ΘΕΡΜΙΚΕΣ & ΨΥΚΤΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

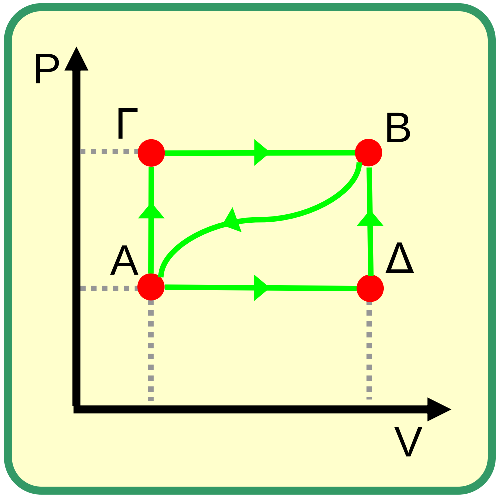
ΑΣΚΗΣΗ 1

Ιδανικό αέριο εκτελεί την μεταβολή από την κατάσταση Α στην κατάσταση Β. Αν γνωρίζεται ότι η θερμότητα που προσλαμβάνει στην μεταβολή $Α \rightarrow Γ \rightarrow Β$ είναι $Q_{ΑΓΒ} = 80$ J και εκτελεί έργο $W_{ΑΓΒ} = 30$J, υπολογίστε:

α) το ποσό θερμότητας που προσλαμβάνει $Q_{ΑΔΒ}$ αν το έργο που εκτελεί είναι $W_{ΑΔΒ} = 10$ J.

β) Αν στην μεταβολή ΒΑ προσφέρεται έργο $W_{ΒΑ} = 20$ J τι ποσό θερμότητας εκλύει $Q_{ΒΑ}$;

γ) Να βρεθεί η ποσότητα θερμότητας $Q_{ΑΔ}$ και $Q_{ΔΒ}$, αν $U_Δ – U_Α = 40$ J;



Από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο θα ισχύει:

$$Q_{ΑΓΒ} = ΔU_{ΑΒ} + W_{ΑΓΒ} \Rightarrow$$

$$ΔU_{ΑΒ} = Q_{ΑΓΒ} - W_{ΑΓΒ} = 80J - 30J = 50J$$

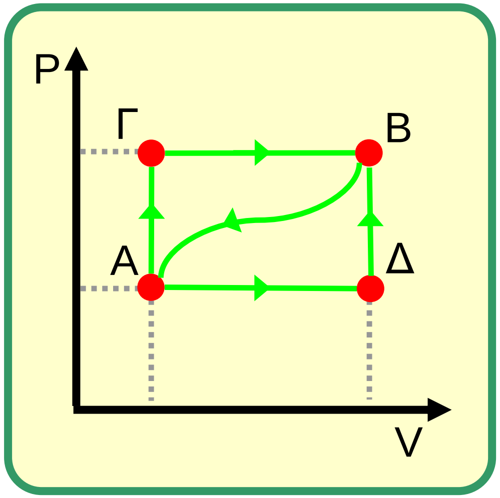
Η εσωτερική ενέργεια είναι καταστατικό μέγεθος η μεταβολή της είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή.

α) $Q_{ΑΔΒ} = ΔU_{ΑΒ} + W_{ΑΔΒ} = 50J + 10J = 60J$

β) $Q_{ΒΑ} = ΔU_{ΒΑ} + W_{ΒΑ} = -50J - 20J = -70J$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

γ) $\left.\begin{matrix}\Delta U_{A\Delta B} = 50J \\ \Delta U_{A\Delta} = 40J\end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta U_{\Delta B} = 10J$



$$Q_{A\Delta} = \Delta U_{A\Delta} + \underbrace{W_{A\Delta}}_{=W_{A\Delta B}} = 40J + 10J = 50J$$

$$Q_{\Delta B} = \Delta U_{\Delta B} + \underbrace{W_{\Delta B}}_{=0} = 10J$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ιδανικό αέριο 1 mole και γραμμομοριακής θερμοχωρητικότητας $C_V = 5R/2$ εκτελεί την μεταβολή από την κατάσταση Α στην κατάσταση Β με τρεις διαφορετικούς δρόμους, υπολογίστε:

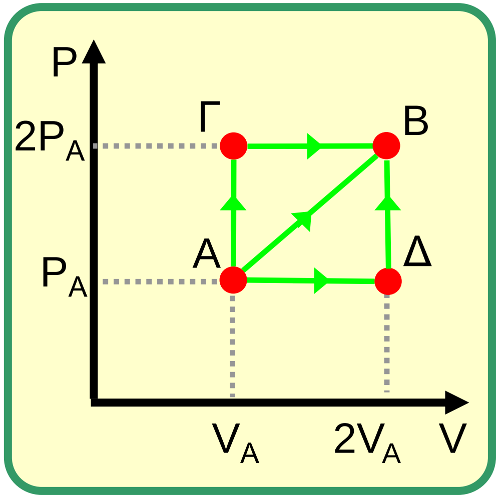
α) το ποσό θερμότητας $Q_{ΑΓΒ}$

β) το ποσό θερμότητας $Q_{ΑΔΒ}$

γ) το ποσό θερμότητας $Q_{ΑΒ}$

δ) ποια είναι η θερμοχωρητικότητα της μεταβολής ΑΒ

Οι απαντήσεις να είναι γραμμένες συναρτήσει του R και του T_A.



Μεταβολή από το Α → Γ ισόχωρη

$$\begin{cases} P_A V_A = \nu R T_A \\ P_\Gamma V_\Gamma = \nu R T_\Gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_A V_A = R T_A \\ 2P_A V_A = R T_\Gamma \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{T_A}{T_\Gamma} \Rightarrow T_\Gamma = 2T_A$$

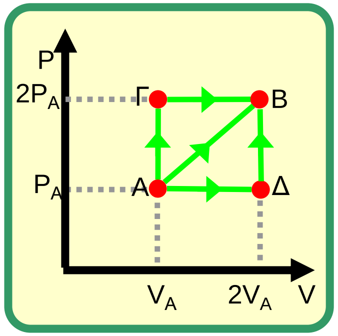
$$\Delta U_{A\Gamma} = \nu C_V \Delta T = C_V\left(T_\Gamma - T_A\right) = \frac{5}{2}R\left(2T_A - T_A\right) = \frac{5}{2}RT_A$$

$$W_{A\Gamma} = 0$$

$$Q_{A\Gamma} = W_{A\Gamma} + \Delta U_{A\Gamma} = \frac{5}{2}RT_A$$

Μεταβολή από το $\Gamma \rightarrow \mathrm{B}$ ισοβαρής

$$\begin{cases} P_\Gamma V_\Gamma = \nu R T_\Gamma \\ P_B V_B = \nu R T_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2P_A V_A = RT_\Gamma \\ 2P_A 2V_B = RT_B \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{T_\Gamma}{T_B} \Rightarrow T_B = 2T_\Gamma \overset{T_\Gamma = 2T_A}{\Rightarrow} T_B = 4T_A$$



$$\Delta U_{\Gamma B} = \nu C_V \Delta T = C_V\left(T_B - T_\Gamma\right) = \frac{5}{2}R\left(4T_A - T_A\right) = 5RT_A$$

$$W_{\Gamma B} = P_\Gamma\left(V_B - V_A\right) = 2P_A\left(2V_A - V_A\right) = 2P_A V_A = 2RT_A$$

$$Q_{\Gamma B} = W_{\Gamma B} + \Delta U_{\Gamma B} = 5RT_A + 2RT_A = 7RT_A$$

Μεταβολή από το $\mathrm{A} \rightarrow \Delta$ ισοβαρής

$$\begin{cases} P_A V_A = \nu R T_A \\ P_\Delta V_\Delta = \nu R T_\Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_A V_A = RT_A \\ P_A 2V_A = RT_\Delta \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{T_A}{T_\Delta} \Rightarrow T_\Delta = 2T_A$$

$$\Delta U_{A\Delta} = \nu C_V \Delta T = C_V\left(T_\Delta - T_A\right) = \frac{5}{2}R\left(2T_A - T_A\right) = \frac{5}{2}RT_A$$

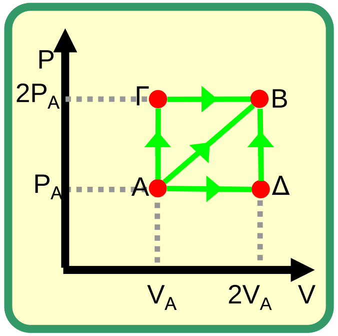
$$W_{A\Delta} = P_A\left(V_\Delta - V_A\right) = P_A\left(2V_A - V_A\right) = P_A V_A = RT_A$$

$$Q_{A\Delta} = W_{A\Delta} + \Delta U_{A\Delta} = \frac{5}{2}RT_A + RT_A = \frac{7}{2}RT_A$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Μεταβολή από το Δ → Β ισόχωρη

$$\begin{cases} P_\Delta V_\Delta = \nu R T_\Delta \\ P_B V_B = \nu R T_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_A 2V_A = RT_\Delta \\ 2P_A 2V_A = RT_B \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{T_\Delta}{T_B} \Rightarrow T_\Delta = \frac{T_B}{2} \overset{T_B=4T_A}{\Rightarrow} T_\Delta = 2T_A$$



$$\Delta U_{\Delta B} = \nu C_V \Delta T = C_V\left(T_B - T_\Delta\right) \overset{\substack{T_B=4T_A \\ T_\Delta=2T_A}}{=} \frac{5}{2} R 2T_A = 5RT_A$$

$$W_{\Delta B} = 0$$

$$Q_{\Delta B} = W_{\Delta B} + \Delta U_{\Delta B} = 5RT_A$$

Η θερμότητα που ανταλλάσει το αέριο με το περιβάλλον στις ζητούμενες διεργασίες είναι:

α) $Q_{A\Gamma B} = Q_{A\Gamma} + Q_{\Gamma B} = \frac{5}{2}RT_A + 7RT_A = \frac{19}{2}RT_A$

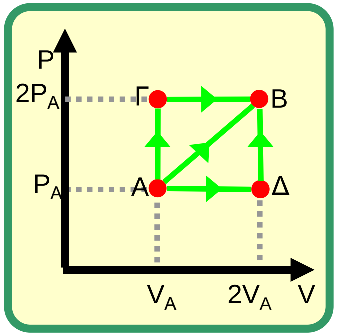
β) $Q_{A\Delta B} = Q_{A\Delta} + Q_{\Delta B} = \frac{7}{2}RT_A + 5RT_A = \frac{17}{2}RT_A$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

γ) $$W_{AB} = E_{\text{ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ}} = \frac{1}{2}(P_A + 2P_A)(2V_A - V_A) = \frac{3}{2}P_A V_A = \frac{3}{2}RT_A$$

$$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = U_B - U_\Delta + (U_\Delta - U_A) = \Delta U_{\Delta B} + \Delta U_{A\Delta} =$$

$$= \frac{5}{2}RT_A + 5RT_A = \frac{15}{2}RT_A$$



$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}RT_A + \frac{15}{2}RT_A = 9RT_A$$

δ) Η θερμοχωρητικότητα από το Α στο Β είναι:

$$C_{AB} = \frac{\delta Q}{dT} \Rightarrow \delta Q = C_{AB}dT \overset{*}{\Rightarrow} \int_A^B \delta Q = C_{AB}\int_A^B dT \Rightarrow Q_{AB} = C_{AB}(T_B - T_A) \overset{T_B=4T_A}{\Rightarrow}$$

$$C_{AB} = \frac{Q_{AB}}{3T_A} \Rightarrow C_{AB} = \frac{9RT_A}{3T_A} \quad C_{AB} = 3R$$

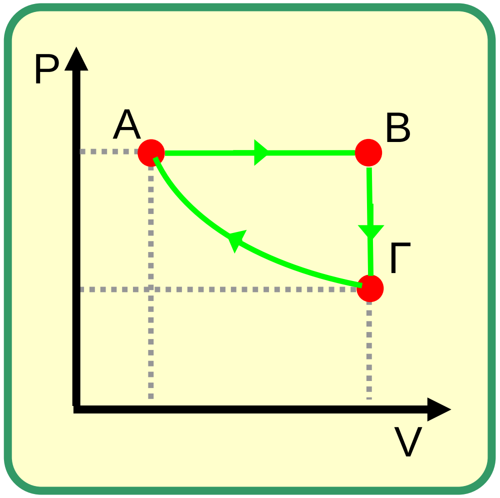
* Η μεταβολή είναι πολυτροπική με συνέπεια η θερμοχωρητικότητα της να είναι σταθερή, ο νόμος της μεταβολής αυτής είναι συγκεκριμένα:

$$PV^{-1} = P_A V_A^{-1} \Rightarrow PV^{-1} = \text{const}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 3

Υπολογίστε το έργο και τη θερμότητα σε κάθε διαδικασία, και τον συντελεστή απόδοσης σαν συνάρτηση των T_A, T_B και $T_Γ$. Το αέριο είναι ιδανικό και η ποσότητα του είναι 1 mole ενώ η μεταβολή ΓΑ είναι αδιαβατική.



Μεταβολή από το Α → Β ισοβαρής εκτόνωση

$$\Delta U_{AB} = \nu C_V \Delta T = C_V \left(T_B - T_A\right)$$

$$W_{AB} = P_A \left(V_B - V_A\right) = R\left(T_B - T_A\right)$$

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} =$$

$$= R\left(T_B - T_A\right) + C_V\left(T_B - T_A\right) \overset{C_P = C_V + R}{=} C_P\left(T_B - T_A\right)$$

Μεταβολή από το Β → Γ ισόχωρη ψύξη

$$\Delta U_{BΓ} = \nu C_V \Delta T = C_V \left(T_Γ - T_B\right)$$

$$W_{BΓ} = 0$$

$$Q_{BΓ} = W_{BΓ} + \Delta U_{BΓ} = C_V\left(T_Γ - T_B\right)$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Μεταβολή από το $\Gamma \rightarrow A$ αδιαβατική συμπίεση

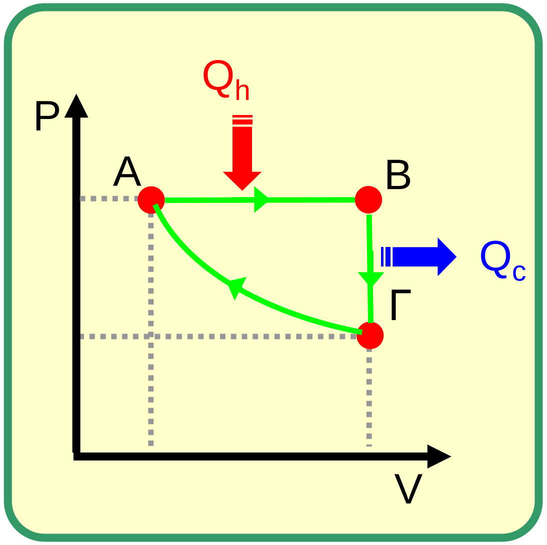
$$\Delta U_{\Gamma A} = \nu C_V \Delta T = C_V \left(T_A - T_\Gamma\right)$$

$$Q_{\Gamma A} = 0$$

$$W_{\Gamma A} = -\Delta U_{\Gamma A} = C_V \left(T_\Gamma - T_A\right)$$

Επειδή ο κύκλος είναι δεξιόστροφος η μηχανή που εκτελεί αυτή τη διαδικασία είναι θερμική. Ο συντελεστής απόδοσης θα είναι:

$$\eta = 1 + \frac{Q_c}{Q_h}$$



Όμως

$$Q_h = Q_{AB} = C_P \left(T_B - T_A\right) > 0$$

$$Q_c = Q_{B\Gamma} = C_V \left(T_\Gamma - T_B\right) < 0$$

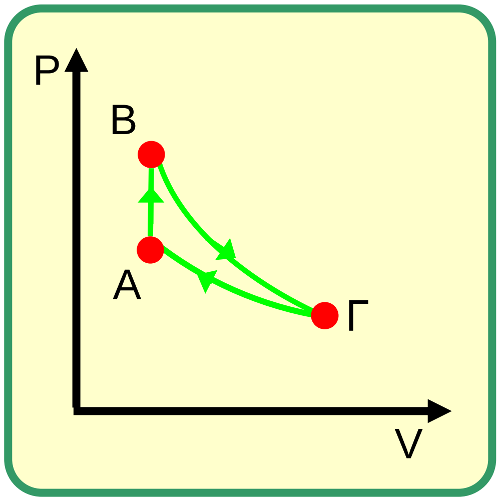
και $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$

Άρα $\eta = 1 + \dfrac{Q_c}{Q_h} = 1 + \dfrac{C_V \left(T_\Gamma - T_B\right)}{C_P \left(T_B - T_A\right)} = 1 - \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{\left(T_B - T_\Gamma\right)}{\left(T_B - T_A\right)}$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 4

Θερμική μηχανή με ιδανικό αέριο εκτελεί αντιστρεπτό κύκλο, που αποτελείται από μία ισόχωρη (ΑΒ), μία αδιαβατική (ΒΓ) και μία ισόθερμη (ΓΑ) διαδικασία. Υπολογίστε το ποσό θερμότητας, που παίρνει το ιδανικό αέριο σε κάθε στάδιο του κύκλου. Υπολογίστε το συντελεστή απόδοσης της μηχανής σαν συνάρτηση της μέγιστης T_B και ελάχιστης T_A θερμοκρασίας



Μεταβολή από το Α $\rightarrow$ Β ισόχωρη θέρμανση

$$\Delta U_{AB} = \nu C_V \Delta T = \nu C_V \left(T_B - T_A\right) \qquad W_{AB} = 0$$

$$Q_{AB} = W_{AB} + \Delta U_{AB} = \nu C_V \left(T_B - T_A\right)$$

Μεταβολή από το Β $\rightarrow$ Γ αδιαβατική εκτόνωση

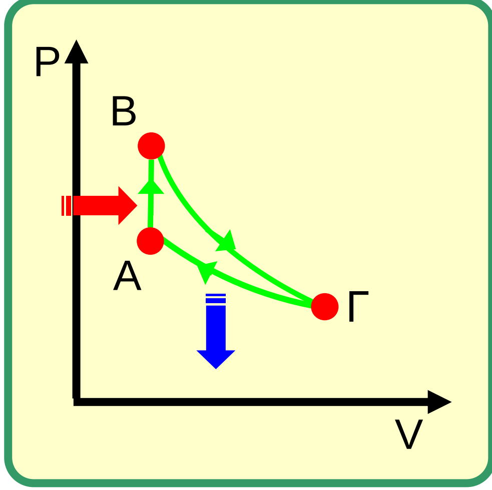
$$\Delta U_{B\Gamma} = \nu C_V \Delta T = \nu C_V \left(T_\Gamma - T_A\right) \qquad Q_{\Gamma B} = 0 \qquad W_{B\Gamma} = -\Delta U_{B\Gamma}$$

Μεταβολή από το Γ $\rightarrow$ Α ισόθερμη συμπίεση

$$\Delta U_{\Gamma A} = 0$$

$$W_{\Gamma A} = \int P dV = \nu R T_\Gamma \int_{V_\Gamma}^{V_A} \frac{dV}{V} \overset{T_\Gamma = T_A}{=} \nu R T_A \ln \frac{V_A}{V_\Gamma}$$

$$Q_{\Gamma A} = \nu R T_A \ln \frac{V_A}{V_\Gamma}$$



Για την αδιαβατική μεταβολή ΒΓ ισχύει η σχέση του Poisson:

$$TV^{\gamma-1} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Άρα $$T_B V_B^{\gamma-1} = T_\Gamma V_\Gamma^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_B}{V_\Gamma} = \left(\frac{T_\Gamma}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \overset{\substack{V_B=V_A \\ T_\Gamma=T_A}}{\Rightarrow} \frac{V_A}{V_\Gamma} = \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Επομένως, η εκλυόμενη θερμότητα στο περιβάλλον θα είναι:

$$Q_{\Gamma A} = \nu R T_A \ln\frac{V_A}{V_\Gamma} = \nu R T_A \ln\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \nu\frac{R}{\gamma-1} T_A \ln\frac{T_A}{T_B} = \nu C_V T_A \ln\frac{T_A}{T_B}$$

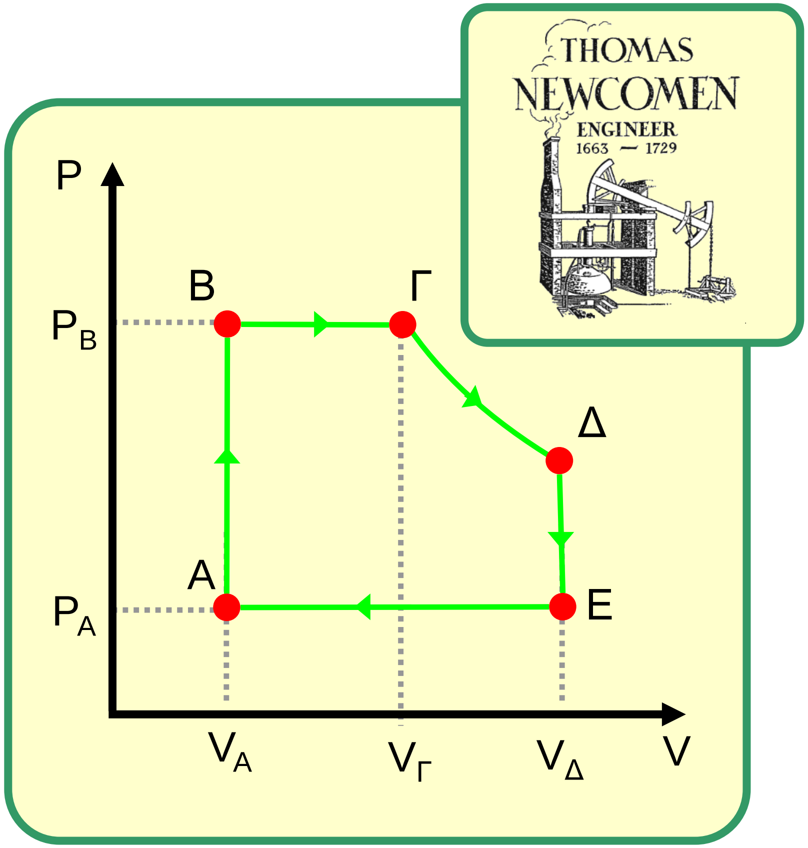
Ο συντελεστής απόδοσης θα είναι:

$$\eta = 1 + \frac{Q_{\Gamma A}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{\nu C_V T_A \ln\frac{T_A}{T_B}}{\nu C_V\left(T_B - T_A\right)} = 1 + \frac{T_A}{\left(T_B - T_A\right)}\ln\frac{T_A}{T_B} = 1 - \frac{T_A}{\left(T_B - T_A\right)}\ln\frac{T_B}{T_A}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ο κύκλος εργασίας μίας ιδανικής ατμομηχανής παριστάνεται στο επόμενο σχήμα. Η μεταβολή ΓΔ είναι αδιαβατική εκτόνωση. Αν είναι γνωστά οι όγκοι V_A,$V_Γ$,$V_Δ$ οι πιέσεις P_A, P_B και ο συντελεστής Poisson του ατμού γ, να υπολογίσετε το έργο της μηχανής που εκτελείται σε κάθε κύκλο.



Το έργο σε ένα κύκλο είναι το εμβαδό που περικλείεται από την κυκλική διαδικασία

$$W_{AB} = 0$$

$$W_{BΓ} = P_B\left(V_Γ - V_A\right)$$

$$W_{ΓΔ} = \frac{P_Δ V_Δ - P_Γ V_Γ}{\gamma - 1} \overset{P_Δ V_Δ^\gamma = P_Γ V_Γ^\gamma}{=} \frac{P_Γ \frac{V_Γ^\gamma}{V_Δ^\gamma} V_Δ - P_Γ V_Γ}{\gamma - 1} =$$

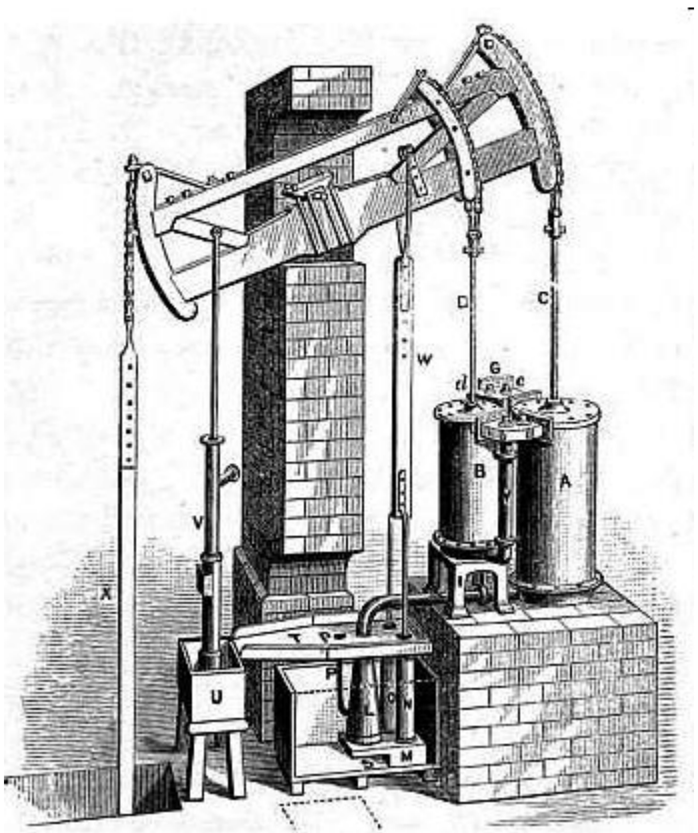
$$= \frac{P_Γ V_Γ}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_Γ}{V_Δ}\right)^{\gamma-1} - 1\right] \overset{P_Γ = P_B}{=} \frac{P_B V_Γ}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_Γ}{V_Δ}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$$

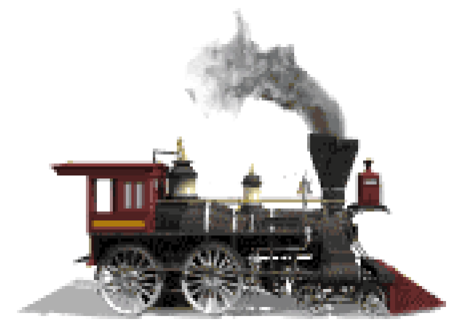
$$W_{ΔE} = 0$$

$$W_{EA} = P_A\left(V_A - V_E\right) = -P_A\left(V_Δ - V_A\right)$$

Άρα το έργο που εκτελεί η ατμομηχανή σε ένα κύκλο είναι:

$$W_{B\Gamma} = P_B\left(V_\Gamma - V_A\right) + \frac{P_B V_\Gamma}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_\Gamma}{V_\Delta}\right)^{\gamma-1} - 1\right] - P_A\left(V_\Delta - V_A\right)$$





ΑΣΚΗΣΗ 6

Θερμική μηχανή Carnot που έχει συντελεστή απόδοσης η = 40%, αρχίζει να χρησιμοποιείται με τις ίδιες δεξαμενές θερμότητας ως ψυκτική μηχανή. Πόση θερμότητα Q_c μπορεί αυτή η μηχανή να μεταφέρει από τη ψυχρή δεξαμενή στο θερμαντικό σώμα σε έναν κύκλο, αν σε αυτό το διάστημα της προσφέρεται έργο W = 10kJ;

Η συσχέτιση της απόδοσης μίας ψυκτικής μηχανής ξ_ψ με την απόδοση μία θερμικής είναι:

$$\xi_\psi = \frac{1}{\eta} - 1 = 1.5$$

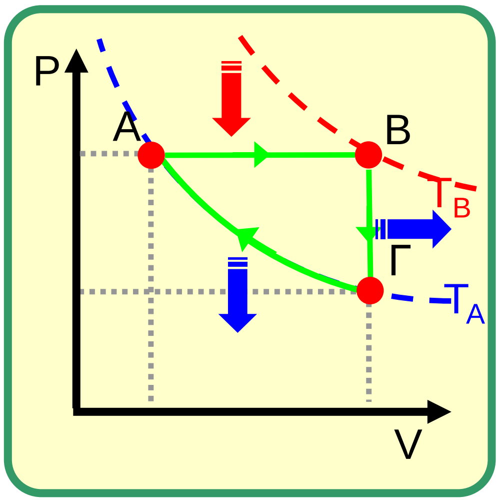
Ο βέλτιστος κύκλος σε μία ψυκτική μηχανή είναι να απορροφηθεί το μέγιστο ποσό θερμότητας Q_c από την ψυχρή δεξαμενή (ωφέλιμη ενέργεια) προς τη μικρότερη δυνατή κατανάλωση μηχανικού έργου W.

$$\xi_\psi = \frac{|Q_c|}{W} \Rightarrow |Q_c| = W\xi_\psi \Rightarrow Q_c = 10\text{kJ} \cdot 1.5 = 15\text{kJ}$$

Προσλαμβάνει
θερμότητα Q > 0

ΑΣΚΗΣΗ 7

Θερμική μηχανή με ιδανικό αέριο 1 mole εκτελεί αντιστρεπτό κύκλο, που φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε το ποσό θερμότητας, και το έργο κάθε στάδιο του κύκλου. Υπολογίστε το συντελεστή απόδοσης της μηχανής σαν συνάρτηση της μέγιστης T_B και ελάχιστης T_A θερμοκρασίας (και των R, C_P, C_V).



Μεταβολή από το A → B ισοβαρής εκτόνωση

$$W_{AB} = P_A\left(V_B - V_A\right) = P_A V_B - P_A V_A = P_B V_B - P_A V_A = \overset{\nu=1}{=} RT_B - RT_A = R\left(T_B - T_A\right)$$

$$Q_{AB} \overset{\nu=1}{=} C_P\left(T_B - T_A\right)$$

Μεταβολή από το B → Γ ισόχωρη ψύξη

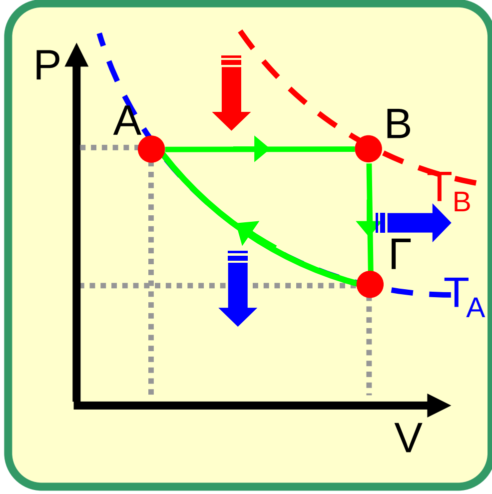
$$W_{B\Gamma} = 0$$

$$Q_{B\Gamma} = \Delta U_{B\Gamma} \overset{\nu=1}{=} C_V\left(T_\Gamma - T_B\right) \overset{T_\Gamma = T_A}{=} C_V\left(T_A - T_B\right)$$

Μεταβολή από το Γ → A ισόθερμη συμπίεση

$$W_{\Gamma A} = \int_\Gamma^A P dV = RT_A \int_{V_\Gamma}^{V_A} \frac{dV}{V} = RT_A \ln\frac{V_A}{V_\Gamma} \qquad Q_{\Gamma A} = W_{\Gamma A}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ | Π.Φ. ΜΟΙΡΑ
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com



Επειδή η μεταβολή από το A → B ισοβαρής ισχύει

$$\begin{cases} P_A V_A = \nu R T_A \\ P_B V_B = \nu R T_B \end{cases} \overset{P_A = P_B}{\Rightarrow} \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

Και επειδή η μεταβολή B → Γ είναι ισόχωρη $V_B = V_\Gamma$ θα έχουμε:

$$\frac{V_A}{V_\Gamma} = \frac{T_A}{T_B}$$

Άρα $W_{\Gamma A} = RT_A \ln\frac{V_A}{V_\Gamma} = RT_A \ln\frac{T_A}{T_B}$ και συνεπώς $Q_{\Gamma A} = RT_A \ln\frac{T_A}{T_B}$

Το σύστημα απορροφάει θερμότητα από την θερμή δεξαμενή θερμοκρασίας T_B:

$$Q_h = Q_{AB} = C_P\left(T_B - T_A\right)$$

Το σύστημα προσφέρει θερμότητα στην ψυχρή δεξαμενή θερμοκρασίας T_A:

$$Q_c = Q_{B\Gamma} + Q_{\Gamma A} = C_V\left(T_A - T_B\right) + RT_A \ln\frac{T_A}{T_B} = -C_V\left(T_B - T_A\right) - RT_A \ln\frac{T_B}{T_A}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής είναι:

$$\eta = 1 + \frac{Q_c}{Q_h} = 1 + \frac{-C_V\left(T_B - T_A\right) - RT_A \ln\frac{T_B}{T_A}}{C_P\left(T_B - T_A\right)} =$$

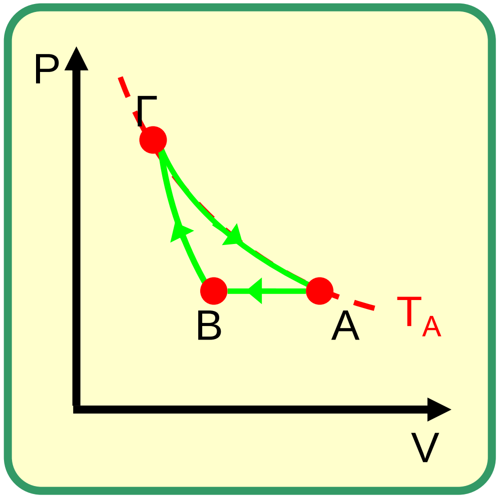
$$= \frac{C_P\left(T_B - T_A\right) - C_V\left(T_B - T_A\right) - RT_A \ln\frac{T_B}{T_A}}{C_P\left(T_B - T_A\right)} = \qquad \left(C_P = C_V + R\right)$$

$$= \frac{R\left(T_B - T_A\right) - RT_A \ln\frac{T_B}{T_A}}{C_P\left(T_B - T_A\right)}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 8

Θερμική μηχανή με ιδανικό αέριο εκτελεί αντιστρεπτό κύκλο, που φαίνεται στο σχήμα. Η κυκλική διαδικασία αποτελείται από την ισοβαρή συμπίεση ΑΒ, αδιαβατική συμπίεση ΒΓ και ισόθερμη εκτόνωση. Υπολογίστε το ποσό θερμότητας σε κάθε στάδιο του κύκλου και το συντελεστή απόδοσης της μηχανής σαν συνάρτηση της μέγιστης T_A και ελάχιστης T_B θερμοκρασίας.



Μεταβολή από το Α $\rightarrow$ Β ισοβαρής συμπίεση

$$Q_{AB} = \nu C_P \left(T_B - T_A\right) = -\nu C_P \left(T_A - T_B\right)$$

Μεταβολή από το Β $\rightarrow$ Γ αδιαβατική συμπίεση

$$Q_{B\Gamma} = 0$$

Μεταβολή από το Γ $\rightarrow$ Α ισόθερμη εκτόνωση

$$Q_{\Gamma A} = W_{\Gamma A} = \int_{\Gamma}^{A} P dV = \nu R T_A \int_{V_\Gamma}^{V_A} \frac{dV}{V} = \nu R T_A \ln \frac{V_A}{V_\Gamma}$$

Επειδή η μεταβολή από το Γ → Α είναι ισόθερμη ισχύει

$$\begin{cases} P_\Gamma V_\Gamma = \nu R T_\Gamma \\ P_A V_A = \nu R T_A \end{cases} \overset{T_\Gamma = T_A}{\Rightarrow} \frac{V_A}{V_\Gamma} = \frac{P_\Gamma}{P_A}$$

Επειδή η μεταβολή από το Α → Β είναι ισοβαρής $P_B = P_A$ άρα: $\dfrac{V_A}{V_\Gamma} = \dfrac{P_\Gamma}{P_B}$

Η μεταβολή από το Β → Γ είναι αδιαβατική άρα:

$$T_B^\gamma P_B^{1-\gamma} = T_\Gamma^\gamma P_\Gamma^{1-\gamma} \Rightarrow \frac{P_\Gamma^{1-\gamma}}{P_B^{1-\gamma}} = \frac{T_B^\gamma}{T_\Gamma^\gamma} \Rightarrow \frac{P_\Gamma}{P_B} = \left(\frac{T_B}{T_\Gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις παίρνουμε: $\dfrac{V_A}{V_\Gamma} = \left(\dfrac{T_B}{T_\Gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$

Άρα, θα έχουμε:

$$Q_{\Gamma A} = \nu R T_A \ln\frac{V_A}{V_\Gamma} = \nu R T_A \ln\left(\frac{T_B}{T_\Gamma}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \overset{T_\Gamma = T_A}{=} \nu \frac{\gamma R}{1-\gamma} T_A \ln\frac{T_B}{T_A} = \nu \underbrace{\frac{\gamma R}{\gamma - 1}}_{C_P} T_A \ln\frac{T_A}{T_B} = \nu C_P T_A \ln\frac{T_A}{T_B}$$

Ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής είναι:

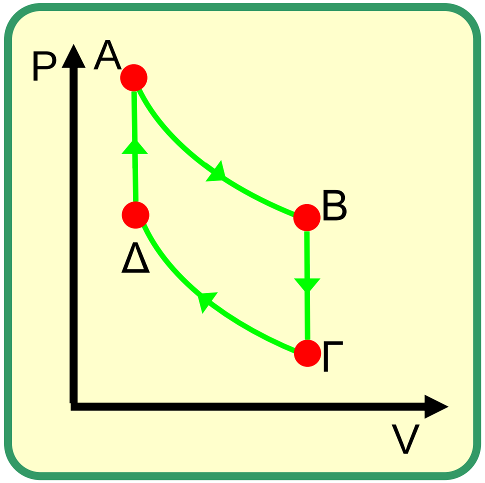
$$\eta = 1 + \frac{Q_{AB}}{Q_{\Gamma A}} = 1 + \frac{-\nu C_P (T_A - T_B)}{\nu C_P T_A \ln\frac{T_A}{T_B}} = 1 - \frac{T_A - T_B}{T_A \ln\frac{T_A}{T_B}}$$

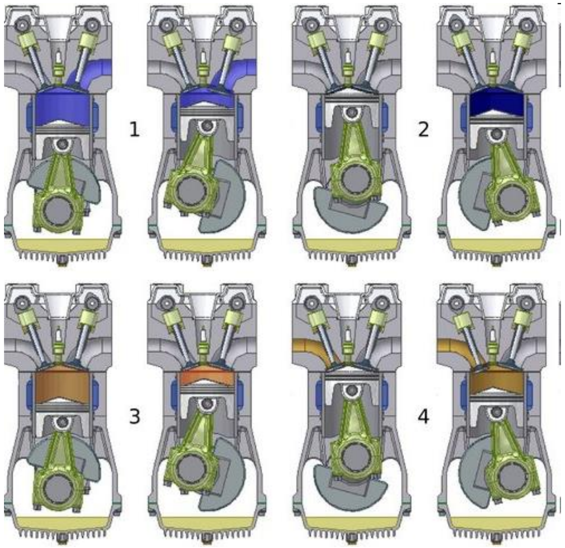
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 9

Θερμική μηχανή με ιδανικό αέριο εκτελεί ιδανικό αντιστρεπτό κύκλο (Otto), που φαίνεται στο σχήμα. Η κυκλική διαδικασία αποτελείται από δύο αδιαβατικές και δύο ισόχωρες μεταβολές. Υπολογίστε το συντελεστή απόδοσης της μηχανής σαν συνάρτηση των θερμοκρασιών T_A και T_B.

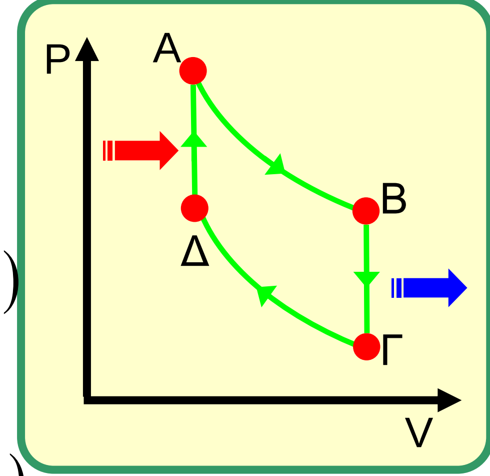
Μηχανή Otto





Πληροφορίες εικονικά εργαστήρια

http://www.106sportclub.gr/main/htlm_pages/articles/technical_articles/%CC%C5%CA1.htm
http://www2.marist.edu/physics/applets/ottoengi.html



Μεταβολή από το Α → Β αδιαβατική εκτόνωση $Q_{AB} = 0$

Μεταβολή από το Β → Γ ισόχωρη ψύξη $Q_{B\Gamma} = \nu C_V (T_\Gamma - T_B)$

Μεταβολή από το Γ → Δ αδιαβατική συμπίεση $Q_{\Gamma\Delta} = 0$

Μεταβολή από το Δ → Α ισόχωρη θέρμανση $Q_{\Delta A} = \nu C_V (T_A - T_\Delta)$

Επειδή η μεταβολή Α → Β είναι αδιαβατική $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$ (1)

Επειδή η μεταβολή Γ → Δ είναι αδιαβατική $T_\Delta V_\Delta^{\gamma-1} = T_\Gamma V_\Gamma^{\gamma-1} \xRightarrow[V_\Gamma = V_B]{V_\Delta = V_A} T_\Delta V_A^{\gamma-1} = T_\Gamma V_B^{\gamma-1}$ (2)

(1) - (2) $\Rightarrow (T_A - T_\Delta) V_A^{\gamma-1} = (T_B - T_\Gamma) V_B^{\gamma-1} \Rightarrow \dfrac{T_B - T_\Gamma}{T_A - T_\Delta} = \dfrac{V_A^{\gamma-1}}{V_B^{\gamma-1}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \dfrac{T_B - T_\Gamma}{T_A - T_\Delta} = \dfrac{T_B}{T_A}$

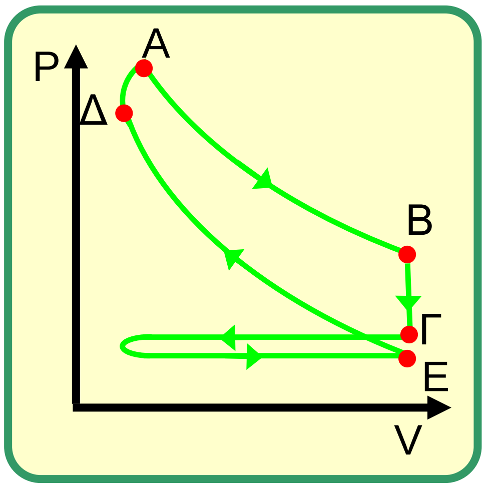
Ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής Otto είναι:

$$\eta = 1 + \frac{Q_{B\Gamma}}{Q_{\Delta A}} = 1 + \frac{\nu C_V (T_\Gamma - T_B)}{\nu C_V (T_A - T_\Delta)} = 1 - \frac{T_B - T_\Gamma}{T_A - T_\Delta} = 1 - \frac{T_B}{T_A}$$

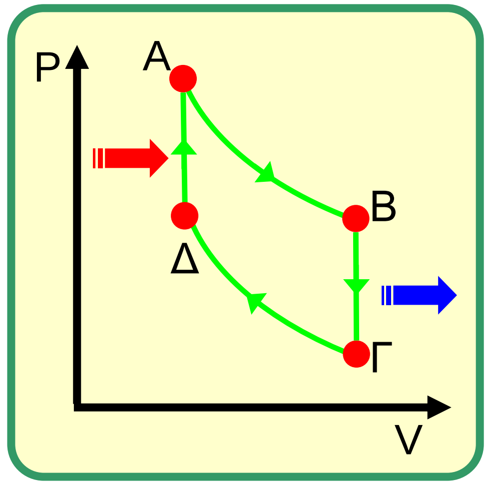
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Στην πραγματικότητα ο τετράχρονος κινητήρας εσωτερικής καύσης Otto έχει το επόμενο διάγραμμα P – V

Πραγματικός Κύκλος Otto



Ιδανικός Κύκλος Otto



$$\eta = 1 - \frac{T_B}{T_A} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}}$$

Ο λόγος αυτός ονομάζεται βαθμός συμπίεσης και παίρνει τιμές από 8 έως 9 ενώ ο συντελεστής απόδοσης για βαθμό συμπίεσης 8 και γ = 1.4 είναι η = 0.56.

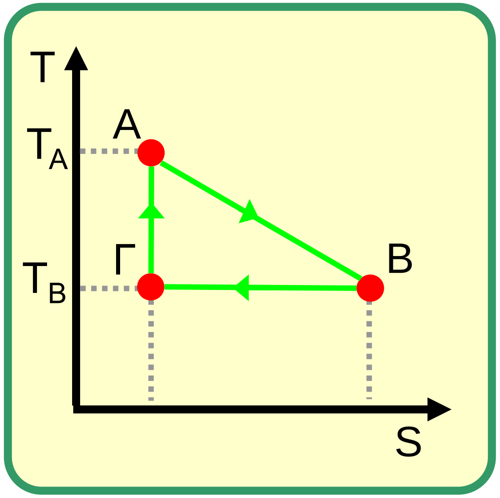
Ο πραγματικός όμως συντελεστής απόδοσης είναι συνήθως ο μισός από αυτόν που υπολογίσαμε. Η διαφορά οφείλεται στις διαφορές του πραγματικού και ιδανικού κύκλου, το καύσιμο δεν καίγεται πλήρως τα τοιχώματα του κυλίνδρου δεν είναι αδιαβατικά και υπάρχουν τριβές.

Συνήθως ο συντελεστής απόδοσης των τετράχρονων μηχανών εσωτερικής καύσης είναι της τάξης η = 0.25

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 10

Θερμική μηχανή με τυχαίο υλικό σαν σώμα εργασίας εκτελεί αντιστρεπτό θερμοδυναμικό κύκλο του επόμενου σχήματος. Να υπολογιστεί ο συντελεστής απόδοσης σαν συνάρτηση των T_A και T_B.



Η εντροπία για αντιστρεπτές μεταβολές ορίζεται από τη σχέση

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow Q = \int T dS$$

Δηλαδή στο διάγραμμα T – S το «εμβαδό» μίας γραμμής θα αντιπροσωπεύει θερμότητα.

$$Q_{AB} = E_{ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ} = \frac{1}{2}(T_A + T_B)(S_B - S_A)$$

$$Q_{B\Gamma} = T_B(S_\Gamma - S_B) \overset{S_\Gamma = S_A}{=} T_B(S_A - S_B) = -T_B(S_B - S_A)$$

$$Q_{\Gamma A} = 0$$

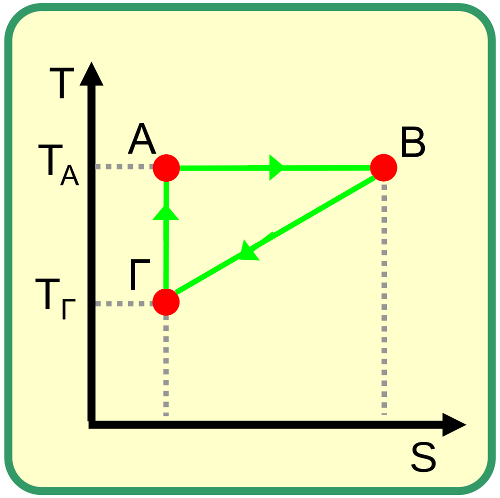
Ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής θα είναι:

$$\eta = 1 + \frac{Q_{B\Gamma}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{-T_B(S_B - S_A)}{\frac{1}{2}(T_A + T_B)(S_B - S_A)} = 1 - 2\frac{T_B}{T_A + T_B} = \frac{T_A + T_B - 2T_B}{T_A + T_B} = \frac{T_A - T_B}{T_A + T_B}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 11

Θερμική μηχανή με τυχαίο υλικό σαν σώμα εργασίας εκτελεί αντιστρεπτό θερμοδυναμικό κύκλο του επόμενου σχήματος. Να υπολογιστεί ο συντελεστής απόδοσης σαν συνάρτηση των T_A και T_Γ.



$$Q_{AB} = T_A\left(S_B - S_A\right)$$

$$Q_{B\Gamma} = \frac{1}{2}\left(T_B + T_\Gamma\right)\left(S_\Gamma - S_B\right) \overset{\substack{S_\Gamma = S_A \\ T_\Gamma = T_A}}{=} -\frac{1}{2}\left(T_B + T_A\right)\left(S_B - S_A\right)$$

$$Q_{\Gamma A} = 0$$

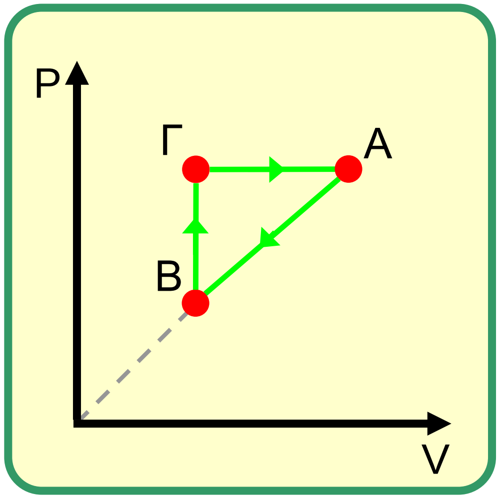
Ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής θα είναι:

$$\eta = 1 + \frac{Q_{B\Gamma}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}\left(T_B + T_A\right)\left(S_B - S_A\right)}{T_A\left(S_B - S_A\right)} = 1 - \frac{1}{2}\frac{T_B + T_A}{T_A} = \frac{T_A - T_B}{2T_A}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΑΣΚΗΣΗ 12

Θερμική μηχανή με ιδανικό αέριο εκτελεί αντιστρεπτό θερμοδυναμικό κύκλο του επόμενου σχήματος. Να υπολογιστεί η θερμότητα που ανταλάσει το αέριο σε κάθε διαδικασία και ο συντελεστής απόδοσης σαν συνάρτηση των T_A και T_Γ.



Εφόσον το άεριο είναι ιδανικό θα είναι γνωστά τα C_P, C_V

Η μεταβολή από το A στο B είναι πολυτροπική με συνέπεια η θερμοχωρητικότητα της να είναι σταθερή, ο νόμος της μεταβολής αυτής είναι συγκεκριμένα:

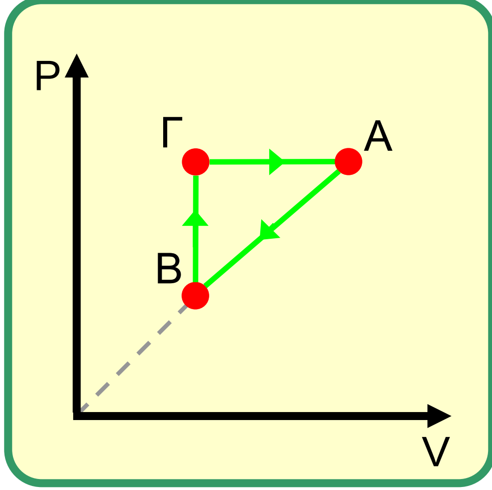
$$PV^{-1} = \text{const}$$

με συντελεστή πολυτροπικής s = -1 όμως ισχύει:

$$s = \frac{C - C_P}{C - C_V} \overset{S=-1}{\Rightarrow} C_V - C = C - C_P \Rightarrow C = \frac{C_V + C_P}{2}$$

Από τον ορισμό της θερμοχωρητικότητας θα έχουμε:

$$\nu C = \frac{\delta Q}{dT} \Rightarrow \delta Q = \nu C dT \overset{C=\text{const}}{\Rightarrow} Q_{AB} = \nu C\left(T_B - T_A\right) \Rightarrow Q_{AB} = \nu\frac{C_P + C_V}{2}\left(T_B - T_A\right)$$



Μεταβολή από το Β → Γ ισόχωρη θέρμανση

$$Q_{B\Gamma} = \Delta U_{B\Gamma} = \nu C_V\left(T_\Gamma - T_B\right)$$

Μεταβολή από το Β → Γ ισοβαρής εκτόνωση

$$Q_{\Gamma A} = \nu C_P\left(T_A - T_\Gamma\right)$$

Τα αποτελέσματα πρέπει να γραφούν συναρτήσει των T_A και T_B άρα πρέπει να βρούμε την T_Γ συναρτήσει των δύο προηγούμενων .

Επειδή η Β → Γ είναι ισόχωρη ισχύει: $\dfrac{P_B}{T_B} = \dfrac{P_\Gamma}{T_\Gamma} \Rightarrow \dfrac{T_\Gamma}{T_B} = \dfrac{P_\Gamma}{P_B} \overset{P_\Gamma = P_A}{\Rightarrow} \dfrac{T_\Gamma}{T_B} = \dfrac{P_A}{P_B}$ (1)

Επειδή η Α → Β έχει νόμο:

$$\frac{P}{V} = \text{const} \Rightarrow \frac{P^2}{T} = \text{const} \Rightarrow \frac{P_A^2}{T_A} = \frac{P_B^2}{T_B} \Rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{1/2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{T_\Gamma}{T_B} = \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{1/2} \Rightarrow T_\Gamma = \sqrt{T_A T_B}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα μας και αντικαθιστώντας την T_Γ θα έχουμε:

$$Q_{AB} = \nu \frac{C_P + C_V}{2}\left(T_B - T_A\right)$$

$$Q_{B\Gamma} = \nu C_V\left(T_\Gamma - T_B\right) = \nu C_V\left(\sqrt{T_A T_B} - T_B\right)$$

$$Q_{\Gamma A} = \nu C_P\left(T_A - T_\Gamma\right) = \nu C_P\left(T_A - \sqrt{T_A T_B}\right)$$

Ο συντελεστής απόδοσης της θερμικής μηχανής είναι:

$$\eta = 1 + \frac{Q_c}{Q_h} = 1 + \frac{Q_{AB}}{Q_{B\Gamma} + Q_{\Gamma A}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\nu\left(C_P + C_V\right)\left(T_B - T_A\right)}{\nu C_V\left(\sqrt{T_A T_B} - T_B\right) + \nu C_P\left(T_A - \sqrt{T_A T_B}\right)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{\left(C_P + C_V\right)\left(T_A - T_B\right)}{C_V\left(\sqrt{T_A T_B} - T_B\right) + C_P\left(T_A - \sqrt{T_A T_B}\right)}$$