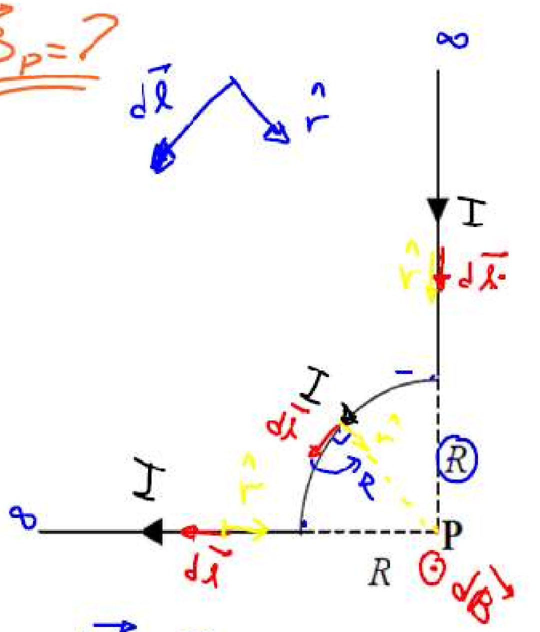
Άσκηση

Το σύρμα του σχήματος διαρρέεται από ρεύμα I. Το σύρμα αποτελείται από ένα κατακόρυφο τμήμα πολύ μεγάλου μήκους, ένα τεταρτημόριο περιφέρειας κύκλου ακτίνας R και από ένα δεύτερο οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα μεγάλου μήκους. Να υπολογίσετε το ολικό μαγνητικό πεδίο στο κέντρο καμπυλότητας του τεταρτημορίου (σημείο P στο σχήμα).

$\vec{B}_P = ?$



• Στα ευθύγραμμα τμήματα:

Επειδή $d\vec{l} \parallel \hat{r} \to d\vec{l} \times \hat{r} = 0 \to d\vec{B} = 0$

δηλ. δε δημιουργούν μαγν. πεδίο στο P. ✓

• Στο τεταρτοκύκλιο:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\, dl\, \cancel{|\hat{r}|}^{\,1}\, \cancel{\sin 90}^{\,1}\, \hat{z} \to$$

$$\to d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\, dl\, \hat{z}. \quad (1)$$

Άρα: $$\vec{B}_P = \int d\vec{B} \overset{(1)}{=} \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int dl\, \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^{\cancel{2}}} \frac{\pi \cancel{R}}{2}\, \hat{z} \to$$

$$\to \boxed{\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{8R}\, \hat{z}}$$

Άσκηση

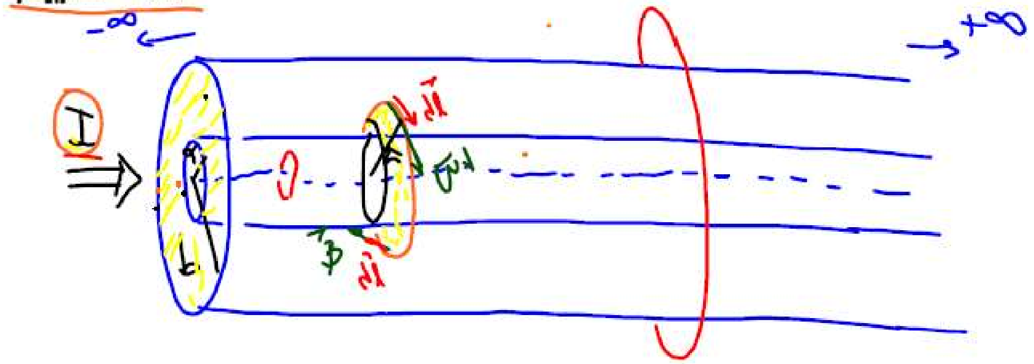
Κοίλος αγωγός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b διαρρέεται από ρεύμα εντάσεως I ομοιόμορφα κατανεμημένο.

(α) Δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο $B(r)$ για σημεία μέσα στο σώμα του αγωγού (δηλαδή για $a < r < b$) δίδεται από τη σχέση:

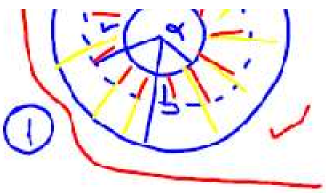
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(b^2 - a^2)} \frac{r^2 - a^2}{r}$$

Να ελέγξετε τον τύπο για την περίπτωση του $a = 0$.

(β) Δώστε μια χονδρική γραφική παράσταση της γενικής συμπεριφοράς του $B(r)$ από $r = 0$ μέχρι $r \to \infty$.



α/ ν. Ampére για $\alpha < r < b$:



$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encl} \to B\cdot 2\pi r = \mu_0 I_{encl} \quad (1)$$

$$J = σταθ. \to \frac{I}{S} = σταθ. \to \frac{I}{\cancel{\pi}(b^2-\alpha^2)} = \frac{I_{encl}}{\cancel{\pi}(r^2-\alpha^2)} \to$$

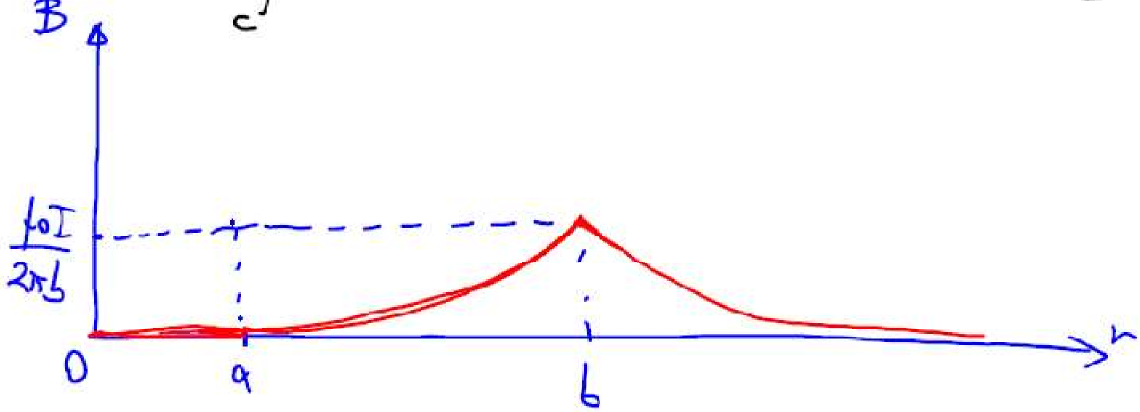
$$\to I_{encl} = \frac{I}{b^2-\alpha^2}(r^2-\alpha^2) \quad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\leadsto} B 2\pi r = \mu_0 \frac{I}{b^2-\alpha^2}(r^2-\alpha^2) \to \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\frac{r^2-\alpha^2}{b^2-\alpha^2}}$$

Για $\alpha = 0$: $B = \frac{\mu_0 I \, r^{\cancel{2}}}{2\pi \cancel{r}\cdot b^2} \to \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b^2}\cdot r}$

β) Για $r<a$: $\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cancel{I_{encl}} \longrightarrow \boxed{B_1 = 0}$

Για $r>b$: $\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encl} \rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \rightarrow B_3 = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$



Άσκηση

Ευθύγραμμος συμπαγής κύλινδρος μεγάλου μήκους διαρρέεται από ρεύμα πυκνότητας $\vec{J}$ η οποία μεταβάλλεται ακτινικά σύμφωνα με τη σχέση.

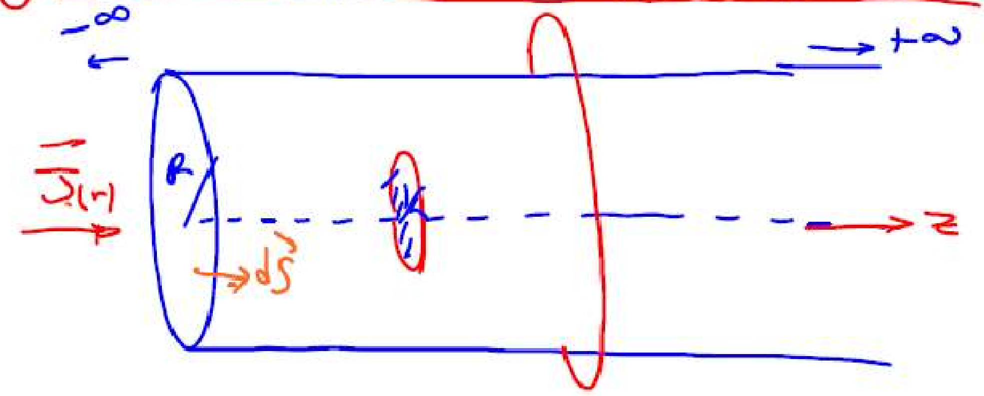
$\vec{J} = \frac{2I_0}{\pi\alpha^2}\left[1-\left(\frac{r^2}{\alpha^2}\right)\right]\hat{k}$ για $r \le a$

$\vec{J} = 0$ για $r \ge a$

όπου a η ακτίνα του κυλίνδρου, I_0 σταθερό ρεύμα και r η ακτινική απόσταση.

A) να βρεθεί το συνολικό ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό

B) να βρεθεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε όλες τις περιοχές του χώρου.



α/ $I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_S J_{(r)}\, dS \cos 0 = \frac{2I_0}{\pi\alpha^2}\int_S \left[1-\frac{r^2}{\alpha^2}\right] dS$

$S = \pi r^2 \rightarrow dS = 2\pi r\, dr$

$\rightarrow I = \frac{2I_0 \cdot 2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}\alpha^2}\int_0^\alpha \left(1-\frac{r^2}{\alpha^2}\right) r\, dr = \frac{4I_0}{\alpha^2}\int_\alpha^\alpha \left(r - \frac{r^3}{\alpha^2}\right) dr =$

$= \frac{4I_0}{\alpha^2}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4\alpha^2}\right]_0^\alpha = \frac{4I_0}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^{\cancel{4}\,2}}{4\cancel{\alpha^2}}\right) = \frac{\cancel{4}I_0}{\cancel{\alpha^2}}\frac{\cancel{\alpha^2}}{\cancel{4}}$

$\rightarrow \boxed{I_{ολ} = I_0}$

Β) ν. Ampère:

$r<\alpha$: $$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encl} \rightarrow B\cancel{2}\pi r = \mu_0 \frac{\cancel{4}^{\,2} I_0}{\alpha^2}\int_0^r \left(r - \frac{r^3}{\alpha^2}\right)dr \rightarrow$$

$$\rightarrow B\pi \cancel{r} = \frac{\mu_0 \cancel{2} I_0}{\alpha^2}\left(\frac{r^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} - \frac{r^{\cancel{4}\,3}}{{}_{2}\cancel{4}\alpha^2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{B_{\varepsilon\sigma} = \frac{\mu_0 I_0}{\pi \alpha^2}\left(r - \frac{r^3}{2\alpha^2}\right)}$$

$r>\alpha$: $$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encl} \rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{B_{\varepsilon\xi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}} \checkmark$$