www.pmoiras.weebly.com ✉ panmoiras@gmail.com ☎ 6932 946778

Θέμα

Η κυματοσυνάρτηση σωματιδίου μάζας m τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι

$$\psi(x) = Ae^{-\lambda x^2/2+\mu x}$$

όλου λ, μ θετικές σταθερές.

(a) Να υπολογιστεί η σταθερά κανονικοποίησης.

(β) Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές της θέσης και της ορμής.

(γ) Να υπολογιστούν οι αβεβαιότητες της θέσης και της ορμής.

(δ) Να ελεχθεί η αρχή της αβεβαιότητας θέσης-ορμής.

α) Συνθήκη κανονικοποίησης: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \rightarrow$

$$\rightarrow |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\lambda \frac{x^2}{2}+2\mu x} dx = 1 \rightarrow |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2+2\mu x} dx = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow |A|^2 e^{4\mu^2/4\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 1 \rightarrow |A|^2 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\, e^{-\mu^2/\lambda} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{A = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\mu^2/2\lambda}}$$

Δηλαδή η κανονικοποιημένη κυματοσυνάρτηση είναι:

$$\psi(x) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\mu^2/2\lambda}\, e^{-\lambda x^2/2+\mu x} \quad (1)$$

β) Η μέση τιμή της θέσης είναι:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi|^2 dx \overset{(1)}{=} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\mu^2/\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\lambda x^2+2\mu x} dx =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\cancel{\pi}}\right)^{1/2} \cancel{e^{-\mu^2/\lambda}} \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}\, \mu\, \cancel{e^{\mu^2/\lambda}}}{\lambda^{3/2}} = \frac{\cancel{\lambda^{1/2}}\,\mu}{\cancel{\lambda^{1/2}}\cdot\lambda} \rightarrow \boxed{\langle x \rangle = \frac{\mu}{\lambda}} \quad (2)$$

www.pmoiras.weebly.com panmoiras@gmail.com 6932 946778

Η μέση τιμή της ορμής είναι:

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{p}\psi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx \overset{(1)}{=}$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\mu^2/2\lambda} e^{-\lambda x^2/2+\mu x} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\mu^2/2\lambda} e^{-\lambda x^2/2+\mu x} \left(-\frac{2\lambda x}{2}+\mu\right) dx =$$

$$= -i\hbar \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} e^{-2\mu^2/2\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} (-\lambda x+\mu)\, e^{-\lambda x^2+\mu x} \, dx =$$

$$= -i\hbar \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\mu^2/\lambda} \left[-\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\lambda x^2+\mu x} dx + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2+\mu x} dx\right] =$$

$$= -i\hbar \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \cancel{e^{-\mu^2/\lambda}} \left[-\lambda \frac{\sqrt{\pi}\,\mu\, \cancel{e^{\mu^2/\lambda}}}{\lambda^{3/2}} + \mu \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\, \cancel{e^{\mu^2/\lambda}}\right] =$$

$$= -i\hbar \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \left[-\cancel{\frac{\sqrt{\pi}\,\mu}{\lambda^{1/2}}} + \cancel{\mu\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}}\right] \rightarrow \boxed{\langle p\rangle = 0} \quad (3)$$

γ) Είναι: $\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2|\psi|^2 dx \overset{(1)}{=} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\mu^2/\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x^2+2\mu x} dx =$

$$= \left(\frac{\lambda}{\cancel{\pi}}\right)^{1/2} \cancel{e^{-\mu^2/\lambda}} \frac{\cancel{\sqrt{\pi}}(\lambda+2\mu^2)\cancel{e^{\mu^2/\lambda}}}{2\lambda^{5/2}} = \frac{\cancel{\lambda^{1/2}}}{2\cancel{\lambda^{1/2}}\cdot\lambda^2}(\lambda+2\mu^2) =$$

$$= \frac{\lambda + 2\mu^2}{2\lambda^2} \rightarrow \langle x^2 \rangle = \frac{1}{2\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} \quad (4)$$

Επομένως η αβεβαιότητα θέσης είναι:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \overset{(2,4)}{=} \sqrt{\frac{1}{2\lambda} + \cancel{\frac{\mu^2}{\lambda^2}} - \cancel{\frac{\mu^2}{\lambda^2}}} \rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}} \quad (5)$$

Είναι: $$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \hat{p}^2 \psi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right) dx = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx =$$

$$\overset{(1)}{=} -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\mu^2/2\lambda} e^{-\lambda x^2/2 + \mu x} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\mu^2/2\lambda} \left[-\lambda e^{-\lambda x^2/2 + \mu x} + (-\lambda x + \mu)^2 e^{-\lambda x^2/2 + \mu x}\right] dx$$

$$= -\hbar^2 \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\cancel{2}\mu^2/\cancel{2}\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\lambda + (-\lambda x + \mu)^2\right] e^{-\lambda x^2 + 2\mu x} dx =$$

$$= -\hbar^2 \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\mu^2/\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\lambda + \lambda^2 x^2 + \mu^2 - 2\lambda\mu x\right) e^{-\lambda x^2 + 2\mu x} dx =$$

$$= -\hbar^2 \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\mu^2/\lambda} \left[(-\lambda + \mu^2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2 + 2\mu x} dx + \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x^2 + 2\mu x} dx - 2\lambda\mu \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\lambda x^2 + 2\mu x} dx\right] =$$

$$= -\hbar^2\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2} \cancel{e^{-\mu^2/\lambda}}\left[(-\lambda+\mu^2)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,\cancel{e^{\mu^2/\lambda}} + \frac{\lambda^2\sqrt{\pi}\,(\lambda+2\mu^2)\,\cancel{e^{\mu^2/\lambda}}}{2\lambda^{5/2}} - 2\lambda\mu\frac{\sqrt{\pi}\,\mu\,\cancel{e^{\mu^2/\lambda}}}{\lambda^{3/2}}\right] =$$

$$= -\hbar^2\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\left[(-\lambda+\mu^2)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + \frac{\cancel{\lambda^2}\sqrt{\pi}}{2\cancel{\lambda^2}\cdot\lambda^{1/2}}(\lambda+2\mu^2) - \frac{2\cancel{\lambda}\mu^2\sqrt{\pi}}{\cancel{\lambda}\lambda^{1/2}}\right] =$$

$$= -\hbar^2\left(\cancel{\frac{\lambda}{\pi}}\right)^{1/2}\left(-\lambda+\cancel{\mu^2}+\frac{\lambda}{2}+\cancel{\mu^2}-\cancel{2\mu^2}\right)\cancel{\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}} \rightarrow \langle p^2\rangle = \frac{\hbar^2\lambda}{2} \quad (6)$$

-4-

Συνεπώς η αβεβαιότητα της ορμής είναι:

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} \overset{(3,6)}{=} \sqrt{\frac{\hbar^2\lambda}{2} - 0^2} \rightarrow \boxed{\Delta p = \hbar\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} \quad (7)$$

δ) Είναι: $\Delta x\cdot\Delta p \overset{(5,7)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\cdot\hbar\sqrt{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\hbar}{2}$

Άρα επαληθεύεται η αρχή της αβεβαιότητας θέσης - ορμής σύμφωνα με την οποία $\Delta x\cdot\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$.