ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ

1. Βασικά Αξιώματα Ειδικής Θεωρίας Σχετικότητας - Μετασχηματισμοί Lorentz

Σύμφωνα με την Κλασσική Μηχανική του Newton μια σταθερή δύναμη δύναται να προκαλέσει μια χωρίς όριο αύξηση της ταχύτητας ενός σώματος. Έτσι σύμφωνα με την Κλασσική Μηχανική η ταχύτητα ενός σώματος μπορεί να είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός.
Για τον λόγο αυτόν το 1905 ο Einstein ανέπτυξε την ειδική θεωρία της σχετικότητας με σκοπό να περιγράψει την κίνηση των σωμάτων που κινούνται με ταχύτητα συγκρίσιμη με αυτή του φωτός και να καλύψει το κενό της Κλασσικής Μηχανικής.
Η ειδική θεωρία της σχετικότητας βασίζεται σε δυο θεμελιώδη αξιώματα:

α) Όλοι οι νόμοι της Φυσικής είναι ίδιοι για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς **(αρχή της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας).**

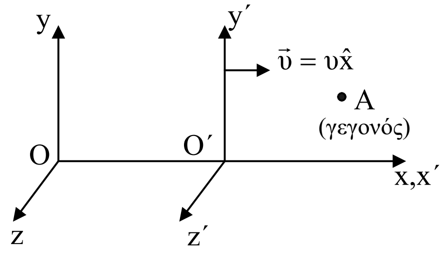
β) Η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι η ανώτερη τιμή ταχύτητας στη φύση $(c = 3\cdot 10^8\,\mathrm{m/sec})$ και είναι ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς **(αναλλοίωτο της ταχύτητας του φωτός)**.

Συνεπώς σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας όταν η ταχύτητα ενός σώματος προσεγγίζει την ταχύτητα του φωτός, υπό την επίδραση σταθερής δύναμης, τότε αυξάνεται η μάζα του και ενδίδει λιγότερο στην επιτάχυνση της δύναμης αυτής. Για το λόγο αυτό ορίζεται η **σχετικιστική μάζα m_r** ενός σωματίου ως:

$$\boxed{m_r = \frac{m_o}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \gamma m_o} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = 1/\sqrt{1-\beta^2} > 1,\ \beta = \upsilon/c < 1$, υ η ταχύτητα του σωματίου ως προς ακίνητο παρατηρητή και m_o η μάζα του σωματίου ως προς παρατηρητή για τον οποίο το σωμάτιο είναι ακίνητο **(μάζα ηρεμίας).**

Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας εισάγεται η έννοια του **χωροχρόνου (x,y,z,t)** σύμφωνα με τον οποίο ένα γεγονός περιγράφεται συνολικά από τέσσερις συντεταγμένες, από τις τρεις χωρικές συντεταγμένες και από το χρόνο.



Σχήμα 11.1

Έστω ένα γεγονός που πραγματοποιείται σε ένα σημείο Α του χωροχρόνου και δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς (παρατηρητές), το ακίνητο σύστημα Oxyz και το $O'x'y'z'$ κινούμενο ως προς το πρώτο με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{x}$ συγκρίσιμη με την ταχύτητα του φωτός.

Αν το γεγονός έχει συντεταγμένες (x,y,z,t) ως προς το Oxyz και (x', y', z', t') ως προς το $O'x'y'z'$ και τη χρονική στιγμή $t = t' = 0$ τα δυο συστήματα συμπίπτουν τότε οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες των δυο συστημάτων είναι:

$$\boxed{x' = \gamma(x - \upsilon t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)} \qquad \textbf{(2)}$$

Οι σχέσεις **(2)** λέγονται **μετασχηματισμοί Lorentz** και αποκαλύπτουν την άμεση εξάρτηση του χώρου και του χρόνου.

Επειδή το σύστημα Oxyz κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon} = -\upsilon\hat{x}$ ως προς το $O'x'y'z'$ μπορούν να υπολογιστούν οι **αντίστροφοι μετασχηματισμοί Lorentz,** δηλαδή οι συντεταγμένες (x,y,z,t) του γεγονότος Α στο Oxyz σύστημα συναρτήσει των συντεταγμένων (x', y', z', t') στο $O'x'y'z'$ αντικαθιστώντας στην **(2)** το υ με –υ και εναλλάσσοντας τα τονούμενα και άτονα μεγέθη. Επομένως:

$$\boxed{x = \gamma(x' + \upsilon t'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\upsilon}{c^2}x'\right)} \qquad \textbf{(3)}$$

☞ **Παρατηρήσεις:**

1) Επειδή $\upsilon < c$ είναι $\beta < 1$ και επομένως $\gamma > 1$.

2) Αν το κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{y}$ κατά τη διεύθυνση y τότε οι μετασχηματισμοί **(2)** παίρνουν την μορφή:

$$x' = x, \quad y' = \gamma(y - \upsilon t), \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}y\right)$$

Ανάλογα ισχύουν όταν $\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{z}$.

3) Για διαφορές των χωροχρονικών συντεταγμένων (Δx, Δy,Δz,Δt) και για απειροστές διαφορές αυτών ισχύουν σχέσεις μετασχηματισμού ανάλογες των **(2)** και **(3)**. Δηλαδή:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \upsilon \Delta t), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z, \quad \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x\right) \quad \text{και}$$

$$dx' = \gamma(dx - \upsilon dt), \quad dy' = dy, \quad dz' = dz, \quad dt' = \gamma\left(dt - \frac{\upsilon}{c^2}dx\right)$$

4) Παρατηρείται ότι για κίνηση στην σχετικιστική περιοχή (υ > 0,1c) ισχύουν οι παραπάνω μετασχηματισμοί Lorentz, από τους οποίους γίνεται φανερή η άμεση εξάρτηση των χωρικών συνιστωσών (x, y, z) και του χρόνου t.

Επομένως στην ειδική θεωρία της σχετικότητας εισάγεται η έννοια του **χωροχρόνου (x, y, z, t)** σύμφωνα με τον οποίο ένα γεγονός περιγράφεται συνολικά από τέσσερις συντεταγμένες, από τις τρεις χωρικές συντεταγμένες και από τον χρόνο.

5) Όταν η ταχύτητα του κινούμενου συστήματος είναι u < 0,1c, δηλαδή είναι στην κλασσική περιοχή οι μετασχηματισμοί Lorentz ανάγονται στους γνωστούς από την 1η Ενότητα μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

Αυτό αποδεικνύεται εύκολα γιατί για υ<<c είναι $\frac{\upsilon}{c^2} = 0$ και γ=1 οπότε οι

μετασχηματισμοί Lorentz γίνονται: $x' = x - \upsilon t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$

οι οποίοι είναι οι μετασχηματισμοί Γαλιλαίου.

2. Συνέπειες Μετασχηματισμών Lorentz

α) Ταυτοχρονικότητα

Σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας η έννοια του ταυτόχρονου δεν είναι απόλυτη, αλλά εξαρτάται από την κίνηση του παρατηρητή.
Έτσι αν δυο γεγονότα γίνονται ταυτόχρονα σε ακίνητο σύστημα Oxyz, δηλαδή Δt=0 τότε στο κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz είναι:

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x\right) \overset{\Delta t\,=\,0}{\Rightarrow} \Delta t' = -\gamma\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x$$

Αλλά: $$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \upsilon\Delta t) \overset{\Delta t\,=\,0}{\Rightarrow} \Delta x' = \gamma\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma}$$

οπότε η παραπάνω γίνεται:

$$\boxed{\Delta t' = -\frac{\upsilon}{c^2}\Delta x' \neq 0} \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα τα δύο γεγονότα δεν είναι ταυτόχρονα ως προς το κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ και μάλιστα η διαφορά χρόνου αυτών εξαρτάται από την απόστασή τους στο $O'x'y'z'$. Το αρνητικό πρόσημο της **(4)** υποδηλώνει ποιο γεγονός γίνεται πρώτο.
Αντίστοιχα δυο γεγονότα ταυτόχρονα στο $O'x'y'z'$ (δηλαδή Δt′=0) δεν θα είναι ταυτόχρονα ως προς το ακίνητο σύστημα Oxyz (δηλαδή $\Delta t \neq 0$).

β) Διαστολή χρόνου

Έστω ένα φαινόμενο το οποίο πραγματοποιείται στην ίδια θέση (x,0,0) ενός ακίνητου συστήματος αναφοράς Oxyz, δηλαδή Δx=0. Αν Δt είναι η χρονική διάρκεια του γεγονότος ως προς το Oxyz, τότε η διάρκειά του ως προς το κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ είναι σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz **(2)**:

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x\right) \overset{\Delta x=0}{\Rightarrow} \boxed{\Delta t' = \gamma\Delta t} \qquad \textbf{(5)}$$

Άρα αφού γ>1 είναι $\Delta t' > \Delta t$.

Αντίθετα αν το γεγονός συμβαίνει στην ίδια θέση κινούμενου συστήματος $O'x'y'z'$ (δηλαδή $\Delta x'=0$) με την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι η χρονική του διάρκεια ως προς το Oxyz είναι: $\Delta t=\gamma\Delta t'$ κι επειδή γ>1 είναι $\Delta t > \Delta t'$.

Άρα κάθε παρατηρητής που κινείται ως προς τη συσκευή μέτρησης (ρολόι) της χρονικής διάρκειας του γεγονότος μετρά μεγαλύτερη διάρκεια ως προς αυτόν που είναι ακίνητος ως προς το ρολόι.

✎ Εφαρμογή

Ένας αστροναύτης σε ένα διαστημόπλοιο ταξιδεύει με ταχύτητα 0,99c και αντιλαμβάνεται τη χρονική διάρκεια του ταξιδιού του ίση με 2y (y:year). Ποια είναι η διάρκεια του ταξιδιού σύμφωνα με έναν παρατηρητή στη γη;

Λύση

Λόγω διαστολής του χρόνου προκύπτει:

$$\Delta t=\gamma\Delta t'=\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\Delta t'=\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}99c)^2/c^2}}(2y)\Rightarrow \Delta t=14 \text{ years}$$

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα αυτό είναι δυνατόν κάποιος κινούμενος πολύ γρήγορα, να πραγματοποιήσει ένα πολύ μακρύ ταξίδι χωρίς να υποστεί τις συνέπειες του χρόνου (γήρανση).

γ) Συστολή μήκους

Έστω μια ράβδος μήκους L η οποία είναι ακίνητη κατά μήκος του άξονα x ενός ακίνητου συστήματος αναφοράς Oxyz. Αν τα άκρα της βρίσκονται στις θέσεις x_1 και x_2 είναι $L=\Delta x=x_2-x_1$. Ένας παρατηρητής στο σύστημα $O'x'y'z'$ κινείται με ταχύτητα $\upsilon\hat{x}$ ως προς το Oxyz και μετρά το μήκος της ράβδου, μετρώντας τις θέσεις των άκρων x_1' και x_2' ταυτόχρονα (δηλαδή $\Delta t'=0$). Το μήκος αυτό καθορίζεται ως $L'=\Delta x'=x_2'-x_1'$ και σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz είναι:

$$\Delta x=\gamma(\Delta x'+\upsilon\Delta t')\overset{\Delta t'=0}{\Rightarrow}\Delta x=\gamma\Delta x' \quad ή \quad L=\gamma L'\Rightarrow \boxed{L'=\frac{L}{\gamma}} \qquad \textbf{(6)}$$

Άρα αφού γ>1 είναι $L'<L$.

Στην περίπτωση που η ράβδος L' είναι ακίνητη στον άξονα x' του συστήματος $O'x'y'z'$ με την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι $L = L'/\gamma$ δηλαδή $L < L'$.
Συνεπώς κάθε παρατηρητής που κινείται παράλληλα στη ράβδο μετρά μήκος μικρότερο κατά παράγοντα γ από το μήκος αυτής στο σύστημα ως προς το οποίο είναι ακίνητη (μήκος ηρεμίας).

☞ **Παρατήρηση**

Αν ο παρατηρητής κινείται κάθετα στη ράβδο τότε το μήκος αυτής δεν αλλάζει. Ενώ αν η ράβδος σχηματίζει γωνία με τον άξονα x, ως προς τον οποίο κινείται ο παρατηρητής τότε συστολή μήκους παρατηρείται μόνο στην οριζόντια συνιστώσα της ενώ η κάθετη παραμένει αναλλοίωτη.

✎ **Εφαρμογή**

Διαστημόπλοιο μήκους 150 m πετάει ως προς ακίνητο παρατηρητή με ταχύτητα 0,5c. Ποιο είναι το μήκος του διαστημοπλοίου όπως το αντιλαμβάνεται ο ακίνητος παρατηρητής;

Λύση

Λόγω συστολής του μήκους προκύπτει:

$$L = \frac{L'}{\gamma} = \sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\; L' = \sqrt{1\text{-}(0,5)^2}\,(150\text{m}) \Rightarrow L = 130\text{m}$$

Δηλαδή ο ακίνητος παρατηρητής βλέπει το διαστημόπλοιο να έχει μικρότερο μήκος.

3. Μετασχηματισμός Ταχυτήτων Lorentz

Έστω ότι ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα που έχει συνιστώσες (u_x, u_y, u_z) ως προς ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς Oxyz, ενώ ως προς κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ που κινείται με ταχύτητα $\upsilon\hat{x}$ ως προς το Oxyz έχει συνιστώσες (u'_x, u'_y, u'_z). Οι σχέσεις που συνδέουν τις συνιστώσες της ταχύτητας στα δυο συστήματα είναι σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - \upsilon dt)}{\gamma\left(dt - \frac{\upsilon}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \boxed{u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x}} \quad \textbf{(7)}$$

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{\upsilon}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} \Rightarrow \boxed{u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)}} \quad \textbf{(8)}$$

$$u'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{\upsilon}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} \Rightarrow \boxed{u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon}{c^2}u_x\right)}} \quad \textbf{(9)}$$

Οι σχέσεις **(7)**, **(8)** και **(9)** αποτελούν τους **μετασχηματισμούς ταχυτήτων Lorentz.**
Για τον υπολογισμό των συνιστωσών της ταχύτητας του σωματιδίου στο Oxyz σύστημα συναρτήσει των αντίστοιχων συνιστωσών στο κινούμενο σύστημα $O'x'y'z'$ **(αντίστροφοι μετασχηματισμοί ταχυτήτων Lorentz)** στις παραπάνω αντικαθιστάται το υ με –υ και εναλλάσσονται τα τονούμενα και άτονα μεγέθη.
Επομένως:

$$\boxed{u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2}u'_x}, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{\upsilon}{c^2}u'_x\right)} \quad \text{και} \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{\upsilon}{c^2}u'_x\right)}} \quad \textbf{(10)}$$

Άσκηση 1

Τραίνο ιδίου μήκους (μήκος στο σύστημα αναφοράς του) L, κινείται με ταχύτητα $c/2$ ως προς το έδαφος. Μια μπάλα εκτοξεύεται από την πίσω άκρη του τραίνου προς τα εμπρός με ταχύτητα $c/3$ ως προς το τραίνο. Από την σκοπιά ενός παρατηρητή στο έδαφος
Α)Πόσο χρόνο διαρκεί η κίνηση της μπάλας (μέχρι να φτάσει στην εμπρόσθια άκρη του τραίνου)
Β)Τι διάστημα διανύει; (Αγνοείστε την επίδραση της βαρύτητας στην κίνηση της μπάλας)

Άσκηση 2

Ένας επιστήμονας κανονίζει να ανάψουν δύο ισχυρά φώτα S_1, S_2 ταυτόχρονα τα οποία βρίσκονται στις θέσεις $x_1 = 0$ και $x_2 = 30\text{km}$ αντίστοιχα. Ένας παρατηρητής ο οποίος κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 0.250c$ στη θετική διεύθυνση του άξονα x βλέπει τις δύο λάμψεις. Στο ΣΑ του παρατηρητή
Α) Ποιο το χρονικό διάστημα ανάμεσα στις δύο λάμψεις;
Β) Ποιο φως ανάβει πρώτα;

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας