

**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ**

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

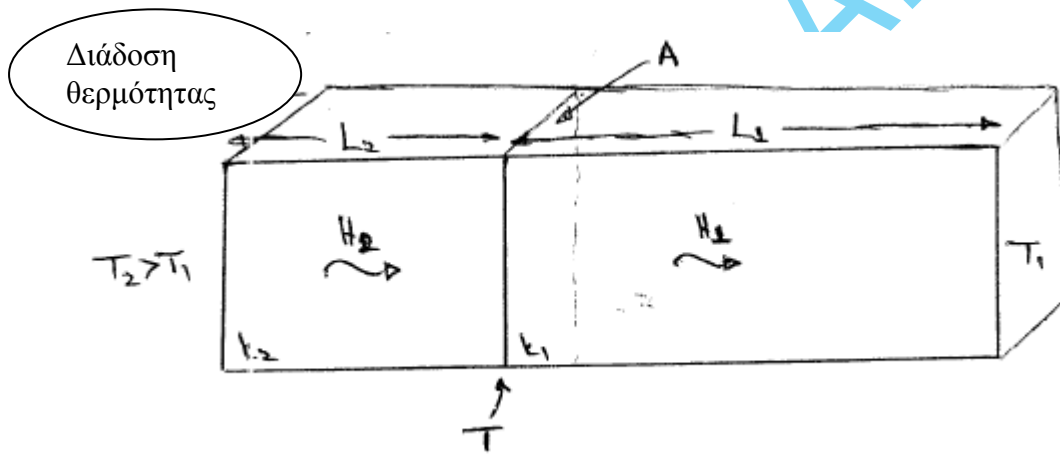
ΑΣΚΗΣΗ 1

Δυο πλάκες με πάχη L_1 και L_2 και θερμικές αγωγιμότητες k_1 και k_2 βρίσκονται σε θερμική επαφή μεταξύ τους. Οι πλάκες έχουν επιφάνεια A και η επαφή τους είναι μέσω αυτής της επιφάνειας. Οι θερμοκρασίες των εξωτερικών επιφανειών τους είναι T_2 αυτής που έχει k_2 και T_1 αυτής που έχει k_1 , με $T_2 > T_1$.

A) Προσδιορίστε τη θερμοκρασία στη διεπιφάνεια (δηλ. στην επιφάνεια επαφής A των δυο πλακών).

B) Προσδιορίστε τον ρυθμό μεταφοράς ενέργειας με θερμική αγωγή από την θερμή πλάκα στην ψυχρή σε συνθήκες σταθερής κατάστασης.

ΛΥΣΗ



A) Ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας (ή θερμικό ρεύμα) για κάθε πλάκα δίνεται απ' τις σχέσεις:

$$H_2 = k_1 A \frac{T - T_1}{L_1} \quad (1) \quad \text{και} \quad H_2 = k_2 A \frac{T_2 - T}{L_2} \quad (2)$$

όπου k_1, k_2 οι συντελεστές θερμικής αγωγιμότητας των πλακών, L_1, L_2 το πάχος καθένας, A η επιφάνεια επαφής των πλακών, T_1, T_2 οι εξωτερικές τους θερμοκρασίες και T η θερμοκρασία στη διεπιφάνεια ($T_1 < T < T_2$).

Σε συνδύες σταθερά > κατάστασης ισχύει:

$$H_1 = H_2 \xrightarrow{(1)/(2)} k_1 \cancel{A} \frac{T-T_1}{L_1} = k_2 \cancel{A} \frac{T_2-T}{L_2} \rightarrow$$

$$\rightarrow k_1 L_2 (T-T_1) = k_2 L_1 (T_2-T) \rightarrow$$

$$\rightarrow k_1 L_2 T - k_1 L_2 T_1 = k_2 L_1 T_2 - k_2 L_1 T \rightarrow$$

$$\rightarrow (k_1 L_2 + k_2 L_1) T = k_1 L_2 T_1 + k_2 L_1 T_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{k_1 L_2 T_1 + k_2 L_1 T_2}{k_1 L_2 + k_2 L_1}} \quad (3)$$

β) Άρα αντικαθιστώντας την (3) σε μια εκ των (1),(2) υπολογίζω το σταθερό θερμικό ρεύμα H ως:

$$H \stackrel{(3)}{\sim} = \frac{k_1 A}{L_1} \left(\frac{k_1 L_2 T_1 + k_2 L_1 T_2}{k_1 L_2 + k_2 L_1} - T_1 \right) =$$

$$= \frac{k_1 A}{L_1} \left(\frac{\cancel{k_1 L_2 T_1} + k_2 L_1 T_2 - \cancel{k_1 L_2 T_1} - k_2 L_1 T_1}{k_1 L_2 + k_2 L_1} \right) =$$

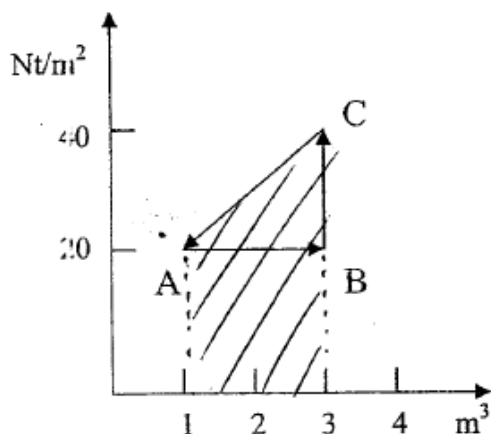
$$= \frac{k_1 A}{\cancel{L_1}} \frac{k_2 \cancel{L_1} (T_2 - T_1)}{k_1 L_2 + k_2 L_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{H = \frac{k_1 k_2 A (T_2 - T_1)}{k_1 L_2 + k_2 L_1}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα θερμοδυναμικό σύστημα εκτελεί την κυκλική μεταβολή ABCA στο διάγραμμα P-V του σχήματος.

A) Να συμπληρώσετε τα κενά του παρακάτω πίνακα με + ή - που να δείχνουν τα πρόσημα των μεταβολών των θερμοδυναμικών μεγεθών της πρώτης γραμμής κατά τις μεταβολές της πρώτης στήλης.



	Q	W	ΔU
A → B			+
B → C	+		
C → A			

B) Να υπολογίσετε το συνολικό έργο σε ένα πλήρη κύκλο A → B → C → A. Το έργο αυτό παράγεται ή καταναλώνεται από το σύστημα;

ΛΥΣΗ

A). Η μεταβολή A → B είναι μια ισοβαρή εκτόνωση, οπότε το έργο της είναι θετικό και ισούται με:

$$W_{AB} = \int P dV = P \int_{V_A}^{V_B} dV = P(V_B - V_A) = 20 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} (3 - 1) \text{m}^3 = 20 \cdot 2 \text{N} \cdot \text{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{W_{AB} = 40 \text{J} > 0}$$

Από του 1^ο θερμοδυναμικό νόμο είναι $Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB}$.
 κι επειδή $\Delta U_{AB} > 0$ και $W_{AB} > 0$ προκύπτει ότι $Q_{AB} > 0$ δηλ.
 η θερμότητα αυξή προσφέρεται στο σύστημα.

• Η μεταβολή $B \rightarrow C$ είναι για ισόχωρη θέρμανση, οπότε το
 έργο της είναι μηδέν αφού $V = \text{const.} \rightarrow dV = 0$ και

$$W_{BC} = \int P dV \Rightarrow \boxed{W_{BC} = 0}$$

Από του 1^ο θερμοδυναμικό νόμο ισχύει:

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} \rightarrow Q_{BC} = \Delta U_{BC}$$

κι επειδή $Q_{BC} > 0$ (όπως δίνεται στον πίνακα) θα είναι
 και $\Delta U_{BC} > 0$. δηλ. η εσωτερική ενέργεια του συστήματος
 αυξάνεται κατά τη διαδικασία αυτή.

• Κατά τη μεταβολή $C \rightarrow A$ επειδή το σύστημα εφηνίζεται
 το έργο είναι αρνητικό, δηλ. $W_{CA} < 0$ και ισούται
 με το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται στο διά-
 γραμμα PV.

$$|W_{CA}| = \frac{1}{2} \cdot 20 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 2 \text{m}^3 + 20 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 2 \text{m}^3 = (20 + 40) \text{N} \cdot \text{m} \rightarrow \boxed{|W_{CA}| = 60 \text{J}}$$

Επειδή η θερμοκρασία μειώνεται είναι $\Delta T_{CA} < 0$ οπότε και η εσωτερική ενέργεια θα είναι αρνητική αφού: $\Delta U_{CA} = nC_V \Delta T_{CA} < 0$
 Ενώ από τον 1^ο θερμοδυναμικό νόμο είναι $Q_{CA} = \Delta U_{CA} + W_{CA}$
 κι επειδή $\Delta U_{CA} < 0$ και $W_{CA} < 0$ προκύπτει ότι $Q_{CA} < 0$.
 Δηλ. η θερμότητα αυτή αποβάλλεται απ' το σύστημα στο περιβάλλον.
 Ακολουθώ > φαίνεται ο πίνακας συμπληρωμένος με τα πρόσημα των θερμοδυναμικών μεγεθών των τριών διεργασιών όπως αιτιολογήθηκαν στα προηγούμενα.

	Q	W	ΔU
A → B	+	+	+
B → C	+	0	+
C → A	-	-	-

β) Το ολικό έργο σε έναν πλήρη κύκλο ABCA είναι:

$$W_{ολ} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = 40\text{J} + 0 - 60\text{J} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{W_{ολ} = -20\text{J}}$$

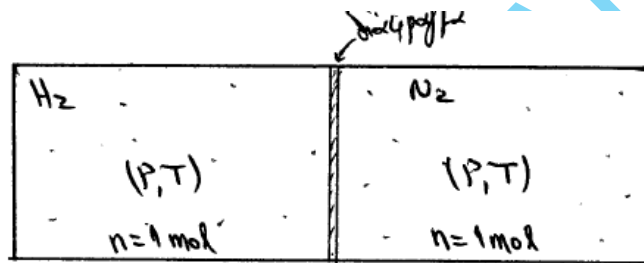
Επειδή $W_{ολ} < 0$ το ολικό έργο παράγεται από το σύστημα και απελευθερώνεται στο περιβάλλον.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ένα mole υδρογόνου και ένα mole αζώτου καταλαμβάνουν υπό την ίδια θερμοκρασία και πίεση, τα δυο μέρη ενός δοχείου, που χωρίζονται από ένα διάφραγμα. Οι συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης είναι τέτοιες ώστε τα δύο αέρια να μπορούν να θεωρηθούν ιδανικά.

- A) Πόση είναι η ταχύτητα rms των ατόμων του κάθε αερίου σε θερμοκρασία δωματίου;
 B) Αν απομακρύνουμε το διάφραγμα που χωρίζει τα δύο αέρια έτσι ώστε αυτά να αναμιχθούν, η μεταβολή ΔS της εντροπίας του συστήματος θα είναι θετική, αρνητική ή μηδέν;

ΛΥΣΗ



Η ενεργός τιμή της ταχύτητας των μορίων ενός αερίου δίνεται από τη σχέση:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad (1)$$

όπου $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ η σταθερά Boltzmann

και σε θερμοκρασία δωματίου $\theta = 20^\circ\text{C}$ είναι $T = (273 + 20)^\circ\text{K} \rightarrow$

$$\rightarrow T = 293^\circ\text{K}$$

Επειδή το μόριο του υδρογόνου αποτελείται από 2 άτομα με ένα πρωτόνιο το καθένα, η μάζα του μορίου του υδρογόνου είναι:

$$m_H = 2m_p = 2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \rightarrow m_H = 3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

EMC²

Άρα η σχέση m για το υδρογόνο δίνει:

$$v_{rms}(H_2) = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_H}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293}{3,34 \cdot 10^{-27}}} = \sqrt{363 \cdot 10^4} \rightarrow$$

$$= 19 \cdot 10^2 \text{ m/sec} \rightarrow \boxed{v_{rms}(H_2) = 1900 \text{ m/sec}}$$

Επειδή το άτομο του αζώτου έχει ατομικό αριθμό 14, ενώ το υδρογόνο 1, και επειδή και τα δύο αυτές άτομα είναι διατομικά προκύπτει ότι το άτομο του αζώτου είναι 14 φορές βαρύτερο απ' το άτομο του υδρογόνου. Δηλαδή: $m_N = 14 m_H$.

Οπότε:

$$v_{rms}(N_2) = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_N}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{14 m_H}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \sqrt{\frac{3k_B T}{m_H}} = \frac{v_{rms}(H_2)}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{1900}{\sqrt{14}} \text{ m/sec} = \frac{1900}{3,74} \text{ m/sec} \rightarrow \boxed{v_{rms}(N_2) = 508 \text{ m/sec}}$$

β) Επειδή τα δύο αέρια θεωρούνται ιδανικά, σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση του αερίου $PV = nRT$ κι επειδή έχουν τον ίδιο αριθμό mol n , την ίδια πίεση P και την ίδια θερμοκρασία T θα καταλαμβάνουν και τον ίδιο όγκο V δηλ. το ίδιο όγκο του συνολικού δοχείου.

Αποβαρύνοντας το διαφράγμα που χωρίζει τα δύο αέρια αυτά εξαπλώνονται σε όλο το χώρο του δοχείου και αναμιγνύονται. Αυτό έχει ως άμεσο αποτέλεσμα να αυξηθεί η εντροπία του συστήματος και κατά συνέπεια η εντροπία του να αυξηθεί. Άρα η μεταβολή της εντροπίας του συστήματος θα είναι θετική.
Συμπέρασμα: $\Delta S > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Θεωρείστε ότι τα μόρια ενός αερίου σε ένα κουτί δεν είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία και ότι ο αριθμός των μορίων με μέτρο ταχύτητας μεταξύ u και $u + du$ είναι $dN = N_0 e^{-u/u_0} du$, όπου $u_0 = 1 \text{ m/s}$ και N_0 είναι ο ολικός αριθμός μορίων στο κουτί.

- A) Να βρεθεί η μέση ταχύτητα των μορίων.
 B) Να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου της ταχύτητας, δηλαδή η u_{rms} των μορίων.
 Γ) Να βρεθεί η πιο πιθανή ταχύτητα των μορίων.
 Δ) Τι ποσοστό μορίων έχει μέτρο ταχύτητας μεγαλύτερο από $3u_0$;

ΛΥΣΗ

A) Επειδή τα μόρια του αερίου αυτού δεν είναι σε θερμοδυναμική ισορροπία δεν ακολουθούν την κατανομή ταχυτήτων Maxwell αλλά σύμφωνα με τη δοθείσα σχέση η συνάρτηση κατανομή ταχυτήτων είναι:

$$dN = N_0 e^{-u/u_0} du \rightarrow \frac{dN}{N_0} = f(u) du = e^{-u/u_0} du \rightarrow$$

$$\rightarrow f(u) = e^{-u/u_0} \xrightarrow{u_0=1\text{m/s}} f(u) = e^{-u} \quad |||$$

Άρα η μέση ταχύτητα που φορικού είναι:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \int_0^{\infty} v f(v) dv \stackrel{|||}{=} \int_0^{\infty} v e^{-v} dv = - \int_0^{\infty} v (e^{-v})' dv \stackrel{\text{ολοκλήρωση κατά παράγωγο}}{=} \\ &= - \left[v e^{-v} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v' e^{-v} dv \right] = - \left[\cancel{\infty e^{-\infty}} - \cancel{0 e^{-0}} - \int_0^{\infty} e^{-v} dv \right] = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-v} dv = \frac{e^{-v}}{-1} \Big|_0^{\infty} = -e^{-v} \Big|_0^{\infty} = -\cancel{\infty e^{-\infty}} + \cancel{0 e^{-0}} \rightarrow \boxed{\bar{v} = 1 \text{ m/sec}} \end{aligned}$$

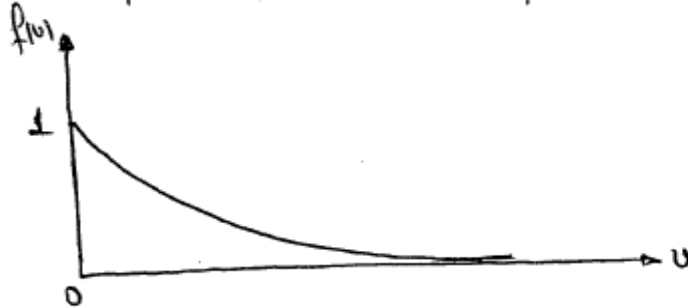
Β) Η ενεργός ταχύτητα που φορικού είναι: $v_{rms} = \sqrt{\bar{v^2}}$ (2)

$$\text{Άλλα: } \bar{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv \stackrel{|||}{=} \int_0^{\infty} v^2 e^{-v} dv = - \int_0^{\infty} v^2 (e^{-v})' dv \stackrel{\text{ολοκλήρωση κατά παράγωγο}}{=}$$

$$\begin{aligned} &= - \left[v^2 e^{-v} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (v^2)' e^{-v} dv \right] = - \left[\cancel{\infty^2 e^{-\infty}} - \cancel{0^2 e^{-0}} - 2 \int_0^{\infty} v e^{-v} dv \right] = \\ &= 2 \int_0^{\infty} v e^{-v} dv = \dots \text{ ή } \dots \text{ ή } \dots \rightarrow \bar{v^2} = 2 \text{ m}^2/\text{sec}^2. \end{aligned}$$

Άρα η (2) δίνει: $\boxed{v_{rms} = \sqrt{2} \text{ m/sec} > \bar{v}}$

Γ) Η πιο πιθανή ταχύτητα των ιονίων δίνεται απ' το μέγιστο της συνάρτησης κατανομής $f(u) = e^{-u}$.
 Η γραφική παράσταση της κατανομής είναι η ακόλουθη:



Άρα παρατηρούμε ότι η πιθανότερη τιμή της ταχύτητας των ιονίων είναι η μηδενική, δηλ. $u_p = 0$.

Δ) Το ποσοστό των ιονίων που έχουν ταχύτητα μεγαλύτερη από $3u_0 = 3 \text{ m/sec}$ είναι:

$$\frac{dN}{N_0} = f(u) du = e^{-u} du \rightarrow \lambda = \int_3^{\infty} \frac{dN}{N_0} = \int_3^{\infty} e^{-u} du = \frac{e^{-u}}{-1} \Big|_3^{\infty} = -\frac{e^{-u}}{1} \Big|_3^{\infty} = -\left(\frac{e^{-\infty}}{1} - \frac{e^{-3}}{1}\right) = e^{-3} \rightarrow \lambda = e^{-3} \approx 0,05 \text{ ή } 5\%$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ένα mole μορίων υδρογόνου και ένα mole μορίων αζώτου καταλαμβάνουν υπό την ίδια θερμοκρασία και πίεση, τα δύο ίσα μέρη ενός δοχείου, που χωρίζονται από ένα διάφραγμα. Οι συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης είναι τέτοιες ώστε τα δύο αέρια να μπορούν να θεωρηθούν ιδανικά.

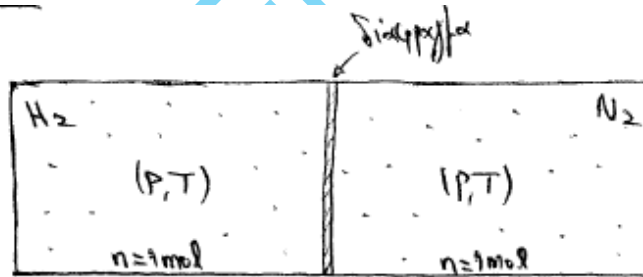
A) Αν η ταχύτητα u_{rms} των μορίων H_2 είναι 1850 m/s, πόση είναι η ταχύτητα u_{rms} των μορίων N_2 ;

B) Ποιά από τα δύο αέρια έχει μεγαλύτερο ποσοστό μορίων με ταχύτητες $(u_{rms} - 50) \text{ m/s} < u < (u_{rms} + 50) \text{ m/s}$;

Γ) Αν απομακρύνουμε το διάφραγμα που χωρίζει τα δύο αέρια έτσι ώστε αυτά να αναμιχθούν, η μεταβολή ΔS της εντροπίας του συστήματος θα είναι θετική, αρνητική ή μηδέν;

Δ) Θεωρείστε ότι το δοχείο είναι θερμικά μονωμένο και υπολογίστε τη μεταβολή αυτή ΔS .

ΛΥΣΗ



A) Επειδή το άτομο του αζώτου έχει ατομικό αριθμό 14, ενώ το υδρογόνο 1 κι επειδή και τα δύο αυτά άτομα είναι διατομικά προκύπτει ότι το άτομο του αζώτου είναι 14 φορές βαρύτερο απ' το άτομο του υδρογόνου. Δηλαδή: $m_N = 14 m_H$. 14

Η ενεργός τιμή της ταχύτητας του μορίου ιδανικού αερίου δίνεται απ' τη σχέση: $u_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$

Οπότε για κάθε αέριο είναι:

$$\left. \begin{aligned} v_{\text{rms}}(\text{N}_2) &= \sqrt{\frac{3k_B T}{m_N}} \\ v_{\text{rms}}(\text{H}_2) &= \sqrt{\frac{3k_B T}{m_H}} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(\div)} \frac{v_{\text{rms}}(\text{N}_2)}{v_{\text{rms}}(\text{H}_2)} = \frac{\sqrt{\frac{3k_B T}{m_N}}}{\sqrt{\frac{3k_B T}{m_H}}} = \sqrt{\frac{m_H}{m_N}} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{\text{rms}}(\text{N}_2) = v_{\text{rms}}(\text{H}_2) \sqrt{\frac{m_H}{m_N}} \xrightarrow{(\parallel)} v_{\text{rms}}(\text{N}_2) = v_{\text{rms}}(\text{H}_2) \sqrt{\frac{2 \cancel{m_H}}{28 \cancel{m_H}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{\text{rms}}(\text{N}_2) = \frac{v_{\text{rms}}(\text{H}_2)}{\sqrt{14}} = \frac{1850 \text{ m/sec}}{3,74} \rightarrow \boxed{v_{\text{rms}}(\text{N}_2) \approx 495 \text{ m/sec}}$$

β) Σύμφωνα με τη συνάρτηση κατανομής ταχύτητας Maxwell το ποσοστό των μορίων $\frac{dN}{N}$ με ταχύτητες στο εύρος από u έως $u+du$ είναι:

$$\frac{dN}{N} = f(u) du = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} u^2 e^{-\frac{mu^2}{2k_B T}} du \quad (2)$$

Για $u = v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ η (2) γίνεται:

$$\frac{dN}{N} = f(v_{\text{rms}}) du = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{3k_B T}{m} e^{-\frac{m}{2k_B T} \frac{3k_B T}{m}} du \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \cdot \frac{m}{2\pi k_B T} \frac{3k_B T}{m} e^{-\frac{3}{2}} du \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dN}{N} = C \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{3}{2}} du \quad (3)$$

Επειδή το εύρος ταχυτήτων είναι σχετικά μικρό, αέριου:

$$\Delta U = 100 \text{ m/sec} \ll v_{rms}(H_2) = 1850 \text{ m/sec}$$

και για $\Delta U = 100 \text{ m/sec} \ll v_{rms}(N_2) = 495 \text{ m/sec}$

η (β) μπορεί να γραφεί προσεγγιστικά ως:

$$\frac{\Delta N}{N} = G \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-3/2} \Delta U \quad (4)$$

Άρα για κάθε αέριο θα είναι:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta N(N_2)}{N} &= G \left(\frac{m_{N_2}}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-3/2} \Delta U \\ \frac{\Delta N(H_2)}{N} &= G \left(\frac{m_{H_2}}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-3/2} \Delta U \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(\div)} \frac{\Delta N(N_2)}{\Delta N(H_2)} = \left(\frac{m_{N_2}}{m_{H_2}} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta N(N_2)}{\Delta N(H_2)} = \left(\frac{14 m_{H_2}}{m_{H_2}} \right)^{1/2} \rightarrow \boxed{\frac{\Delta N(N_2)}{\Delta N(H_2)} = \sqrt{14} \approx 3,7}$$

Συνεπώς τα όρια αέριου με ταχύτερες στο εύρος

$$v_{rms}(N_2) - 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} < v < v_{rms}(N_2) + 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow 445 \text{ m/sec} < v < 545 \text{ m/sec}$$

είναι περίπου 3,7 φορές περισσότερα απ' τα όρια υδρογόνου

$$\text{στο εύρος } v_{rms}(H_2) - 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} < v < v_{rms}(H_2) + 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow 1800 \frac{\text{m}}{\text{s}} < v < 1900 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Γ) Ανοβαρύνοντας το διάφραγμα που χωρίζει τα δύο αέρια σε ίσα μέρη του δοχείου, αυτά εξαπλώνονται σε όλο το χώρο του δοχείου και αναμιγνύονται.

Αυτό έχει ως άμεσο αποτέλεσμα να αυξηθεί η εντροπία του συστήματος κι επομένως η μεταβολή της εντροπίας του συστήματος θα είναι θετική.

$$\Delta S > 0.$$

Δ) Θεωρώντας ότι το δοχείο είναι θερμικά μονωμένο, θα υπολογίσουμε τη μεταβολή της εντροπίας κάθε αερίου υπό ελεύθερη θερμοκρασία T από όγκο $V/2$ σε όγκο V .

$$\text{Είναι: } \Delta S = \int \frac{dQ}{T} \quad (5)$$

αλλά από τον 1^ο θερμοδυναμικό νόμο ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} dQ = dU + dW \\ \text{όπου } dU = nC_V dT = 0 \text{ επειδή } T = \text{const.} \\ \text{και } dW = P dV \end{array} \right\} \rightarrow dQ = P dV \quad (6)$$

$$\text{Άρα: } \Delta S = \int \frac{P dV}{T} \quad (7)$$

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων είναι:

$$PV = nRT \rightarrow P = \frac{nRT}{V} \quad \text{οπότε η (1) δίνει:}$$

$$\Delta S = \int \frac{nRT}{V} \frac{dV}{T} \rightarrow \Delta S = nR \int_{V/2}^V \frac{dV}{V} = nR \ln \frac{V}{V/2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta S = nR \ln 2}$$

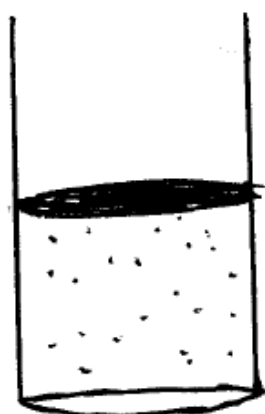
Άρα η συνολική μεταβολή της εντροπίας του συστήματος των δύο αερίων είναι:

$$\Delta S_{\text{ολ}} = \Delta S_{\text{H}_2} + \Delta S_{\text{O}_2} = 2nR \ln 2 \xrightarrow{n=1\text{mol}} \boxed{\Delta S_{\text{ολ}} = 2R \ln 2} \quad (3/04)$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Θεωρείστε ότι ένα γραμμομόριο ιδανικού αερίου βρίσκεται σε ένα κυλινδρικό δοχείο αρχικού όγκου V_1 και θερμοκρασίας T . Σιγά - σιγά (δηλαδή με αντιστρεπτή μεταβολή) και υπό σταθερή θερμοκρασία το καπάκι μετακινείται ώστε να αυξάνεται ο όγκος του αερίου, ο οποίος τελικά γίνεται $V_2 > V_1$. Να υπολογιστεί η μεταβολή της εντροπίας κατά τη διαδικασία αυτή.

ΛΥΣΗ



(V_1, T)
ΑΡΧΙΚΑ



(V_2, T)
ΤΕΛΙΚΑ

Σύμφωνα με τον ορισμό της απειροστικής μεταβολής της εντροπίας μιας αντιστρεπτικής μεταβολής έχουμε: $dS = \frac{\delta Q}{T}$ (1)

Αλλά σύμφωνα με του 1^ο θερμοδυναμικό νόμο ισχύει:

$$\delta Q = dU + \delta W \quad (2)$$

Αλλά είναι: $dU = nC_V dT$ κι επειδή $T = \text{const} \rightarrow dT = 0$

οπότε και $dU = 0$

Ενώ $\delta W = P dV$: και απ' την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων είναι: $PV = nRT \rightarrow P = \frac{nRT}{V}$ οπότε:

$$\delta W = nRT \frac{dV}{V}$$

Άρα η β) γίνεται:

$$\delta Q = nRT \frac{dV}{V} \quad \text{β)}$$

Οπότε η III λόγω της (β) δίνει:

$$dS = \frac{nRT}{T} \frac{dV}{V} \rightarrow dS = nR \frac{dV}{V} \xrightarrow{n=1\text{mol}} dS = R \frac{dV}{V}$$

Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη προκείμενη η μεταβολή της εντροπίας της διαδικασίας αυτής ως:

$$\int_{S_1}^{S_2} dS = R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \rightarrow \Delta S = S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Παρατηρείται ότι επειδή $V_2 > V_1 \rightarrow \frac{V_2}{V_1} > 1 \rightarrow \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) > 0$

οπότε η εντροπία του συστήματος αυξάνεται κατά τη διαδικασία αυτή.