\omega - 1/2} = \frac{1}{1/2 - i\pi\omega} =$$

$$= \frac{1/2 + i\pi\omega}{1/4 + \pi^2\omega^2} = \frac{2 + i4\pi\omega}{1 + 4\pi^2\omega^2} \Rightarrow C(\omega) = \frac{2}{1 + 4\pi^2\omega^2} + i\frac{4\pi\omega}{1 + 4\pi^2\omega^2}$$

Άρα: $A(\omega) = \dfrac{4\pi\omega}{1 + 4\pi^2\omega^2}$ και $B(\omega) = \dfrac{2}{1 + 4\pi^2\omega^2}$

ΘΕΜΑ 23

Δείξτε ότι αν ένας παλμός f(t) περιγράφεται με την καμπύλη Gauss, δηλαδή $f(t) = ce^{-t^2/2\tau^2}$ ο συντελεστής Fourier που αντιστοιχεί σε αυτό τον παλμό περιγράφεται επίσης από μια καμπύλη Gauss που είναι :

$B(\omega) = \frac{\sqrt{2}\tau c}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2/2\sigma^2}$ και ότι το γινόμενο $\sigma \cdot \tau$ ισούται με τη μονάδα.

Λύση

Οι συντελεστές Fourier της f(t) είναι: $A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt = 0$ γιατί η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(t)\sin\omega t$ είναι περιττή, ως γινόμενο της άρτιας f(t) επί την περιττή sinωt και τα άκρα ολοκλήρωσης είναι αντίθετα. Γενικά ένα ολοκλήρωμα με αντίθετα άκρα ολοκλήρωσης και ολοκληρωτέα συνάρτηση περιττή είναι ίσο με μηδέν.

Ενώ:

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt = \frac{c}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2\tau^2}\cos\omega t dt \quad \textbf{(1)}$$

Θέτοντας $t = \sqrt{2}\tau x \Rightarrow dt = \sqrt{2}\tau dx$ και $\alpha = \sqrt{2}\omega\tau$ η **(1)** γράφεται:

$$B(\omega) = \frac{c\sqrt{2}\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x dx \quad \textbf{(2)}$$

Αλλά: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2/4}$

Οπότε η **(2)** δίνει το συντελεστή Fourier:

$$B(\omega) = \frac{c\sqrt{2}\tau}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2/4} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\tau c e^{-\alpha^2/4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\tau c e^{-\omega^2\tau^2/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\tau c e^{-\omega^2/2\sigma^2}$$

όπου σ=1/τ είναι η τυπική απόκλιση της καμπύλης Gauss και από την οποία φαίνεται ότι σ τ=1.

ΘΕΜΑ 24

Ένας παλμός έχει εύρος συχνοτήτων Δω και διαδίδεται κατά μήκος μιας ιδανικής χορδής η οποία έχει γραμμική πυκνότητα ρ και τείνεται με σταθερή τάση Τ.
α) Να εξεταστεί αν ο παλμός διατηρεί το σχήμα του καθώς διαδίδεται κατά μήκος της χορδής.
β) Να υπολογιστεί το μήκος Δx του παλμού αυτού.

Λύση

α) Η φασική ταχύτητα στην ιδανική χορδή ως γνωστό είναι:

$$\upsilon = \sqrt{T/\rho} \qquad \textbf{(1)}$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητη του κυματάριθμου k. Επομένως επειδή ο παλμός αναλύεται σε επαλληλία ημιτονοειδών κυμάτων και οι συνιστώσες αυτές του παλμού διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα είναι προφανές ότι το σχήμα του παλμού δεν αλλάζει, αλλά διατηρείται.

β) Αν Δω είναι το εύρος συχνοτήτων και Δt η χρονική διάρκεια του παλμού τότε σύμφωνα με το θεώρημα εύρους ζώνης ισχύει:

$$\Delta\omega\Delta t = 2\pi \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης αν Δx είναι το μήκος του παλμού και $\upsilon = \sqrt{T/\rho}$ η ταχύτητα διάδοσής του στη χορδή, τότε η χρονική του διάρκεια Δt είναι:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\upsilon} = \frac{\Delta x}{\sqrt{T/\rho}} \qquad \textbf{(3)}$$

Άρα από τις εξισώσεις **(2)** και **(3)** προκύπτει το μήκος του παλμού:

$$\frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{\Delta x}{\sqrt{T/\rho}} \Rightarrow \Delta x = \frac{2\pi}{\Delta\omega}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

ΘΕΜΑ 25

Ένα ημιτονοειδές κύμα y(x,t)=Asin(ωt-kx) διαδίδεται σε ομογενή ελαστική χορδή γραμμικής πυκνότητας ρ, που τείνεται με τάση T.
α) Να δείξετε ότι η ισχύς P(x,t) ικανοποιεί την κυματική εξίσωση.
β) Αν οριστεί ως κύμα μεταδιδόμενης ισχύος το w(x,t)=P(x,t)-<P(x,t)> να προσδιοριστεί η συχνότητα, το μήκος κύματος και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος ισχύος.

Λύση

α) Η διαδιδόμενη ισχύς στη χορδή είναι:

$$P(x,t) = Z\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = Z(A\omega\cos(\omega t - kx))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x,t) = ZA^2\omega^2\cos^2(\omega t - kx) \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $Z = \sqrt{T\rho}$ είναι η σύνθετη αντίσταση της χορδής.

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση $\cos^2\theta = (1+\cos 2\theta)/2$ η **(1)** γίνεται:

$$P(x,t) = \frac{1}{2}ZA^2\omega^2[1+\cos(2\omega t - 2kx)] \qquad \textbf{(2)}$$

Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους της P(x,t) ως προς t και x προκύπτει:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -ZA^2\omega^3\sin(2\omega t - 2kx) \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = -2ZA^2\omega^4\cos(2\omega t - 2kx)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = ZA^2\omega^2 k\sin(2\omega t - 2kx) \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -2ZA^2\omega^2 k^2\cos(2\omega t - 2kx)$$

Παρατηρείται ότι οι τελευταίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \upsilon^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

όπου υ=ω/k η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.
Άρα η ισχύς P(x,t) ικανοποιεί την κλασική κυματική εξίσωση.

β) Η μέση διαδιδόμενη ισχύς είναι:

$$<P(x,t)> = \frac{1}{2} Z A^2 \omega^2 \qquad \textbf{(3)}$$

Συνεπώς λόγω των **(2)** και **(3)** το κύμα διαδιδόμενης ισχύος γράφεται:

$$w(x,t) = P(x,t) - <P(x,t)> = \frac{1}{2} Z A^2 \omega^2 [1 + \cos(2\omega t - 2kx)] - \frac{1}{2} Z A^2 \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(x,t) = \frac{1}{2} Z A^2 \omega^2 \cos(2\omega t - 2kx)$$

Παρατηρείται ότι το κύμα αυτό έχει πλάτος ίσο με $ZA^2\omega^2/2$, κυκλική συχνότητα 2ω και κυματάριθμο 2k, δηλαδή έχει διπλάσια συχνότητα και κυματάριθμο από το κύμα y(x,t). Επίσης το μήκος κύματός του είναι:

$$\lambda' = \frac{2\pi}{k'} = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2\pi/\lambda} \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{2}$$

Δηλαδή το μισό του μήκους κύματος του y(x,t).

Ενώ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος ισχύος είναι:

$$\upsilon' = \frac{\omega'}{k'} = \frac{2\omega}{2k} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \upsilon' = \upsilon$$

Δηλαδή είναι ίση με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος y(x,t).

ΘΕΜΑ 26

Χορδή απείρου μήκους και γραμμικής πυκνότητας ρ=0,1gr/cm, που τείνεται με τάση $T = 3{,}5 \cdot 10^7$ dynes διεγείρεται στο σημείο x=0 σε αρμονική ταλάντωση με πλάτος A=1cm και συχνότητα ν=100Hz. Να υπολογιστεί η μέση χρονική τιμή της ενεργειακής ροής (μέση ακτινοβολούμενη ισχύς) σε Watt.

Λύση

Η αρμονική πηγή που διαταράσσει τη χορδή έχει εξίσωση y(x,t)=Asinωt, οπότε τα οδεύοντα κύματα που αναπτύσσονται στη χορδή περιγράφονται από την κυματοσυνάρτηση:

$$y(x,t)=A\sin(\omega t-kx) \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα η ακτινοβολούμενη μέση ισχύς είναι:

$<P(x,t)>=\frac{1}{2}ZA^2\omega^2$, όπου $Z=\sqrt{T\rho}$ είναι η σύνθετη αντίσταση της χορδής και ω=2πν η κυκλική συχνότητα των κυμάτων.

Οπότε: $$<P(x,t)>=\frac{1}{2}A^2 4\pi^2\nu^2\sqrt{T\rho}=2\pi\nu^2A^2\sqrt{T\rho}$$

Αντικαθιστώντας τα αριθμητικά δεδομένα στην τελευταία προκύπτει:

$$<P(x,t)>=2\cdot 3{,}14^2\cdot 100^2\sec^{-2}\cdot 1\text{cm}^2\sqrt{3{,}5\cdot 10^7\,\text{dyn}\cdot 0{,}1\text{gr}/\text{cm}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x,t)=3{,}69\cdot 10^8\,\text{erg}/\sec \qquad \textbf{(2)}$$

Επειδή το erg (έργιο) είναι μονάδα ενέργειας σε C.G.S. και ισούται με:

$$1\text{J}=1\text{N}\cdot 1\text{m}=1\text{kgr}\cdot\frac{\text{m}}{\sec^2}\cdot 1\text{m}=1000\text{gr}\cdot\frac{100\text{cm}}{\sec^2}\cdot 100\text{cm}=$$

$$=10^7\,\text{gr}\cdot\text{cm}^2/\sec^2 \Rightarrow 1\text{Joule}=10^7\,\text{erg}$$

η **(2)** τελικά δίνει:

$$<P(x,t)>=36{,}9\ \text{Joule}/\sec=36{,}9\ \text{Watt}$$

ΘΕΜΑ 27

Σε ελαστική ομογενή χορδή που τείνεται με τάση T και έχει γραμμική πυκνότητα ρ διαδίδονται δύο οδεύοντα κύματα:

$$y_1(x,t) = A\cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) \;\; \text{και} \;\; y_2(x,t) = A\cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2)$$

α) Να υπολογιστεί η μέση διαδιδόμενη ισχύς αν $\omega_1 = \omega_2$ και να βρεθεί η σχέση μεταξύ των φ_1 και φ_2 για την οποία επιτυγχάνεται η μέγιστη και η ελάχιστη μέση διαδιδόμενη ισχύς.

β) Να απαντηθεί το προηγούμενο ερώτημα για $\omega_1 \neq \omega_2$.

γ) Εφαρμογή: Να υπολογιστεί η μέση διαδιδόμενη ισχύς των δύο κυμάτων αν A=1cm, $\omega_1 = \omega_2 = 10^3\,\text{rad/sec}$, $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = \pi/4$, $T = 10^{-5}\,\text{Nt}$ και ρ=0,1 kgr/m.

Λύση

α) Γενικά η κίνηση της χορδής περιγράφεται από την επαλληλία των κυματοσυναρτήσεων $y_1(x,t)$ και $y_2(x,t)$. Δηλαδή:

$$y(x,t) = A\cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) + A\cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2) \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $\upsilon = \sqrt{T/\rho}$ είναι η ταχύτητα διάδοσης.

Λόγω της σχέσης διασποράς ω=kυ και επειδή $\upsilon = \sqrt{T/\rho}$ =σταθ. για $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ είναι και $k_1 = k_2 = k$. Οπότε η **(1)** γίνεται:

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1) + A\cos(\omega t - kx + \varphi_2) \qquad \textbf{(2)}$$

Σύμφωνα με την **(5-27)** η διαδιδόμενη ισχύς είναι:

$$P(x,t) = Z\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \overset{(2)}{=} Z[-A\omega\sin(\omega t - kx + \varphi_1) - A\omega\sin(\omega t - kx + \varphi_2)]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x,t) = ZA^2\omega^2[\sin^2(\omega t - kx + \varphi_1) + \sin^2(\omega t - kx + \varphi_2) +$$

$$+ 2\sin(\omega t - kx + \varphi_1)\sin(\omega t - kx + \varphi_2)] \qquad \textbf{(3)}$$

όπου $Z = \sqrt{T\rho}$ είναι η σύνθετη αντίσταση της χορδής.

Άρα η μέση διαδιδόμενη ισχύς είναι:

$$< P(x,t) >= ZA^2\omega^2[< \sin^2(\omega t - kx + \varphi_1) > + < \sin^2(\omega t - kx + \varphi_2) > +$$

$$+ 2 < \sin(\omega t - kx + \varphi_1)\sin(\omega t - kx + \varphi_2) >] \qquad \textbf{(4)}$$

όπου είναι $< \sin^2(\omega t - kx + \varphi_1) >=< \sin^2(\omega t - kx + \varphi_2) >= \frac{1}{2}$ και χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση :

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

η μέση τιμή του γινομένου ημιτόνων είναι:

$$< \sin(\omega t - kx + \varphi_1)\sin(\omega t - kx + \varphi_2) >=$$

$$= \frac{1}{2} < \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\omega t - 2kx + \varphi_1 + \varphi_2) >= \frac{1}{2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

επειδή $< \cos(\varphi_1 - \varphi_2) >= \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ γιατί φ_1, φ_2 ανεξάρτητα του χρόνου και $< \cos(2\omega t - 2kx + \varphi_1 + \varphi_2) >= 0$.

Συνεπώς η **(4)** δίνει:

$$< P(x,t) >= ZA^2\omega^2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow < P(x,t) >= ZA^2\omega^2[1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \qquad \textbf{(5)}$$

Παρατηρείται από τη σχέση **(5)** ότι η μέση διαδιδόμενη ισχύς γίνεται μέγιστη όταν $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1 \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$ δηλαδή όταν τα δύο κύματα είναι σε φάση και τότε είναι:

$$< P(x,t) >_{max} = 2ZA^2\omega^2 = 2A^2\omega^2\sqrt{T\rho}$$

Ενώ η μέση διαδιδόμενη ισχύς γίνεται ελάχιστη όταν :

$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1 \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ δηλαδή όταν τα δύο κύματα έχουν διαφορά φάσης π και τότε είναι: $< P(x,t) >_{min} = 0$

β) Για $\omega_1 \neq \omega_2$ είναι προφανώς $k_1 \neq k_2$, οπότε η διαδιδόμενη ισχύς σύμφωνα με την **(5-27)** και λόγω της **(1)** είναι:

$$P(x,t) = Z\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \overset{(1)}{=} Z[-\omega_1 A\sin(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) - \omega_2 A\sin(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2)]^2 =$$

$$= ZA^2[\omega_1^2 \sin^2(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) + \omega_2^2 \sin^2(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2) +$$

$$+ 2\omega_1\omega_2 \sin(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1)\sin(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2)] \qquad \textbf{(6)}$$

Άρα η μέση διαδιδόμενη ισχύς είναι:

$$< P(x,t) >= ZA^2[\omega_1^2 < \sin^2(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) > +\omega_2^2 < \sin^2(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2) > +$$

$$+ 2\omega_1\omega_2 < \sin(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1)\sin(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2) >] \qquad \textbf{(7)}$$

όπου είναι $\quad < \sin^2(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1) >=< \sin^2(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2) >= \frac{1}{2}$

και $\quad < \sin(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1)\sin(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2) >=$

$$= \frac{1}{2} < \cos[(\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 - k_1)x + \varphi_2 - \varphi_1] -$$

$$- \cos[(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x + \varphi_1 + \varphi_2] >= 0$$

Επομένως η **(7)** δίνει:

$$< P(x,t) >= ZA^2\left(\omega_1^2 \frac{1}{2} + \omega_2^2 \frac{1}{2}\right) \Rightarrow < P(x,t) >= \frac{1}{2}ZA^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}ZA^2\omega_2^2 \qquad \textbf{(8)}$$

Παρατηρείται ότι στην περίπτωση που $\omega_1 \neq \omega_2$ η μέση διαδιδόμενη ισχύς είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη των φ_1, φ_2 και είναι ίση με το άθροισμα της μέσης ισχύος κάθε κύματος.

γ) Επειδή $\omega_1 = \omega_2$ η μέση διαδιδόμενη ισχύς δίνεται από τη σχέση **(5)** και αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές των μεγεθών προκύπτει:

$$< P(x,t) >= ZA^2\omega^2[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] = \sqrt{T\rho}A^2\omega^2[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] =$$

$$= \sqrt{10^{-5} \cdot 0{,}1} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{6}[1 - \cos(\pi - \pi/4)] = 10^{-3} \cdot 10^{6} \cdot 10^{-4}(1 - \cos 3\pi/4) =$$

$$= 10^{-1}[1 - (-\sqrt{2}/2)] = 10^{-1} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow < P(x,t) >= 0{,}17 \ \text{Watt}$$