ΤΕΛΕΣΤΕΣ.

$$\hat{A}\psi = \varphi$$

παραδείγματα:

- $\hat{x}\psi = x\psi$
- $\hat{p}_x \psi = -i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial x}$
- $\hat{\pi}\psi_{(x)} = \psi(-x)$: (τελεστής parity)
- $\hat{T}_a \psi(x) = \psi(x+a)$: (τελεστής μετάθεσης)

Γραμμικοί τελεστές: $\hat{A}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\hat{A}\psi_1 + c_2\hat{A}\psi_2$.

Άσκηση:

ν.δ.ο. οι $\hat{A} = \sin x \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}\sin x$ και $\hat{B} = -\cos x$ είναι ίσοι.

$$\hat{A}\psi(x) = \left(\sin x \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx}\sin x\right)\psi(x) = \sin x \frac{d\psi}{dx} - \frac{d}{dx}(\sin x\,\psi) =$$

$$= \cancel{\sin x \frac{d\psi}{dx}} - \left(\cos x\,\psi + \cancel{\sin x \frac{d\psi}{dx}}\right) = -\cos x\,\psi$$

και $\hat{B}\psi(x) = -\cos x\,\psi$

Άρα: $\hat{A}\psi = \hat{B}\psi \rightarrow \boxed{\hat{A} = \hat{B}}$

Άλγεβρα γραμμικών τελεστών.

1/ Άθροισμα τελεστών: $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$

δηλ. $\hat{C}\psi = (\hat{A} + \hat{B})\psi = \hat{A}\psi + \hat{B}\psi$.

2/ Γινόμενο τελεστών: $\hat{D} = \hat{A}\hat{B}$

δηλ. $\hat{D}\psi = (\hat{A}\hat{B})\psi = \hat{A}(\hat{B}\psi)$

Δεν ισχύει η μεταθετική ιδιότητα: $\hat{A}\hat{B}\psi \neq \hat{B}\hat{A}\psi$.

Άσκηση 1: ν.δ.ο. ότι $\hat{x}\hat{p}_x \neq \hat{p}_x\hat{x}$.

Είναι: $(\hat{x}\hat{p}_x)\psi = \hat{x}(\hat{p}_x\psi) = \hat{x}\Big(\underbrace{-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}}_{f(x)}\Big) = -i\hbar\, x\frac{\partial\psi}{\partial x}$ (1)

και: $(\hat{p}_x\hat{x})\psi = \hat{p}_x(\hat{x}\psi) = \hat{p}_x(\underbrace{x\psi}_{g(x)}) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\psi) =$

$$= -i\hbar\left(\psi + x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \quad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1), (2) παρατηρώ ότι $\hat{x}\hat{p}_x \neq \hat{p}_x\hat{x}$.

Άσκηση 2 Να βρεθεί ο τελεστής: $\hat{\Gamma} = (\hat{A} + \hat{B})^2$

Είναι:

$$\hat{\Gamma} = (\hat{A} + \hat{B})^2 = (\hat{A} + \hat{B})(\hat{A} + \hat{B}) = \hat{A}^2 + \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} + \hat{B}^2$$

δεν είναι ίσα!!

Αναμεταθέτης δύο τελεστών.

$$[\hat A,\hat B]=\hat A\hat B-\hat B\hat A$$

δηλ. αν $[\hat A,\hat B]=0$ τότε $\hat A\hat B=\hat B\hat A$.

Ιδιότητες:

1) $[\hat A,\hat B]=-[\hat B,\hat A]$

2) $[\hat A,\hat B+\hat C]=[\hat A,\hat B]+[\hat A,\hat C]$

3) ** $[\hat A\hat B,\hat C]=\hat A[\hat B,\hat C]+[\hat A,\hat C]\hat B$

4) ** $[\hat A,\hat B\hat C]=[\hat A,\hat B]\hat C+\hat B[\hat A,\hat C]$

5) $[\hat A,\lambda\hat B]=\lambda[\hat A,\hat B]=[\lambda\hat A,\hat B]$

6) $[\hat A,f(\hat A)]=0$, $[\hat A,\hat A^n]=0$, $[\hat A,\lambda]=0$

7) $[\hat A,f(\hat B)]=[\hat A,\hat B]f'(\hat B)$

$[\hat x_i,\hat x_j]=0 \to [x,y]=[y,z]=[z,x]=\dots=0$

$[\hat p_i,\hat p_j]=0 \to [\hat p_x,\hat p_y]=[\hat p_y,\hat p_z]=\dots=0$

$[\hat x_i,\hat p_j]=i\hbar\,\delta_{ij}$ $\qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{αν } i=j\\ 0, & \text{αν } i\neq j\end{cases}$

δέλτα Kronecker.

Άσκηση

α) ν.δ.ο. $[\hat x,\hat p_x]=i\hbar$

$\boxed{[\hat p_x,\hat x]=-[\hat x,\hat p_x]=-i\hbar.}$

$[\hat x,\hat p_x]\psi=(\hat x\hat p_x-\hat p_x\hat x)\psi=(\hat x\hat p_x)\psi-(\hat p_x\hat x)\psi=$

$=\hat x(\hat p_x\psi)-\hat p_x(\hat x\psi)=$

$=\hat x\left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-\hat p_x(x\psi)=$

$=x\left(-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\psi)=$

$=-i\hbar\cancel{x\frac{\partial\psi}{\partial x}}+i\hbar\left(\psi+\cancel{x\frac{\partial\psi}{\partial x}}\right)\to\boxed{[\hat x,\hat p_x]\psi=i\hbar\psi}$

δηλ. $[\hat x,\hat p_x]=i\hbar$

β) $[\hat x,\hat x^2]=?$

$[\hat x,\hat x^2]\psi=(\hat x\hat x^2-\hat x^2\hat x)\psi=(\hat x\hat x^2)\psi-(\hat x^2\hat x)\psi=$

$=\hat x(\hat x^2\psi)-\hat x^2(\hat x\psi)=\hat x(x^2\psi)-\hat x^2(x\psi)=$

$=xx^2\psi-x^2x\psi=x^3\psi-x^3\psi=\varnothing.$

Άσκηση $[\hat{L}_z, \hat{p}_x] = ?$

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}} \\ &\hat{\vec{r}} = \hat{x}\vec{i} + \hat{y}\vec{j} + \hat{z}\vec{k} \\ &\hat{\vec{p}} = \hat{p}_x\vec{i} + \hat{p}_y\vec{j} + \hat{p}_z\vec{k} \end{aligned}\right\} \to \hat{\vec{L}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix} \Longrightarrow$$

$$\to \hat{\vec{L}} = \vec{i}\,(\underbrace{\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y}_{\hat{L}}) - \vec{j}\,(\underbrace{\hat{x}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_x}_{\hat{L}_y}) + \vec{k}\,(\underbrace{\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x}_{\hat{L}_z})$$

Άρα: $[\hat{L}_z, \hat{p}_x] = [\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x, \hat{p}_x] \overset{(\iota\delta.\,2)}{=}$

$= [\hat{x}\hat{p}_y, \hat{p}_x] - [\hat{y}\hat{p}_x, \hat{p}_x] \overset{(\iota\delta.\,3)}{=}$

$= \hat{x}\,\overset{0}{\cancel{[\hat{p}_y, \hat{p}_x]}} + [\hat{x}, \hat{p}_x]\hat{p}_y - \hat{y}\,\overset{0}{\cancel{[\hat{p}_x, \hat{p}_x]}} - \overset{0}{\cancel{[\hat{y}, \hat{p}_x]}}\,\hat{p}_x =$

$= i\hbar\,\hat{p}_y = i\hbar\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) = -i^2\hbar^2\frac{\partial}{\partial y} \to$

$$\to \boxed{[\hat{L}_z, \hat{p}_x] = \hbar^2\frac{\partial}{\partial y}}$$

$= 0$

$= \dots = 0$

$\dots = 0$

$,$ αν $i = j$

$,$ αν $i \neq j$

$x, \hat{x}_y, \hat{x}_z$

$\hat{x}_y = \hat{y}$, $\hat{x}_z = \hat{z}$

Ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις τελεστών.

$$\boxed{\hat{A}\psi = \alpha\psi}$$ εξίσωση ιδιοτιμών

ψ: ιδιοσυναρτήσεις, α: ιδιοτιμή.

Αν $\hat{A}\psi_i = \alpha\psi_i \quad i = 1,2,3,\dots,m$

η ιδιοτιμή α παρουσιάζει τάξη εκφυλισμού m.

Άσκηση 1: ν.δ.ο. η $\psi(x) = c\, e^{i\frac{\lambda}{\hbar}x}$ είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή $\hat{p}_x$. Ποια είναι η ιδιοτιμή του.

Είναι $\hat{A} = \hat{p}_x$ οπότε:

$$\hat{A}\psi(x) = \hat{p}_x\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(c\, e^{i\frac{\lambda}{\hbar}x}\right) = -i\hbar c\, e^{i\frac{\lambda}{\hbar}x}\left(i\frac{\lambda}{\hbar}\right) = -i^2\cancel{\hbar}\frac{\lambda}{\cancel{\hbar}}\, c\, e^{i\frac{\lambda}{\hbar}x} = \lambda\psi(x)$$

Άρα ικανοποιεί την εξίσωση ιδιοτιμών κι επομένως η $\psi(x)$ αποτελεί ιδιοσυνάρτηση του $\hat{p}_x$ με ιδιοτιμή $\alpha = \lambda$.

Άσκηση 2

Έστω: $\hat{A} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Ποιες από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή:

α/ $\psi(x) = e^x$, β) $\psi(x) = x^2$, γ) $\psi(x) = \sin x$, δ/ $\psi(x) = \cos x + \sin x$

Λύση

α/ $\hat{A}\psi = \frac{\partial^2(e^x)}{\partial x^2} = e^x = 1\cdot\psi(x)$ είναι ιδιοσυνάρτηση του $\hat{A}$ με ιδιοτιμή $\alpha = 1$.

β/ $\hat{A}\psi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2) = 2$ δεν ικανοποιεί εξίσωση ιδιοτιμών οπότε δεν είναι ιδιοσυνάρτηση του $\hat{A}$.

γ/ $\hat{A}\psi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin x) = -\sin x = -\psi(x)$ είναι ιδιοσυνάρτηση με ιδιοτιμή $\alpha = -1$.

δ/ $\hat{A}\psi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\cos x + \sin x) = -\cos x - \sin x = -\psi(x)$ είναι ιδιοσυνάρτηση με $\alpha = -1$.

Άσκηση 3 Να βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις του $\hat{A} = x + \frac{d}{dx}$.

Έστω α η ιδιοτιμή του $\hat{A}$ οπότε:

$$\hat{A}\psi = \alpha\psi \to \left(x + \frac{d}{dx}\right)\psi = \alpha\psi \to x\psi + \frac{d\psi}{dx} = \alpha\psi \to$$

$$\to \frac{d\psi}{dx} = (\alpha - x)\psi \to \int\frac{d\psi}{\psi} = \int(\alpha - x)\underbrace{dx}_{-d(\alpha-x)} \to \ln\psi = -\frac{(\alpha-x)^2}{2} + \ln c \to$$

$$\to \ln\psi - \ln c = -\frac{(\alpha-x)^2}{2} \to \ln\left(\frac{\psi}{c}\right) = -\frac{(\alpha-x)^2}{2} \to \frac{\psi}{c} = e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{2}} \to$$

$$\to \boxed{\psi(x) = c\, e^{-(\alpha-x)^2/2}}$$

η c προσδιορίζεται από συνθήκη κανονικοποίησης.

Ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις τελεστών-

$$\boxed{\hat{A}\psi = \alpha\psi}$$ εξίσωση ιδιοτιμών

ιδιοτιμή.

ιδιοσυνάρτησης

Αν $\hat{A}\psi_i = \alpha\psi_i \quad i = 1,2,3,\dots,m$

η ιδιοτιμή α παρουσιάζει τάξη εκφυλισμού m.

Άσκηση 1: ν.δ.ο. η $\psi(x) = c\, e^{i\frac{\lambda}{\hbar}x}$ είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή $\hat{p}_x$.

Ποιά είναι η ιδιοτιμή του.

Είναι $\hat{A} = \hat{p}_x$ οπότε:

$$\hat{A}\psi(x) = \hat{p}_x\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left(c\, e^{i\frac{\lambda}{\hbar}x}\right) = -i\hbar c\, e^{i\frac{\lambda}{\hbar}x}\left(i\frac{\lambda}{\hbar}\right) =$$

$$= -i^2\cancel{\hbar}\frac{\lambda}{\cancel{\hbar}}\, c\, e^{i\frac{\lambda}{\hbar}x} = \lambda\psi(x)$$

Άρα ικανοποιεί την εξίσωση ιδιοτιμών κι επομένως η ψ(x) αποτελεί ιδιοσυνάρτηση του $\hat{p}_x$ με ιδιοτιμή $\alpha = \lambda$.

$$\int(\alpha - x)\,dx$$

$$-\int z\,dz$$

Άσκηση 1

ν.δ.ο. η $u(x) = e^{-\alpha x^2/2}$ είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή $\left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2x^2\right)$ και να βρεθεί την αντίστοιχη ιδιοτιμή.

Λύση

Έστω ο τελεστής $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2x^2$. Για να είναι η $u(x)$ ιδιοσυνάρτηση πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση ιδιοτιμών

$$\hat{A}\,u(x) = \lambda u(x) \quad \text{, όπου } \lambda \text{ η αντίστοιχη ιδιοτιμή}$$

Είναι: $\hat{A}u(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^2x^2\right)u(x) = \frac{d^2u}{dx^2} - \alpha^2x^2u$ ①

όπου: $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{-\alpha x^2/2}\right) = -\frac{\cancel{2}\alpha x}{\cancel{2}}\, e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$

και $\frac{d^2u}{dx^2} = -\alpha\frac{d}{dx}\left(x\, e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}\right) = -\alpha\left[1\cdot e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} + x\, e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}\left(-\frac{\cancel{2}\alpha x}{\cancel{2}}\right)\right] =$

$$= -\alpha\left(1 - \alpha x^2\right)\underbrace{e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}}_{u(x)} = -\alpha\left(1 - \alpha x^2\right)u(x) \quad ②$$

Άρα: (1) $\overset{(2)}{\rightsquigarrow}$ $\hat{A}u(x) = -\alpha(1 - \cancel{\alpha x^2})u(x) - \cancel{\alpha^2x^2}\,u(x) \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{\hat{A}\,u(x) = -\alpha\, u(x)}$ επαληθεύεται η εξίσωση ιδιοτιμών οπότε η u(x) είναι ιδιοσυνάρτηση του $\hat{A}$ με ιδιοτιμή $\underline{\lambda = -\alpha}$.