ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΙΔΩΛΩΝ
ΘΕΩΡΙΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778

www.pmoiras.weebly.com

Μέθοδος των Ειδώλων

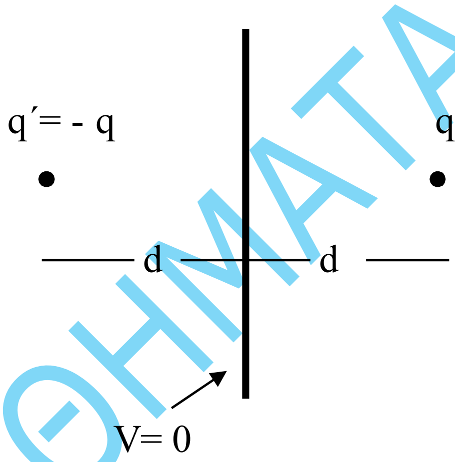
Στην παράγραφο αυτή αναπτύσσεται η μέθοδος των ειδώλων, με την οποία βρίσκεται έμμεσα η λύση ορισμένων ηλεκτροστατικών προβλημάτων με απλό τρόπο, δηλαδή χωρίς να είναι απαραίτητη η επίλυση της εξίσωσης Laplace.

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή η λύση του προβλήματος του πεδίου συστήματος ακίνητων σημειακών φορτίων (ή στάσιμης κατανομής φορτίου) και αγωγού ανάγεται στη λύση ενός ισοδύναμου απλούστερου ηλεκτροστατικού προβλήματος, στο οποίο ο αγωγός έχει αντικατασταθεί από κατάλληλο σύστημα σημειακών φορτίων (φορτία – είδωλα). Η θέση των φορτίων – ειδώλων προκύπτει από τον κατοπτρισμό των φορτίων ως προς τον αγωγό που δρα ως κάτοπτρο.

Στην πράξη η εφαρμογή της μεθόδου των ειδώλων περιορίζεται στις περιπτώσεις όπου η επιφάνεια του αγωγού έχει απλό σχήμα, οπότε είναι δυνατή η ανεύρεση και μελέτη του ισοδύναμου συστήματος των σημειακών φορτίων – ειδώλων.

Ακολούθως αναπτύσσονται δυο απλές περιπτώσεις επιλύσεως προβλημάτων με τη μέθοδο των ειδώλων :

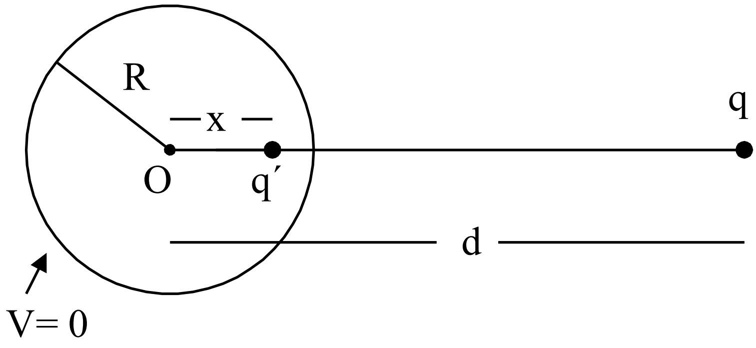
α)



Σχήμα 3.8

Στην περίπτωση ενός γειωμένου αγώγιμου επιπέδου (V=0) και ενός σημειακού φορτίου q σε απόσταση d από το επίπεδο, σύμφωνα με τη μέθοδο των ειδώλων το σύστημα σημειακού φορτίου – γειωμένου επιπέδου προσομοιώνεται από σύστημα δυο σημειακών φορτίων q και q΄= -q (φορτίο – είδωλο) συμμετρικά σε απόσταση d ως προς το επίπεδο.
Παρατηρείται ότι η τιμή και η θέση του φορτίου – ειδώλου είναι τέτοια ώστε το συνολικό δυναμικό να είναι μηδέν πάνω στο επίπεδο.

β)



Σχήμα 3.9

Το πρόβλημα ενός σημειακού φορτίου q, που απέχει απόσταση d από το κέντρο γειωμένης σφαίρας ακτίνας R (d>R), προσομοιώνεται σύμφωνα με τη μέθοδο των ειδώλων από το σύστημα των σημειακών φορτίων q και q΄.
Το φορτίο – είδωλο q΄ θα πρέπει να έχει τέτοια τιμή και θέση ώστε το συνολικό δυναμικό να είναι μηδέν πάνω σε επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R.
Ο υπολογισμός αυτός δίνει ότι το φορτίο – είδωλο έχει τιμή :

$$\boxed{q' = -\frac{R}{d}q} \qquad \textbf{(1)}$$

και το οποίο πρέπει να βρίσκεται προς το μέρος του q και σε απόσταση από το κέντρο της σφαίρας :

$$\boxed{x = \frac{R^2}{d}} \qquad \textbf{(2)}$$

🗐 **Παρατήρηση :** Στην περίπτωση που ο αγωγός έχει δυναμικό $V_o \neq 0$, στο ισοδύναμο σύστημα των σημειακών φορτίων, εκτός από το φορτίο q και φορτίο – είδωλο q΄, απαιτείται και δεύτερο φορτίο – είδωλο q'' στο κέντρο Ο, του οποίου η τιμή καθορίζεται από τη σχέση :

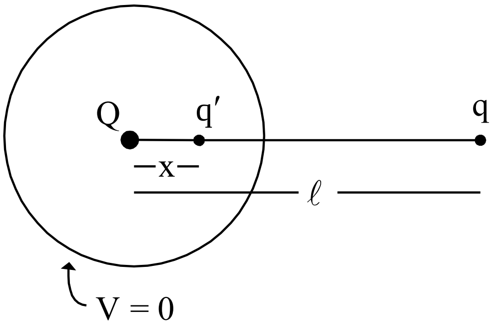
$$q'' = 4\pi\varepsilon_o V_o R \qquad \textbf{(3)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Γειωμένος αγώγιμος φλοιός ακτίνας R φέρει στο κέντρο του θετικό σημειακό φορτίο Q. Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκείται σε θετικό σημειακό φορτίο q, το οποίο απέχει από το Q απόσταση $\ell > R$.

Λύση



Σύμφωνα με τη μέθοδο των ειδώλων ο γειωμένος αγώγιμος φλοιός (διατηρείται σε δυναμικό V=0) αντικαθίσταται από ένα φορτίο – είδωλο $q' = -Rq/\ell$, το οποίο βρίσκεται προς το μέρος του q και σε απόσταση από το κέντρο $x = R^2/\ell$.

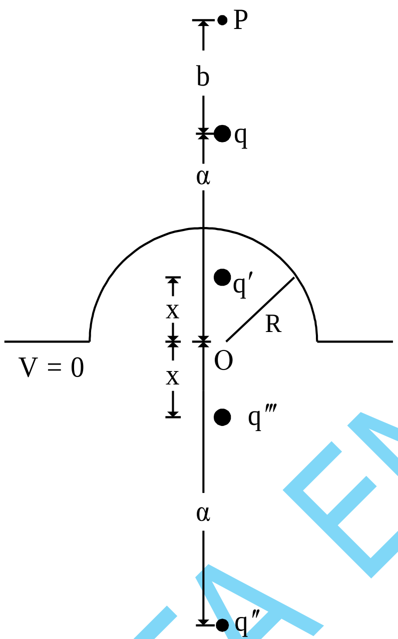
Επομένως η δύναμη που ασκείται στο φορτίο q σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας οφείλεται στο φορτίο Q και το φορτίο – είδωλο q'. Δηλαδή :

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o \ell^2}\hat{x} + \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_o(\ell - x)^2}\hat{x} \Rightarrow \vec{F} = \left[\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o \ell^2} - \frac{q^2 R\ell}{4\pi\varepsilon_o(\ell^2 - R^2)^2}\right]\hat{x}$$

Άσκηση 2

Μια άπειρη γειωμένη αγώγιμη πλάκα παρουσιάζει ημισφαιρική προεξοχή ακτίνας R. Ένα σημειακό φορτίο q τοποθετείται στον άξονα συμμετρίας του συστήματος σε απόσταση α > R από το επίπεδο. Να υπολογιστεί το δυναμικό σε σημείο P που απέχει απόσταση b πάνω από το φορτίο q.

Λύση



Σύμφωνα με τη μέθοδο των ειδώλων το σημειακό φορτίο q έχει ως προς τον ημισφαιρικό γειωμένο αγωγό, φορτίο – είδωλο $q' = -Rq/\alpha$ σε απόσταση $x = R^2/\alpha$ από το κέντρο του ημισφαιρίου, ενώ ως προς το αγώγιμο γειωμένο επίπεδο έχει είδωλο $q'' = -q$ σε απόσταση α κάτω από το επίπεδο.

Επίσης υπάρχει και το είδωλο ως προς το επίπεδο του φορτίου – ειδώλου q΄, δηλαδή το $q''' = -q' = Rq/\alpha$ σε απόσταση $x = R^2/\alpha$ κάτω από το επίπεδο.

Συνεπώς το δυναμικό στο σημείο P οφείλεται στα τέσσερα αυτά σημειακά φορτία και είναι :

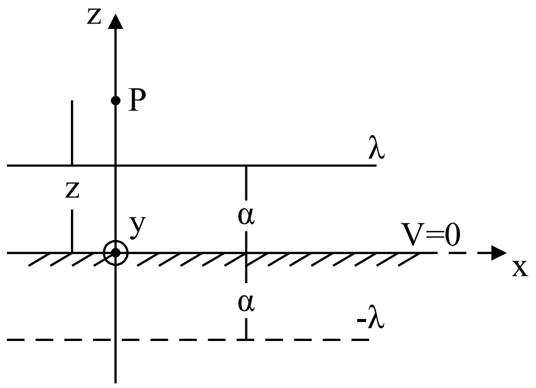
$$V_P = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q}{b} + \frac{q'}{b+(\alpha - x)} + \frac{q''}{b+2\alpha} + \frac{q'''}{b+\alpha+x}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q}{b} - \frac{Rq}{\alpha(b+\alpha - x)} - \frac{q}{b+2\alpha} + \frac{Rq}{\alpha(b+\alpha+x)}\right]$$

Άσκηση 3

Μια γειωμένη αγώγιμη πλάκα βρίσκεται στο επίπεδο xy και ένα ευθύγραμμο σύρμα γραμμικής πυκνότητας φορτίου λ βρίσκεται στο επίπεδο xz, παράλληλα στον άξονα x και σε απόσταση α από αυτόν. Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P(0,0,z). Ποια η τιμή αυτής για σημεία όπου z >>α;

Λύση



Σύμφωνα με τη μέθοδο των ειδώλων η γειωμένη αγώγιμη πλάκα αντικαθίσταται από ευθύγραμμο σύρμα γραμμικής πυκνότητας –λ σε απόσταση α κάτω από το επίπεδο xy.
Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ευθύγραμμης ομοιόμορφης κατανομής φορτίου είναι :

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\hat{r} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου r η απόσταση από την κατανομή.

Άρα η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου των δυο ευθύγραμμων κατανομών στο σημείο P, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας και τη σχέση **(1)** είναι :

$$\vec{E}_P = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o(z-\alpha)}\hat{z} + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_o(z+\alpha)}\hat{z} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\left[\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z+\alpha}\right]\hat{z} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\left(\frac{2\alpha}{z^2-\alpha^2}\right)\hat{z} \Rightarrow \vec{E}_P = \frac{\lambda\alpha}{\pi\varepsilon_o(z^2-\alpha^2)}\hat{z} \qquad \textbf{(2)}$$

Αν z >> α ισχύει η προσέγγιση $z^2 - \alpha^2 \cong z^2$, οπότε η σχέση **(2)** δίνει :

$$\vec{E} \cong \frac{\lambda\alpha}{\pi\varepsilon_o z^2}\hat{z}$$

Άσκηση 4

Ένα θετικό σημειακό φορτίο q βρίσκεται σε απόσταση h από άπειρο αγώγιμο γειωμένο επίπεδο.

Να υπολογιστούν :

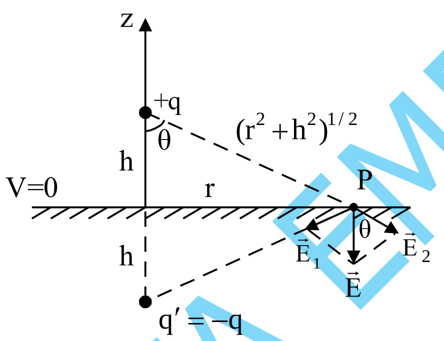
α) Η δύναμη που ασκείται στο σημειακό φορτίο q.

β) Το έργο που απαιτείται για να μεταφερθεί το φορτίο q στο άπειρο. Συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό με την ηλεκτροστατική ενέργεια δυο φορτίων +q, -q σε απόσταση 2h (πραγματικό – κατοπτρικό).

γ) Η ένταση $\vec{E}$ επί του επίπεδου αγωγού και η επιφανειακή του πυκνότητα φορτίου σ.

δ) Η απόσταση από τον πόδα της καθέτου στην οποία προσπίπτουν οι δυναμικές γραμμές που ξεκινούν από το φορτίο q και είναι οριζόντιες.

Λύση



α) Σύμφωνα με τη μέθοδο των ειδώλων το πρόβλημα σημειακού φορτίου q και άπειρου αγώγιμου γειωμένου επιπέδου προσομοιώνεται με το σύστημα δυο σημειακών φορτίων +q και $q' = -q$ σε συμμετρικές θέσεις, ως προς το επίπεδο.

Επομένως η δύναμη που ασκείται στο φορτίο q, σύμφωνα με το νόμο του Coulomb είναι :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qq'}{(2h)^2}\hat{z} = \frac{-q^2}{16\pi\varepsilon_o h^2}\hat{z} \qquad \textbf{(1)}$$

β) Το έργο για τη μεταφορά του φορτίου q στο άπειρο είναι :

$$W = \int_h^\infty \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{(1)}{=} \frac{-q^2}{16\pi\varepsilon_o}\int_h^\infty \frac{dh}{h^2} \Rightarrow W = \frac{-q^2}{16\pi\varepsilon_o h}$$

Η ηλεκτροστατική ενέργεια δυο φορτίων +q, -q σε απόσταση 2h είναι :

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{-qq}{2h} \Rightarrow U = \frac{-q^2}{8\pi\varepsilon_o h}$$

Παρατηρείται ότι η ενέργεια U είναι το διπλάσιο του έργου που υπολογίστηκε προηγουμένως. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κατά τον υπολογισμό του έργου W το φορτίο +q και το είδωλό του –q απομακρύνονται καλύπτοντας ίσα διαστήματα μέχρι να βρεθούν σε άπειρη απόσταση, ενώ αντίθετα η ενέργεια U υπολογίζεται θεωρώντας το φορτίο +q να κινείται προς το άπειρο εντός του πεδίου του ακίνητου φορτίου –q, δηλαδή για να βρεθούν τώρα τα φορτία +q, -q σε άπειρη απόσταση θα πρέπει το φορτίο +q να διανύσει διπλάσιο διάστημα σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση.

γ) Η ένταση $\vec{E}$ πάνω στον επίπεδο αγωγό σε σημείο P, που απέχει απόσταση r από την κατακόρυφο, θα είναι κάθετη με φορά προς το εσωτερικό του αγωγού και θα είναι:

$$\vec{E} = 2E_1 \cos\theta(-\hat{z}) = \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_o (r^2+h^2)} \frac{h}{(r^2+h^2)^{1/2}} \hat{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{-qh}{2\pi\varepsilon_o (r^2+h^2)^{3/2}} \hat{z}} \qquad \textbf{(2)}$$

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ του επιπέδου αγωγού υπολογίζεται μέσω της βασικής σχέσης **(3 – 1)** που ισχύει για τους αγωγούς :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\hat{z} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{-qh}{2\pi\varepsilon_o (r^2+h^2)^{3/2}}\hat{z} = \frac{\sigma}{\varepsilon_o}\hat{z} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{-qh}{2\pi(r^2+h^2)^{3/2}}} \qquad \textbf{(3)}$$

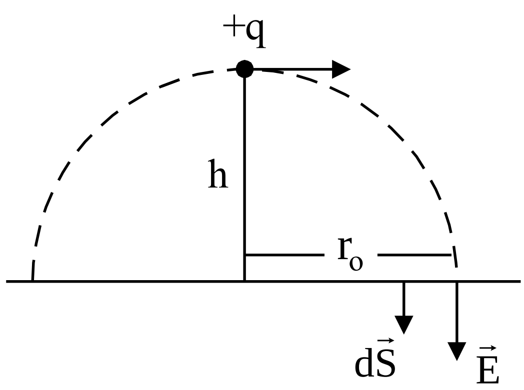
🗐 Παρατήρηση

Επισημαίνεται ότι αν η πυκνότητα αυτή σ ολοκληρωθεί επί του επιπέδου xy, θα προκύψει το επαγόμενο φορτίο q'. Δηλαδή :

$$q' = \int_S \sigma dS = \int_0^\infty \sigma r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \overset{(3)}{\Rightarrow} q' = -q$$

Άρα το επαγόμενο φορτίο ισούται με –q υποδηλώνοντας το βαθύτερο περιεχόμενο της μεθόδου των ειδώλων.

δ)



Η ζητούμενη απόσταση r_o μπορεί να θεωρηθεί ως η ακτίνα της βάσης του ημισφαιρίου που σχηματίζουν οι δυναμικές γραμμές που ξεκινούν από το φορτίο +q και είναι οριζόντιες.

Παρατηρείται ότι ηλεκτρική ροή διέρχεται μόνο από τη βάση του ημισφαιρίου αυτού (επιφάνεια Gauss) κι επειδή οι δυναμικές γραμμές κατευθύνονται προς όλες τις διευθύνσεις, λόγω συμμετρίας η επιφάνεια αυτή είναι σαν να περικλείει το μισό φορτίο q, δηλαδή $q_{enc\ell} = q/2$. Επομένως εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss για το κλειστό ημισφαίριο κάτω από το φορτίο q προκύπτει :

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc\ell}}{\varepsilon_o} \overset{(2)}{\Rightarrow} \oint_S \frac{-qh}{2\pi\varepsilon_o (r^2+h^2)^{3/2}}\hat{z}(-dS\hat{z}) = \frac{q/2}{\varepsilon_o} \Rightarrow$$

$$\oint_S \frac{h}{\pi(r^2+h^2)^{3/2}}dS = 1 \quad (\text{όπου είναι } d\vec{S} = -dS\hat{z})$$

Αλλά dS = 2πrdr είναι η επιφάνεια ενός στοιχειώδους κυκλικού δακτυλίου της βάσης του ημισφαιρίου, οπότε η παραπάνω γίνεται :

$$\int_0^{r_o} \frac{h}{\pi(r^2+h^2)^{3/2}} 2\pi r dr = 1 \Rightarrow \int_0^{r_o} \frac{r dr}{(r^2+h^2)^{3/2}} = \frac{1}{2h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{-1}{\sqrt{r^2+h^2}}\right|_0^{r_o} = \frac{1}{2h} \Rightarrow \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{r_o^2+h^2}} = \frac{1}{2h} \Rightarrow \frac{1}{2h} = \frac{1}{\sqrt{r_o^2+h^2}} \Rightarrow$$

$$4h^2 = r_o^2 + h^2 \Rightarrow r_o^2 = 3h^2 \Rightarrow \boxed{r_o = \sqrt{3}h}$$