ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΕΙΔΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς του Lorentz:

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad t' = \gamma(t - \beta x / c), \quad y' = y, \quad z' = z,$$

όπου $\beta = \upsilon / c$ και $\gamma = 1/(1-\beta^2)^{1/2}$
να αποδείξετε την εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

Να αναφέρετε τέλος τη φυσική σημασία της εξίσωσης αυτής.

(Τμήμα Αγρονόμων – Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

Είναι:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = \gamma^2(x - \beta ct)^2 + y^2 + z^2 - c^2\gamma^2(t - \beta x/c)^2 =$$

$$= \gamma^2(x^2 + \beta^2c^2t^2 - 2x\beta ct) + y^2 + z^2 - c^2\gamma^2(t^2 + \beta^2x^2/c^2 - 2\beta xt/c) =$$

$$= \gamma^2x^2 + \gamma^2\beta^2c^2t^2 - 2\gamma^2x\beta ct + y^2 + z^2 - c^2\gamma^2t^2 - \gamma^2\beta^2x^2 + 2\gamma^2\beta xct =$$

$$= \gamma^2x^2 - \gamma^2\beta^2x^2 + y^2 + z^2 + \gamma^2\beta^2c^2t^2 - c^2\gamma^2t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = \gamma^2x^2(1-\beta^2) + y^2 + z^2 - \gamma^2c^2t^2(1-\beta^2) \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά: $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\beta^2} = \dfrac{1}{\gamma} \Rightarrow 1-\beta^2 = \dfrac{1}{\gamma^2}$ οπότε η **(1)** δίνει:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

Η φυσική σημασία της παραπάνω εξίσωσης εκφράζει την αναλλοιώτητα της ποσότητας $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ (μήκος Lorentz) στους μετασχηματισμούς Lorentz, δηλαδή η ποσότητα αυτή έχει την ίδια τιμή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς και αυτό σχετίζεται άμεσα με την αναλλοιώτητα της ταχύτητας του φωτός.

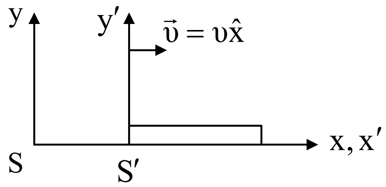
ΘΕΜΑ 2

α) Μια ράβδος που είναι παράλληλη προς τον άξονα των x ενός συστήματος συντεταγμένων S κινείται με ταχύτητα $\upsilon\hat{x}$ στο S. Πως ορίζεται το μήκος της στην ειδική θεωρία της σχετικότητας;
β) Έστω ότι η ράβδος είναι ακίνητη στο S. Ένας παρατηρητής Π_1 που κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1\hat{x}$ στο S μετράει το μήκος της ράβδου και το βρίσκει ίσο με L_1. Ποίο θα ήταν το μήκος της ράβδου για έναν παρατηρητή Π_2, που κινείται με ταχύτητα $\upsilon_2\hat{x}$ στο S συναρτήσει των L_1, υ_1 και υ_2;

(Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α)

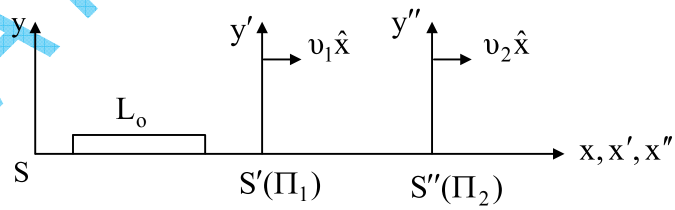


Έστω ότι $L' = \Delta x'$ είναι το μήκος της ράβδου ως προς το σύστημα S΄ στο οποίο αυτή είναι ακίνητη. Ένας παρατηρητής στο σύστημα S μετρώντας τις θέσεις των άκρων x_1 και x_2 ταυτόχρονα (δηλαδή $\Delta t = 0$), προσδιορίζει το μήκος της ράβδου, σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς Lorentz ως:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \upsilon\Delta t) \overset{\Delta t=0}{\Rightarrow} \Delta x' = \gamma\Delta x \qquad \text{ή} \qquad L' = \gamma L \Rightarrow L = L'/\gamma$$

Κι επειδή $\gamma > 1$ είναι $L < L'$, δηλαδή αντιλαμβάνεται τη συστολή του μήκους ράβδου. Συνεπώς στην ειδική θεωρία της σχετικότητας, κάθε παρατηρητής που κινείται παράλληλα στη ράβδο μετρά μήκος μικρότερο κατά παράγοντα γ από το μήκος αυτής στο σύστημα ως προς το οποίο είναι ακίνητη (μήκος ηρεμίας).

β)



Έστω L_o το μήκος της ράβδου ως προς το σύστημα S στο οποίο είναι ακίνητη (μήκος ηρεμίας). Οι παρατηρητές Π_1 και Π_2, οι οποίοι κινούνται ως προς τη ράβδο θα αντιλαμβάνονται συστολή του μήκους της και συγκεκριμένα θα μετρούν:

$$\Pi_1: \quad L_1 = \frac{L_o}{\gamma} \Rightarrow L_1 = L_o\sqrt{1-\upsilon_1^2/c^2} \qquad \textbf{(1)}$$

$$\Pi_2: \quad L_2 = \frac{L_o}{\gamma'} \Rightarrow L_2 = L_o\sqrt{1-\upsilon_2^2/c^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Διαιρώντας τις **(1)** και **(2)** κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{1-\upsilon_1^2/c^2}{1-\upsilon_2^2/c^2}} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \sqrt{\frac{c^2-\upsilon_1^2}{c^2-\upsilon_2^2}} \Rightarrow L_2 = L_1\sqrt{\frac{c^2-\upsilon_2^2}{c^2-\upsilon_1^2}}$$

ΘΕΜΑ 3

Ο μέσος χρόνος ζωής του π^+ μεσονίου στο δικό του σύστημα αναφοράς είναι $2{,}5\cdot 10^{-8}$ sec.
α) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος ζωής μιας δέσμης από π^+ μεσόνια που κινούνται στο εργαστήριο με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}8c$;
β) Πόση απόσταση διανύουν τα π^+ μεσόνια με αυτή την ταχύτητα κατά τη διάρκεια του μέσου χρόνου ζωής τους;

(Τμήμα Μηχανικών Μεταλλείων – Μεταλλουργών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Θεωρώντας ως ακίνητο σύστημα το σύστημα του εργαστηρίου και ως κινούμενο σύστημα, το σύστημα το οποίο συμπίπτει με το μεσόνιο και κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}8c$, ο ακίνητος παρατηρητής στο εργαστήριο θα αντιλαμβάνεται διαστολή χρόνου. Δηλαδή ο μέσος χρόνος ζωής των μεσονίων στο εργαστήριο είναι:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

όπου $\Delta t' = 2{,}5\cdot 10^{-8}$ sec ο μέσος χρόνος ζωής στο κινούμενο σύστημα και

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} \Rightarrow \gamma = 1{,}67$$

Άρα : $\Delta t = 1{,}67\cdot 2{,}5\cdot 10^{-8}\,\text{sec} \Rightarrow \Delta t = 4{,}18\cdot 10^{-8}\,\text{sec}$

β) Η απόσταση που διανύουν τα μεσόνια κατά τη διάρκεια του χρόνου ζωής τους στο σύστημα του εργαστηρίου είναι:

$$L = \upsilon\Delta t = 0{,}8c\cdot 4{,}18\cdot 10^{-8}\text{sec} = 3{,}34c\cdot 10^{-8} \Rightarrow L \cong 10\text{m}$$

Ενώ η απόσταση που διανύουν τα μεσόνια ως προς το δικό τους σύστημα αναφοράς, λόγω συστολής μήκους είναι:

$$L' = \frac{L}{\gamma} = \frac{10}{1{,}67}\text{m} \Rightarrow L' \cong 6\text{m}$$

ΘΕΜΑ 4

Διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}9c$ ως προς τη Γη. Αν ο πιλότος του διαστημοπλοίου μετρά ότι έχει κινηθεί για χρόνο $\Delta t' = 1\text{sec}$, ποια είναι η απόσταση L στο σύστημα της Γης που θα έχει διανύσει το διαστημόπλοιο στο χρόνο αυτό;

(Κατατακτήριες εξετάσεις από Α.Τ.Ε.Ι. για Χημικό)

Λύση

Ένας ακίνητος παρατηρητής στο σύστημα της Γης αντιλαμβάνεται διαστολή του χρόνου κίνησης του διαστημοπλοίου κι επομένως το βλέπει να κινείται για χρόνο:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{1\text{sec}}{\sqrt{1-(0{,}9c)^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}19}} \Rightarrow \Delta t = 2{,}3\text{sec}$$

Άρα η απόσταση L που διανύει το διαστημόπλοιο στο σύστημα της Γης (όπως την μετρά ακίνητος παρατηρητής) είναι:

$$L = \upsilon \Delta t = 0{,}9c \cdot 2{,}3 = 2{,}07c = 2{,}07 \cdot 3 \cdot 10^8\text{m} = 6{,}21 \cdot 10^8\text{m}$$

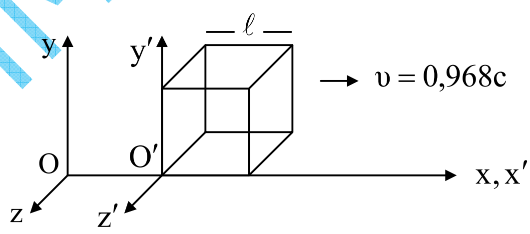
$$\text{ή} \qquad L = 6{,}21 \cdot 10^5\text{km}$$

ΘΕΜΑ 5

Ένας κύβος που έχει ολική επιφάνεια S και όγκο V κινείται κατά μήκος μιας ακμής του με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}968c$ σε σχέση με το σύστημα του εργαστηρίου. Να υπολογιστεί η επιφάνεια και ο όγκος του κύβου που μετράει ο ακίνητος παρατηρητής.

(Τμήμα Μαθηματικών& Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



Έστω ότι ο κύβος κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 0{,}968c$ κατά μήκος της ακμής του, που συμπίπτει με τον άξονα xx΄. Αν ℓ είναι το μήκος της κάθε πλευράς του κύβου ως προς το σύστημα του O΄x΄y΄z΄ τότε η επιφάνεια του είναι $S = 6\ell^2$ και ο όγκος του είναι $V = \ell^3$.

Ένας ακίνητος παρατηρητής στο σύστημα του εργαστηρίου Oxyz θα παρατηρεί συστολή του μήκους στις πλευρές εκείνες του κύβου, οι οποίες είναι παράλληλες στον άξονα της κίνησης xx΄, ενώ οι άλλες πλευρές θα παραμένουν αναλλοίωτες. Δηλαδή ισχύει:

$$\ell'_x = \frac{\ell_x}{\gamma} = \frac{\ell}{\gamma},$$

όπου $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(0{,}968c)^2/c^2}} = \dfrac{1}{0{,}25} \Rightarrow \gamma = 4$

$$\ell'_x = \frac{\ell}{4}, \quad \ell'_y = \ell_y = \ell \quad \text{και} \quad \ell'_z = \ell_z = \ell$$

Άρα η επιφάνεια του κύβου που μετρά ο ακίνητος παρατηρητής είναι το άθροισμα των έξι εδρών του, από τις οποίες οι τέσσερις που έχουν πλευρές παράλληλες στον άξονα xx΄ μεταβάλλονται, ενώ οι άλλες δυο παραμένουν αναλλοίωτες. Δηλαδή:

$$S' = 4\frac{\ell}{4}\ell + 2\ell^2 = 3\ell^2 \quad \text{κι επειδή} \quad S = 6\ell^2 \quad \text{προκύπτει ότι:} \quad S' = S/2$$

Και ο όγκος του κύβου είναι:

$$V' = \ell'_x \ell'_y \ell'_z = \frac{\ell}{4}\ell\ell \Rightarrow V' = \frac{\ell^3}{4} \quad \text{κι επειδή} \quad V = \ell^3 \quad \text{είναι:} \quad V' = V/4$$

Συνεπώς ο ακίνητος παρατηρητής θα αντιλαμβάνεται τον κύβο ως ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

ΘΕΜΑ 6

Ο μέσος χρόνος ζωής ενός ελεύθερου νετρονίου είναι τ = 15 λεπτά. Διασπάται σε ένα πρωτόνιο, ένα ηλεκτρόνιο και ένα αντινετρίνο. Αν υποθέσουμε ότι ένα συγκεκριμένο νετρόνιο επιβιώνει ακριβώς για αυτό το χρονικό διάστημα στο δικό του σύστημα αναφοράς, πόση είναι η ταχύτητά του ως προς τη Γη αν μόλις κατορθώνει να διανύσει την απόσταση Ήλιου – Γης; Δίνονται: Απόσταση Ήλιου – Γης = $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, c = $3 \cdot 10^{8}$ m/sec.

(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση

Η ταχύτητα του νετρονίου ως προς ακίνητο παρατηρητή στη Γη είναι:

$$\upsilon = \frac{L}{\Delta t} \qquad \mathbf{(1)}$$

όπου L η απόσταση Ήλιου – Γης και Δt ο μέσος χρόνος ζωής του νετρονίου ως προς τον ακίνητο παρατηρητή, ο οποίος παρατηρεί διαστολή του χρόνου και είναι:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Άρα η **(1)** λόγω της **(2)** δίνει :

$$\upsilon = \frac{L}{\dfrac{\tau}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}} \Rightarrow \frac{\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{L}{\tau} = \frac{1{,}5\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}}{15\cdot 60\,\mathrm{sec}} = \frac{1{,}5\cdot 10^{11}}{900} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{\upsilon} = \frac{900}{1{,}5\cdot 10^{11}} = 6\cdot 10^{-9} \Rightarrow \frac{1-\upsilon^2/c^2}{\upsilon^2} = 36\cdot 10^{-18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\upsilon^2} - \frac{1}{c^2} = 36\cdot 10^{-18} \Rightarrow \frac{1}{\upsilon^2} = 36\cdot 10^{-18} + \frac{1}{c^2} = 36\cdot 10^{-18} + 0{,}11\cdot 10^{-16} =$$

$$= 36\cdot 10^{-18} + 11\cdot 10^{-18} = 47\cdot 10^{-18} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{1}{47\cdot 10^{-18}} = 0{,}021\cdot 10^{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = 0{,}146\cdot 10^{9}\,\mathrm{m/sec} = 1{,}46\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/sec} \quad ή \quad \upsilon = 0{,}49c$$

ΘΕΜΑ 7

Ένα διαστημόπλοιο Α, αναχωρεί από τη Γη και κατευθύνεται προς το άστρο α του Κενταύρου, με σταθερή ταχύτητα. Η απόσταση του άστρου από τη Γη είναι 4 έτη φωτός. (1 έτος φωτός = η απόσταση που διανύει το φως σε ένα έτος = $1\ell y = 9{,}45\cdot 10^{15}\,\text{m}$).

α) Πόση πρέπει να είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου ως προς τη Γη, ώστε για έναν παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο το ταξίδι αυτό να διαρκέσει 4 έτη;

β) Πόσο διαρκεί το ταξίδι για έναν παρατηρητή στη Γη;

γ) Υποθέτουμε ότι παράλληλα με το διαστημόπλοιο Α, ένα δεύτερο διαστημόπλοιο Β επιστρέφει από τον α του Κενταύρου με ταχύτητα $c/\sqrt{2}$ ως προς τη Γη. Ποια είναι η ταχύτητα του διαστημοπλοίου Β όπως την μετρά ο παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α;

δ) Αν το μήκος ηρεμίας του διαστημοπλοίου Β είναι $\ell_o = 48\text{m}$, ποιο είναι το μήκος του όπως το μετρά ένας παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο διαστημόπλοιο Α;

(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Η σταθερή ταχύτητα του διαστημοπλοίου είναι:

$$\upsilon = \frac{L}{\Delta t} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $L = 9{,}45\cdot 10^{15}\,\text{m}$ η απόσταση του άστρου από τη Γη και Δt ο χρόνος του ταξιδιού ως προς ακίνητο παρατηρητή στη Γη, ο οποίος λόγω διαστολής του χρόνου είναι:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $\Delta t' = 4\text{years} = 12{,}64\cdot 10^7\,\text{sec}$ ($1\text{year} = 365\text{days} = 3{,}16\cdot 10^7\,\text{sec}$) ο χρόνος του ταξιδιού ως προς τον κινούμενο παρατηρητή μέσα στο διαστημόπλοιο.

Επομένως η **(1)** λόγω της **(2)** δίνει:

$$\upsilon = \frac{9{,}45\cdot 10^{15}}{\dfrac{12{,}64\cdot 10^7}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}} \Rightarrow \frac{\upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = 0{,}75\cdot 10^8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}{\upsilon} = \frac{1}{0{,}75\cdot 10^8} = 1{,}33\cdot 10^{-8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-\upsilon^2/c^2}{\upsilon^2} = 1{,}78\cdot 10^{-16} \Rightarrow \frac{1}{\upsilon^2} - \frac{1}{c^2} = 1{,}78\cdot 10^{-16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\upsilon^2} = 1{,}78\cdot 10^{-16} + \frac{1}{c^2} = 1{,}78\cdot 10^{-16} + 0{,}11\cdot 10^{-16} = 1{,}89\cdot 10^{-16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon^2 = \frac{1}{1{,}89\cdot 10^{-16}} = 0{,}53\cdot 10^{16} \Rightarrow \upsilon = 0{,}73\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/sec} \quad \text{ή} \quad \upsilon = 0{,}24c$$

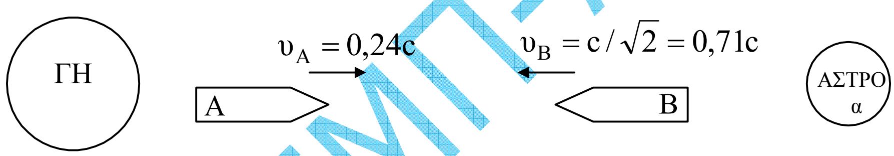
β) Το ταξίδι για έναν ακίνητο παρατηρητή στη Γη, λόγω διαστολής χρόνου θα διαρκεί σύμφωνα με τη **(2)**:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{12{,}64\cdot 10^{7}\,\sec}{\sqrt{1-0{,}24^2}} = \frac{12{,}64\cdot 10^{7}}{\sqrt{0{,}94}} = \frac{12{,}64\cdot 10^{7}}{0{,}97} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t = 13{,}03\cdot 10^{7}\,\sec$$

όπου $\frac{\upsilon}{c} = \frac{0{,}73\cdot 10^{8}}{3\cdot 10^{8}} = 0{,}24 \Rightarrow \upsilon_A = 0{,}24c$

γ)



Θεωρώντας ως κινούμενο σύστημα το διαστημόπλοιο Α, που κινείται με ταχύτητα υ_A = 0,24c ως προς τη Γη και το διαστημόπλοιο Β κινείται αντίθετα προς αυτό με ταχύτητα υ_B = -0,71c ως προς τη Γη, σύμφωνα με το μετασχηματισμό της ταχύτητας το διαστημόπλοιο Β έχει ταχύτητα υ'_B ως προς το Α:

$$\upsilon'_B = \frac{\upsilon_B - \upsilon_A}{1-\upsilon_B\upsilon_A/c^2} = \frac{-0{,}71c - 0{,}24c}{1-(-0{,}71c)0{,}24c/c^2} = \frac{-0{,}95c}{1+0{,}17} \Rightarrow \upsilon'_B = -0{,}81c$$

δ) Ένα παρατηρητής μέσα στο διαστημόπλοιο Α κινείται ως προς το διαστημόπλοιο Β με ταχύτητα:

$$\upsilon'_A = \frac{\upsilon_A - \upsilon_B}{1-\upsilon_A\upsilon_B/c^2} = \frac{0{,}24c-(-0{,}71c)}{1-0{,}24c(-0{,}71c)/c^2} \Rightarrow \upsilon'_A = 0{,}81c$$

και θα αντιλαμβάνεται συστολή του μήκους του διαστημοπλοίου Β έτσι ώστε:

$$\ell = \frac{\ell_o}{\gamma} = \ell_o\sqrt{1-\upsilon'^2_A/c^2} = \ell_o\sqrt{1-(0{,}81c)^2/c^2} = \ell_o\sqrt{0{,}34} = 0{,}58\ell_o = 0{,}58\cdot 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = 27{,}84\mathrm{m}$$

ΘΕΜΑ 8

Σωματίδιο κινείται σε σύστημα K΄ στο επίπεδο xy με ταχύτητα c/2, η οποία σχηματίζει γωνία 60^o με τον άξονα x΄. Αν το K΄ κινείται με ταχύτητα 0,6c σε σχέση με το K, βρείτε τις εξισώσεις κίνησης x(t) και y(t) στο σύστημα K.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

<u>Λύση</u>

Οι συνιστώσες της ταχύτητας $u' = c/2$ του σωματιδίου στο σύστημα K΄ είναι:

$$u'_x = u'\cos 60^o = \frac{c}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{c}{4} \Rightarrow u'_x = 0{,}25c$$

$$u'_y = u'\sin 60^o = \frac{c}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}c \Rightarrow u'_y = 0{,}43c$$

Επειδή το σύστημα K΄ κινείται με ταχύτητα υ = 0,6c ως προς το ακίνητο σύστημα K οι συνιστώσες της ταχύτητας του σωματιδίου ως προς το K, σύμφωνα με τους αντίστροφους μετασχηματισμούς των ταχυτήτων είναι:

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \upsilon u'_x / c^2} = \frac{0{,}25c + 0{,}6c}{1 + 0{,}6c0{,}25c/c^2} = \frac{0{,}85c}{1 + 0{,}15} \Rightarrow u_x = 0{,}74c$$

και $$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \upsilon u'_x / c^2)}$$

όπου $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}36}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}64}} = \frac{1}{0{,}8} \Rightarrow \gamma = 1{,}25$$

οπότε: $$u_y = \frac{0{,}43c}{1{,}25(1 + 0{,}15)} = \frac{0{,}43c}{1{,}44} \Rightarrow u_y = 0{,}3c$$

Άρα οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου στο σύστημα K προκύπτουν ως εξής:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = 0{,}74c\int_0^t dt \Rightarrow x = 0{,}74ct$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_0^y dy = 0{,}3c\int_0^t dt \Rightarrow y = 0{,}3ct$$

ΘΕΜΑ 9

Δύο σωματίδια βρίσκονται στον άξονα x συστήματος Κ. Το ένα είναι ακίνητο, ενώ το άλλο κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon} = \upsilon \vec{i}$. Ποια πρέπει να είναι η ταχύτητα συστήματος Κ΄, ώστε παρατηρητής πάνω σε αυτό να βλέπει ότι τα σωματίδια πλησιάζουν το ένα στο άλλο με ίσες ταχύτητες;

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση

Οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων ως προς το σύστημα Κ είναι:

$$\upsilon_A = 0 \quad \text{και} \quad \upsilon_B = \upsilon$$

Αν η ταχύτητα του συστήματος Κ΄ ως προς το Κ είναι v, τότε σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς των ταχυτήτων οι ταχύτητες των σωματιδίων ως προς το Κ΄ είναι:

$$\upsilon'_A = \frac{\upsilon_A - v}{1 - \upsilon_A v / c^2} \Rightarrow \upsilon'_A = -v \qquad \textbf{(1)}$$

$$\upsilon'_B = \frac{\upsilon_B - v}{1 - \upsilon_B v / c^2} \Rightarrow \upsilon'_B = \frac{\upsilon - v}{1 - \upsilon v / c^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Για να βλέπει ο παρατηρητής πάνω στο Κ΄ τα δύο σωματίδια να πλησιάζουν το ένα στο άλλο με ίσες ταχύτητες θα πρέπει να ισχύει:

$$\upsilon'_A = -\upsilon'_B \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} -v = -\frac{\upsilon - v}{1 - \upsilon v / c^2} \Rightarrow -v + \frac{\upsilon}{c^2} v^2 = -\upsilon + v \Rightarrow \frac{\upsilon}{c^2} v^2 - 2v + \upsilon = 0$$

Η παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση έχει διακρίνουσα

$\Delta = 4 - 4\upsilon^2/c^2 = 4(1 - \upsilon^2/c^2)$ κι επομένως οι λύσεις της είναι:

$$v = \frac{2 \pm \sqrt{4(1 - \upsilon^2 / c^2)}}{2\upsilon / c^2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}{\upsilon / c^2} \Rightarrow v = \frac{c^2}{\upsilon}(1 \pm \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2})$$

Η λύση με το + απορρίπτεται γιατί δίνει $v > c$ οπότε τελικά είναι:

$$v = \frac{c^2}{\upsilon}(1 - \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2})$$

ΘΕΜΑ 10

α) Σύστημα αναφοράς S΄ κινείται με ταχύτητα $v\hat{x}$ σε σχέση με σύστημα S. Στο S ένα σώμα κινείται με ταχύτητα $\upsilon_x\hat{x}+\upsilon_y\hat{y}+\upsilon_z\hat{z}$.
Να βρεθούν, σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας, οι συνιστώσες της ταχύτητας του σώματος στο σύστημα S΄. Δίνονται οι μετασχηματισμοί Lorentz.
β) Στην ειδική περίπτωση ενός φωτονίου με συνιστώσες $\upsilon_x = c\cos\theta,\ \upsilon_y = c\sin\theta,\ \upsilon_z = 0$ να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητάς του στο S΄. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

(Σχολή Αγρονόμων – Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας του σώματος $\upsilon'_x,\upsilon'_y,\upsilon'_z$ στο σύστημα S΄, με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Lorentz προκύπτουν ως εξής:

$$\upsilon'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} \Rightarrow \upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}\upsilon_x}$$

$$\upsilon'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} \Rightarrow \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\upsilon_x\right)}$$

$$\upsilon'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} \Rightarrow \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\upsilon_x\right)}$$

Οι παραπάνω σχέσεις αποτελούν τους **μετασχηματισμούς ταχυτήτων Lorentz**.

β) Για το φωτόνιο στο σύστημα S είναι $\upsilon_x = c\cos\theta,\ \upsilon_y = c\sin\theta,\ \upsilon_z = 0$ κι επομένως σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς ταχυτήτων οι συνιστώσες της ταχύτητας στο S΄, είναι:

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - v}{1 - v\upsilon_x/c^2} = \frac{c\cos\theta - v}{1 - vc\cos\theta/c^2} = \frac{c\cos\theta - v}{1 - v\cos\theta/c}$$

$$\upsilon'_y = \frac{\upsilon_y}{\gamma(1 - v\upsilon_x/c^2)} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\frac{c\sin\theta}{1 - v\cos\theta/c}$$

$$\upsilon'_z = \frac{\upsilon_z}{\gamma(1 - v\upsilon_x / c^2)} = 0 \qquad (\text{επειδή } \upsilon_z = 0)$$

Άρα το μέτρο της ταχύτητας του φωτονίου στο σύστημα S΄ είναι:

$$\upsilon'^2 = \upsilon_x'^2 + \upsilon_y'^2 + \upsilon_z'^2 = \left(\frac{c\cos\theta - v}{1 - v\cos\theta / c}\right)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(\frac{c\sin\theta}{1 - v\cos\theta / c}\right)^2 + 0 =$$

$$= \frac{c^2\cos^2\theta + v^2 - 2cv\cos\theta + c^2\sin^2\theta - v^2\sin^2\theta}{(1 - v\cos\theta / c)^2} =$$

$$= \frac{c^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2cv\cos\theta + v^2(1 - \sin^2\theta)}{\left(\frac{c - v\cos\theta}{c}\right)^2} =$$

$$= \frac{c^2 - 2cv\cos\theta + v^2\cos^2\theta}{(c - v\cos\theta)^2}c^2 = \frac{(c - v\cos\theta)^2}{(c - v\cos\theta)^2}c^2 \Rightarrow \upsilon'^2 = c^2 \Rightarrow \upsilon' = c$$

Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνει το αναλλοίωτο της ταχύτητας του φωτός, δηλαδή η ταχύτητα του φωτονίου είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός c σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

ΘΕΜΑ 11

Διαστημόπλοιο κινείται με ταχύτητα $\upsilon_x = 0{,}9c$ ως προς τη γη. Κάποια στιγμή συναντά μετεωρίτη που κινείται στην ίδια διεύθυνση με την ίδια ταχύτητα 0,9c ως προς τη γη αλλά αντίθετα από αυτήν του διαστημοπλοίου. Ποια είναι η ταχύτητα του μετεωρίτη ως προς το διαστημόπλοιο;

(Σχολή Αγρονόμων – Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

Θεωρώντας ως κινούμενο σύστημα αναφοράς το διαστημόπλοιο που έχει ταχύτητα $\upsilon_x = 0{,}9c$ ως προς τη γη, η ταχύτητα του μετεωρίτη ως προς αυτό σύμφωνα με τον μετασχηματισμό ταχύτητας Lorentz είναι:

$\upsilon'_\mu = \dfrac{\upsilon_\mu - \upsilon_x}{1 - \upsilon_x \upsilon_\mu / c^2}$ όπου $\upsilon_\mu = -0{,}9c$ η ταχύτητα του μετεωρίτη ως προς τη γη, αφού κινείται αντίθετα από το διαστημόπλοιο.

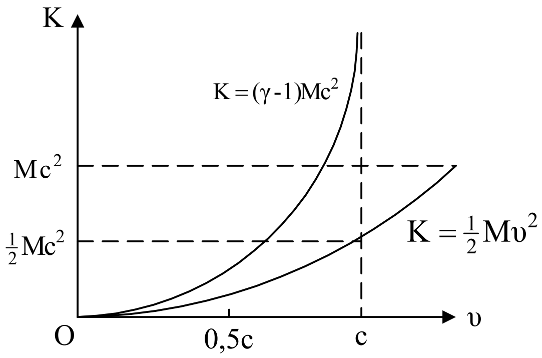
Οπότε: $$\upsilon'_\mu = \frac{-0{,}9c - 0{,}9c}{1 - 0{,}9c(-0{,}9c)/c^2} = \frac{-1{,}8c}{1{,}81} \Rightarrow \upsilon'_\mu = -0{,}99c$$

ΘΕΜΑ 12

Σχεδιάστε την κινητική ενέργεια ενός σώματος συναρτήσει της ταχύτητας σαν κλασικό και σαν σχετικιστικό μέγεθος.

(Σχολή Αγρονόμων – Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Η κλασική κινητική ενέργεια $K=\frac{1}{2}M\upsilon^2$ για $\upsilon=c$ έχει τιμή $K=\frac{1}{2}Mc^2$, ενώ η σχετικιστική κινητική ενέργεια $K=(\gamma-1)Mc^2=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}-1\right)Mc^2$ για $\upsilon=c$ τείνει στο άπειρο.

Παρατηρείται ότι για $\upsilon \ll c$ είναι:

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}=1+\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}+\ldots\Rightarrow\gamma-1=\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}$$

κι επομένως η έκφραση $K=(\gamma-1)Mc^2$ γίνεται:

$$K=\frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2}Mc^2\Rightarrow K=\frac{1}{2}M\upsilon^2$$

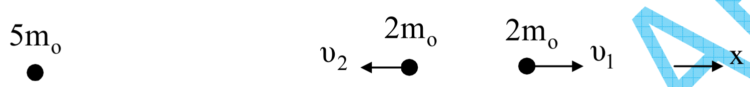
Δηλαδή για $\upsilon \ll c$ η κινητική ενέργεια ανάγεται στην κλασική έκφραση.

ΘΕΜΑ 13

Ένα σωματίδιο βρίσκεται ακίνητο στο σύστημα αναφοράς S. Η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου είναι $5m_o$, όπου m_o είναι μια γνωστή σταθερά. Το σωματίδιο διασπάται συμμετρικά σε δύο πανομοιότυπα σωματίδια με μάζα ηρεμίας $2m_o$ το καθένα, τα οποία κινούνται πάνω στον άξονα των x.
α) Να βρεθούν τα μέτρα των ταχυτήτων των δύο σωματιδίων στο σύστημα αναφοράς S.
β) Ένα άλλο σύστημα αναφοράς S΄, κινείται ως προς το S με σταθερή ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{x}$. Στο σύστημα αυτό το ένα σωματίδιο εμφανίζεται ακίνητο. Ποια είναι η ταχύτητα του άλλου σωματιδίου στο σύστημα αναφοράς S΄;

(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση



ΑΡΧΙΚΑ **ΤΕΛΙΚΑ**

α) Λόγω της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων ισχύει η αρχή διατήρησης της σχετικιστικής ορμής και της ολικής σχετικιστικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow 0 = m_1 υ_1 + m_2 υ_2 \Rightarrow 0 = \frac{2m_o υ_1}{\sqrt{1-υ_1^2/c^2}} + \frac{2m_o υ_2}{\sqrt{1-υ_2^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2m_o υ_2}{\sqrt{1-υ_2^2/c^2}} = -\frac{2m_o υ_1}{\sqrt{1-υ_1^2/c^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{1-υ_2^2/c^2}}{υ_2} = -\frac{\sqrt{1-υ_1^2/c^2}}{υ_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1-υ_2^2/c^2}{υ_2^2} = \frac{1-υ_1^2/c^2}{υ_1^2} \Rightarrow \frac{c^2-υ_2^2}{c^2 υ_2^2} = \frac{c^2-υ_1^2}{c^2 υ_1^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{υ_2^2} - 1 = \frac{c^2}{υ_1^2} - 1 \Rightarrow \frac{c^2}{υ_2^2} = \frac{c^2}{υ_1^2} \Rightarrow υ_1 = υ_2 \qquad \textbf{(1)}$$

Δηλαδή τα δύο σωματίδια τελικά κινούνται με ταχύτητες ίσου μέτρου $υ_1 = υ_2 = υ$, αλλά αντίθετης διεύθυνσης.
Από την αρχή διατήρησης της ολικής σχετικιστικής ενέργειας προκύπτει:

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow 5m_o c^2 = \frac{2m_o c^2}{\sqrt{1-υ_1^2/c^2}} + \frac{2m_o c^2}{\sqrt{1-υ_2^2/c^2}} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 5m_o c^2 = \frac{4m_o c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\upsilon^2/c^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$1-\frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{c^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow \upsilon = \frac{3}{5}c \Rightarrow \upsilon = 0{,}6c \qquad \textbf{(2)}$$

β) Στο σύστημα S΄το σωματίδιο 1 είναι ακίνητο, δηλαδή $\upsilon_1' = 0$ οπότε σύμφωνα με το μετασχηματισμό των ταχυτήτων είναι:

$$\upsilon_1' = \frac{\upsilon_1 - v}{1 - v\upsilon_1/c^2} = 0 \Rightarrow \upsilon_1 - v = 0 \Rightarrow v = \upsilon_1 \overset{(2)}{\Rightarrow} v = 0{,}6c$$

Άρα η ταχύτητα του άλλου σωματιδίου ως προς το S΄, λαμβάνοντας υπόψη ότι κινείται αντίθετα του άλλου, δηλαδή $\upsilon_2 = -0{,}6c$ είναι:

$$\upsilon_2' = \frac{\upsilon_2 - v}{1 - v\upsilon_2/c^2} = \frac{-0{,}6c - 0{,}6c}{1 - 0{,}6c(-0{,}6c)/c^2} = \frac{-1{,}2c}{1+0{,}36} \Rightarrow \upsilon_2' = -0{,}88c$$

ΘΕΜΑ 14

Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_1 ($m_1c^2 = 1\text{GeV}$) κινείται με ταχύτητα $\upsilon_1 = 0{,}7c$ και συγκρούεται με ένα άλλο ακίνητο σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_2 ($m_2c^2 = 10\text{GeV}$) στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Μετά την κρούση τα δύο σωματίδια σχηματίζουν ένα σώμα με μάζα ηρεμίας Μ. Υπολογίστε:

α) τη σχετικιστική ενέργεια (σε GeV), την ορμή (σε GeV/c) και την κινητική ενέργεια (σε GeV) του σωματιδίου m_1 στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου πριν την κρούση.

β) την ολική ενέργεια (σε GeV) και τη μάζα Μ του συστήματος (σε GeV/c^2) μετά την κρούση.

(Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.,
Σχολή Αγρονόμων – Τοπογράφων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Η ολική σχετικιστική ενέργεια του σωματιδίου m_1 στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου πριν την κρούση είναι:

$$E_1 = \gamma m_1c^2 = \frac{m_1c^2}{\sqrt{1-\upsilon_1^2/c^2}} = \frac{1\text{GeV}}{\sqrt{1-0{,}7^2}} = \frac{1\text{GeV}}{\sqrt{0{,}51}} = \frac{1}{0{,}715}\text{GeV} \Rightarrow E_1 = 1{,}4\ \text{GeV}$$

Η σχετικιστική του ορμή είναι:

$$p_1 = \gamma m_1\upsilon_1 = \frac{m_1\upsilon_1}{\sqrt{1-\upsilon_1^2/c^2}} = \frac{1\text{GeV}/c^2 \cdot 0{,}7c}{0{,}715} = \frac{0{,}7}{0{,}715}\text{GeV}/c \Rightarrow p_1 = 0{,}98\ \text{GeV}/c$$

Και η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K_1 = (\gamma-1)m_1c^2 = \gamma m_1c^2 - m_1c^2 = E_1 - m_1c^2 = 1{,}4\text{GeV} - 1\text{GeV} \Rightarrow K_1 = 0{,}4\ \text{GeV}$$

β) Λόγω της κρούσης των σωματιδίων ισχύει η αρχή διατήρησης της ολικής σχετικιστικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$E_{\alpha\rho\chi} = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow E_1 + E_2 = E_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow E_{\tau\varepsilon\lambda} = \gamma m_1c^2 + m_2c^2 = 1{,}4\text{GeV} + 10\text{GeV} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E_{\tau\varepsilon\lambda} = 11{,}4\ \text{GeV}$$

Επίσης ισχύει η αρχή διατήρησης της σχετικιστικής ορμής, οπότε:

$$p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow p_1 + p_2 = p_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow p_{\tau\varepsilon\lambda.} = \gamma m_1\upsilon_1 + 0 \Rightarrow p_{\tau\varepsilon\lambda} = 0{,}98\ \text{GeV}/c$$

Συνεπώς από τη σχέση που συνδέει την ορμή με την ενέργεια θα υπολογιστεί η μάζα ηρεμίας Μ του συστήματος μετά την κρούση. Δηλαδή:

$$E_{\tau\varepsilon\lambda}^2 = p_{\tau\varepsilon\lambda}^2c^2 + M^2c^4 \Rightarrow M^2c^4 = E_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - p_{\tau\varepsilon\lambda}^2c^2 = (11{,}4\text{GeV})^2 - (0{,}98\text{GeV}/c)^2c^2 =$$
$$= (129{,}96 - 0{,}96)\text{GeV}^2 = 129\text{GeV}^2 \Rightarrow M = 11{,}36\ \text{GeV}/c^2$$

ΘΕΜΑ 15

Δύο πρωτόνια κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις ξεκινώντας από ένα κοινό σημείο, με ίσες κατά μέτρο ταχύτητες $\upsilon = 0,9c$.

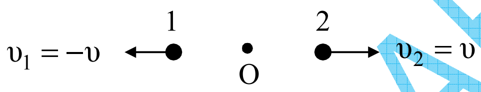
α) Υπολογίστε την ολική σχετικιστική ενέργεια (σε GeV) την κινητική ενέργεια (σε GeV) και την ορμή (σε GeV/c) ενός από τα πρωτόνια ως προς το κοινό σημείο εκκίνησης.

β) Υπολογίστε την ολική σχετικιστική ενέργεια, την ορμή και την ταχύτητα του ενός πρωτονίου ως προς το σύστημα αναφοράς του άλλου.

Δίνεται: $m_p c^2 = 0{,}938\text{GeV}$

(Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Θεωρώντας ως άξονα της κίνησης των πρωτονίων τον άξονα των x, η ολική σχετικιστική ενέργεια του πρωτονίου 1 ως προς το ακίνητο σύστημα Oxyz (σημείο εκκίνησης) είναι:

$$E_1 = \gamma m_p c^2 = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1-\upsilon_1^2/c^2}} = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1-0{,}81}} = \frac{0{,}938\text{GeV}}{\sqrt{0{,}19}} = \frac{0{,}938\text{GeV}}{0{,}44} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_1 = 2{,}13\ \text{GeV}$$

Η κινητική του ενέργεια είναι:

$$K_1 = (\gamma-1)m_p c^2 = \gamma m_p c^2 - m_p c^2 = E_1 - m_p c^2 = 2{,}13\text{GeV} - 0{,}938\text{GeV} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_1 = 1{,}19\ \text{GeV}$$

Και η σχετικιστική του ορμή είναι:

$$p_1 = \gamma m_p \upsilon_1 = \frac{m_p \upsilon_1}{\sqrt{1-\upsilon_1^2/c^2}} = \frac{m_p(-0{,}9c)}{\sqrt{0{,}19}} = \frac{-0{,}9 m_p c}{0{,}44} = -2{,}05 \cdot 0{,}938\text{GeV}/c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1 = -1{,}92\ \text{GeV}/c$$

β) Θεωρώντας ως σύστημα αναφοράς O΄x΄y΄z΄ το σύστημα πάνω στο πρωτόνιο 2, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\upsilon = 0,9c$ ως προς το Oxyz (σημείο εκκίνησης), τότε σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς ορμής και ενέργειας, η σχετικιστική ορμή και η ολική σχετικιστική ενέργεια του πρωτονίου 1 ως προς το σύστημα αναφοράς του πρωτονίου 2 είναι:

$$p_1' = \gamma\left(p_1 - \frac{\upsilon}{c^2}E_1\right) = \frac{1}{0{,}44}\left(-1{,}92\text{GeV}/c - \frac{0{,}9c}{c^2}2{,}13\text{GeV}\right) =$$

$$= 2{,}27(-1{,}92\text{GeV}/c - 1{,}92\text{GeV}/c) = 2{,}27(-3{,}84\text{GeV}/c) \Rightarrow p_1' = -8{,}72\ \text{GeV}/c$$

$$E_1' = \gamma(E_1 - \upsilon p_1) = 2{,}27[2{,}13\text{GeV} - 0{,}9c(-1{,}92\text{GeV}/c)] =$$

$$= 2{,}27(2{,}13\text{GeV} + 1{,}73\text{GeV}) = 2{,}27 \cdot 3{,}86\text{GeV} \Rightarrow E_1' = 8{,}76\ \text{GeV}$$

Επίσης σύμφωνα με το μετασχηματισμό της ταχύτητας, η ταχύτητα του πρωτονίου 1 ως προς το σύστημα αναφοράς του πρωτονίου 2 είναι:

$$\upsilon_1' = \frac{\upsilon_1 - \upsilon}{1 - \upsilon\upsilon_1/c^2} = \frac{-0{,}9c - 0{,}9c}{1 - 0{,}9c(-0{,}9c)/c^2} = \frac{-1{,}8c}{1{,}81} \Rightarrow \upsilon_1' = -0{,}99c$$

ΘΕΜΑ 16

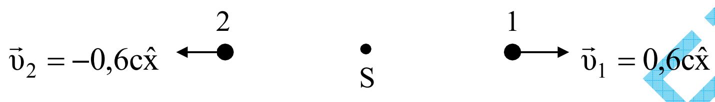
Στο σύστημα συντεταγμένων S δύο πρωτόνια 1 και 2 κινούνται με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1 = 0{,}6c\hat{x}$ και $\vec{\upsilon}_2 = -0{,}6c\hat{x}$.

α) Να υπολογίσετε την ενέργεια και την ορμή των δύο πρωτονίων στο S, αν m είναι η μάζα ηρεμίας τους.

β) Να υπολογίσετε την ενέργεια και την ορμή του πρωτονίου 2 στο σύστημα S΄, στο οποίο το πρωτόνιο 1 είναι ακίνητο.

(Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Η ολική σχετικιστική ενέργεια των δύο πρωτονίων στο σύστημα S είναι:

$$E_1 = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon_1^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-0{,}36}} = \frac{mc^2}{\sqrt{0{,}64}} = \frac{mc^2}{0{,}8} \Rightarrow E_1 = 1{,}25mc^2$$

και $E_2 = 1{,}25mc^2$ αφού $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0{,}6c$

Η σχετικιστική ορμή των δύο πρωτονίων στο S είναι:

$$\vec{p}_1 = \gamma m\vec{\upsilon}_1 = 1{,}25m0{,}6c\hat{x} \Rightarrow \vec{p}_1 = 0{,}75mc\hat{x}$$

$$\vec{p}_2 = \gamma m\vec{\upsilon}_2 = 1{,}25m(-0{,}6c\hat{x}) \Rightarrow \vec{p}_2 = -0{,}75mc\hat{x}$$

β) Η ταχύτητα v του συστήματος S΄, στο οποίο το πρωτόνιο 1 είναι ακίνητο, δηλαδή $\upsilon_1' = 0$, σύμφωνα με το μετασχηματισμό της ταχύτητας είναι:

$$\upsilon_1' = \frac{\upsilon_1 - v}{1 - v\upsilon_1/c^2} = 0 \Rightarrow \upsilon_1 - v = 0 \Rightarrow v = \upsilon_1 \Rightarrow v = 0{,}6c$$

Άρα σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς ορμής και ενέργειας, η ορμή και η ολική ενέργεια του πρωτονίου 2 στο σύστημα S΄ είναι:

$$p_2' = \gamma\left(p_2 - \frac{\upsilon}{c^2}E_2\right) = 1{,}25\left(-0{,}75mc - \frac{0{,}6c}{c^2}1{,}25mc^2\right) =$$

$$= 1{,}25(-0{,}75mc - 0{,}75mc) = 1{,}25(-1{,}5mc) \Rightarrow p_2' = -1{,}88mc$$

και $$E_2' = \gamma(E_2 - \upsilon p_2) = 1{,}25[1{,}25mc^2 - 0{,}6c(-0{,}75mc)] =$$

$$= 1{,}25(1{,}25mc^2 + 0{,}45mc^2) = 1{,}25 \cdot 1{,}7mc^2 \Rightarrow E_2' = 2{,}13mc^2$$

ΘΕΜΑ 17

Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, ένα φωτόνιο ενέργειας E_γ συγκρούεται με έναν ακίνητο πυρήνα μάζας ηρεμίας M_o. Το φωτόνιο απορροφάται πλήρως από τον πυρήνα.
α) Να βρείτε την ταχύτητα υ_1 και τη μάζα M_1 του σώματος που προκύπτει.
β) Να δείξετε ότι στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, η ταχύτητα v του κέντρου μάζας του συστήματος φωτονίου – πυρήνα πριν από τη σύγκρουση είναι :

$$v = c\frac{E_\gamma}{E_\gamma + M_o c^2}$$

γ) Να βρείτε τις ενέργειες του φωτονίου E_γ^c και του πυρήνα E^c στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π)

Λύση

ΑΡΧΙΚΑ **ΤΕΛΙΚΑ**

α) Λόγω της κρούσης ισχύει η αρχή διατήρησης της σχετικιστικής ορμής και της ολικής σχετικιστικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow p_\gamma + p_{πυρήνα} = p_{τελ} \Rightarrow \frac{E_\gamma}{c} + 0 = \gamma M_1 \upsilon_1 \Rightarrow \frac{E_\gamma}{c} = \gamma M_1 \upsilon_1 \qquad \textbf{(1)}$$

και $$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow E_\gamma + M_o c^2 = \gamma M_1 c^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Διαιρώντας τις **(1)** και **(2)** κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{E_\gamma / c}{E_\gamma + M_o c^2} = \frac{\upsilon_1}{c^2} \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{E_\gamma c}{E_\gamma + M_o c^2}$$

Από τη σχέση που συνδέει την ενέργεια με την ορμή του σώματος που προκύπτει μετά τη σύγκρουση φωτονίου – πυρήνα, υπολογίζεται η μάζα του M_1. Δηλαδή:

$$E_{τελ}^2 = M_1^2 c^4 + p_{τελ}^2 c^2 \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} (E_\gamma + M_o c^2)^2 = M_1^2 c^4 + \frac{E_\gamma^2}{c^2} c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1^2 c^4 = E_\gamma^2 + M_o^2 c^4 + 2E_\gamma M_o c^2 - E_\gamma^2 \Rightarrow M_1^2 c^4 = M_o^2 c^4 + 2E_\gamma M_o c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_1^2 = M_o^2 + 2E_\gamma \frac{M_o}{c^2} \Rightarrow M_1 = \sqrt{M_o^2 + 2E_\gamma \frac{M_o}{c^2}}$$

β) Η σχετικιστική ορμή του φωτονίου και του πυρήνα πριν τη σύγκρουση στο σύστημα του κέντρου μάζας, που κινείται με ταχύτητα v ως προς το σύστημα του εργαστηρίου, σύμφωνα με το μετασχηματισμό ορμής – ενέργειας είναι:

$$p_\gamma^c = \gamma\left(p_\gamma - \frac{v}{c^2}E_\gamma\right) = \gamma\left(\frac{E_\gamma}{c} - \frac{v}{c^2}E_\gamma\right) \qquad \textbf{(3)}$$

και $$p^c_{\text{πυρήνα}} = \gamma\left(p_{\text{πυρήνα}} - \frac{v}{c^2}E_{\text{πυρήνα}}\right) = \gamma\left(0 - \frac{v}{c^2}M_oc^2\right) = -\gamma v M_o \qquad \textbf{(4)}$$

Αλλά η ολική αρχική ορμή ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας είναι πάντα μηδέν, οπότε ισχύει:

$$p_\gamma^c + p^c_{\text{πυρήνα}} = 0 \overset{(3),(4)}{\Rightarrow} \gamma\left(\frac{E_\gamma}{c} - \frac{v}{c^2}E_\gamma - vM_o\right) = 0 \Rightarrow v\left(\frac{E_\gamma}{c^2} + M_o\right) = \frac{E_\gamma}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{E_\gamma / c}{\frac{E_\gamma}{c^2} + M_o} = \frac{c^2 E_\gamma / c}{E_\gamma + M_oc^2} \Rightarrow v = c\frac{E_\gamma}{E_\gamma + M_oc^2} \qquad \textbf{(5)}$$

γ) Οι ενέργειες του φωτονίου E_γ^c και του πυρήνα E^c στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας, σύμφωνα με το μετασχηματισμό ορμής – ενέργειας είναι:

$$E_\gamma^c = \gamma(E_\gamma - vp_\gamma) \qquad \text{και} \qquad E^c = \gamma(E_{\text{πυρήνα}} - vp_{\text{πυρήνα}})$$

όπου $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \overset{(5)}{=} \frac{1}{\sqrt{1 - E_\gamma^2/(E_\gamma + M_oc^2)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{E_\gamma^2 + M_o^2c^4 + 2E_\gamma M_oc^2 - E_\gamma^2}{(E_\gamma + M_oc^2)^2}}} = \frac{E_\gamma + M_oc^2}{\sqrt{M_o^2c^4 + 2E_\gamma M_oc^2}} \qquad \textbf{(6)}$$

Άρα: $$E_\gamma^c = \gamma\left(E_\gamma - v\frac{E_\gamma}{c}\right) \overset{(5)}{=} \gamma E_\gamma\left(1 - \frac{E_\gamma}{E_\gamma + M_oc^2}\right) = \gamma E_\gamma \frac{M_oc^2}{E_\gamma + M_oc^2} \overset{(6)}{=}$$

$$= \frac{E_\gamma + M_oc^2}{\sqrt{M_o^2c^4 + 2E_\gamma M_oc^2}} \frac{E_\gamma M_oc^2}{E_\gamma + M_oc^2} \Rightarrow E_\gamma^c = \frac{E_\gamma M_oc^2}{\sqrt{M_o^2c^4 + 2E_\gamma M_oc^2}}$$

και $\quad E^c = \gamma(E - v0) = \gamma E = \gamma M_o c^2 \overset{(6)}{=} \dfrac{E_\gamma + M_o c^2}{\sqrt{M_o^2 c^4 + 2E_\gamma M_o c^2}} M_o c^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow E^c = \frac{E_\gamma M_o c^2 + M_o^2 c^4}{\sqrt{M_o^2 c^4 + 2E_\gamma M_o c^2}}$$

ΘΕΜΑ 18

Ένα φωτόνιο έχει ενέργεια $E_\gamma = \mu c^2$ όπου μ μια θετική σταθερά. Το φωτόνιο συγκρούεται με ακίνητο σωματίδιο του οποίου η μάζα ηρεμίας είναι Μ. Μετά τη σύγκρουση δημιουργείται ένα σωματίδιο μάζας ηρεμίας m_o το οποίο παραμένει ακίνητο και ένα άλλο σωματίδιο μάζας ηρεμίας m_1 το οποίο κινείται με ταχύτητα υ_1.

α) Δείξτε ότι είναι $\dfrac{\upsilon_1}{c} = \dfrac{\mu}{M - m_o + \mu}$

β) Δείξτε ότι είναι $m_1 = \sqrt{(M - m_o)(M - m_o + 2\mu)}$

γ) Εξηγήστε με λόγια τι συμβαίνει στις ειδικές περιπτώσεις:
i) όταν είναι $m_o = 0$ και **ii)** όταν είναι $m_o = M$

(Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Λόγω της αλληλεπίδρασης φωτονίου – σωματιδίου ισχύει η αρχή διατήρησης της σχετικιστικής ορμής και της ολικής σχετικιστικής ενέργειας. Δηλαδή:

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow \frac{E_\gamma}{c} + 0 = 0 + \gamma m_1 \upsilon_1 \Rightarrow \frac{\mu c^2}{c} = \gamma m_1 \upsilon_1 \Rightarrow \gamma m_1 \upsilon_1 = \mu c \qquad \textbf{(1)}$$

και $\quad E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow E_\gamma + Mc^2 = m_o c^2 + \gamma m_1 c^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu c^2 + Mc^2 = m_o c^2 + \gamma m_1 c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu + M = m_o + \gamma m_1 \Rightarrow \gamma m_1 = \mu + M - m_o \qquad \textbf{(2)}$$

Διαιρώντας τις **(1)** και **(2)** κατά μέλη προκύπτει:

$$\upsilon_1 = \frac{\mu c}{\mu + M - m_o} \Rightarrow \frac{\upsilon_1}{c} = \frac{\mu}{\mu + M - m_o} \qquad \textbf{(3)}$$

β) Από την **(1)** χρησιμοποιώντας την **(3)** προκύπτει:

$$\frac{m_1\upsilon_1}{\sqrt{1-\upsilon_1^2/c^2}} = \mu c \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{m_1\mu c/\mu + M - m_o}{\sqrt{1-\mu^2/(\mu+M-m_o)^2}} = \mu c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = (\mu + M - m_o)\sqrt{\frac{\mu^2 + M^2 + m_o^2 + 2\mu M - 2Mm_o - 2\mu m_o - \mu^2}{(\mu + M - m_o)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = \sqrt{M^2 + m_o^2 + 2\mu M - 2Mm_o - 2\mu m_o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = \sqrt{(M - m_o)(M - m_o + 2\mu)}$$

γ) i) Στην πρίπτωση όπου m_o=0 το φωτόνιο θα απορροφάται πλήρως από το ακίνητο σωματίδιο μάζας ηρεμίας M και τελικά θα προκύψει ένα σωματίδιο μάζας ηρεμίας $m_1 = \sqrt{M(M+2\mu)}$ και ταχύτητας $\upsilon_1 = \dfrac{\mu c}{\mu + M}$.

ii) Όταν είναι $m_o = M$ το φωτόνιο δεν αλληλεπιδρά με το ακίνητο σωματίδιο και τελικά θα προκύψει το ίδιο ακίνητο σωματίδιο ενώ το σωματίδιο m_1 θα έχει μάζα ηρεμίας $m_1 = 0$ και ταχύτητα $\upsilon_1 = c$, δηλαδή θα είναι φωτόνιο.

ΘΕΜΑ 19

Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, ένα φωτόνιο ενέργειας Q συγκρούεται με έναν ακίνητο πυρήνα μάζας ηρεμίας M_1. Το φωτόνιο απορροφάται πλήρως, σχηματίζοντας ένα σώμα μάζας ηρεμίας M_2, που κινείται με ταχύτητα υ. Να βρεθούν τα M_2 και υ.

(Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση

ΑΡΧΙΚΑ **ΤΕΛΙΚΑ**

Λόγω της αλληλεπίδρασης φωτονίου – πυρήνα ισχύουν η αρχή διατήρησης της σχετικιστικής ορμής και της ολικής σχετικιστικής ενέργειας, οπότε:

$$p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow \frac{E}{c} + 0 = \gamma M_2 \upsilon \Rightarrow \frac{Q}{c} = \gamma M_2 \upsilon \qquad \textbf{(1)}$$

και

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow Q + M_1 c^2 = \gamma M_2 c^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Διαιρώντας τις **(1)** και **(2)** κατά μέλη προκύπτει:

$$\frac{\upsilon}{c^2} = \frac{Q/c}{Q + M_1 c^2} \Rightarrow \upsilon = \frac{Qc}{Q + M_1 c^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Και η **(1)** δίνει:

$$M_2 = \frac{Q}{c\gamma\upsilon} = \frac{Q}{c\upsilon}\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2} \overset{(3)}{=} \frac{Q}{c\dfrac{Qc}{Q + M_1 c^2}}\sqrt{1 - \frac{Q^2}{(Q + M_1 c^2)^2}} =$$

$$= \frac{Q + M_1 c^2}{c^2}\sqrt{\frac{Q^2 + M_1^2 c^4 + 2QM_1 c^2 - Q^2}{(Q + M_1 c^2)^2}} = \frac{\sqrt{M_1^2 c^4 + 2QM_1 c^2}}{c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_2 = \sqrt{M_1^2 + \frac{2QM_1}{c^2}}$$

ΘΕΜΑ 20

Πηγή φωτός απομακρύνεται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = \beta c$ από την αρχή Ο ενός συστήματος αναφοράς S κινούμενη κατά μήκος του άξονα των x. Η πηγή εκπέμπει ένα φωτόνιο, το οποίο στο σύστημα στο οποίο η πηγή είναι ακίνητη, έχει ενέργεια $E' = h\nu'$. Παρατηρητής ακίνητος στο Ο βλέπει το φωτόνιο να κινείται στο επίπεδο xy σε ευθεία γραμμή που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των x. Έστω ότι το φωτόνιο στο S έχει ενέργεια $E = h\nu$.
α) Να αποδειχθεί ότι οι συχνότητες ν και ν΄ συνδέονται με τη σχέση:

$$\nu' = \gamma\nu(1-\beta\cos\theta)$$

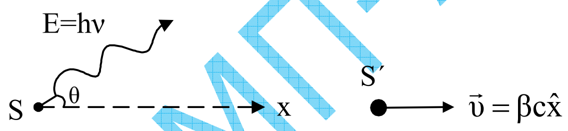
β) Να υπολογιστούν οι συνιστώσες p'_x, p'_y και p'_z της ορμής του φωτονίου στο S΄ και να επαληθευθεί η σχέση :

$$E'^2 - c^2(p'^2_x + p'^2_y + p'^2_z) = 0$$

(Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Σύμφωνα με το μετασχηματισμό ορμής – ενέργειας, η σχέση που συνδέει την ενέργεια του φωτονίου στα συστήματα S και S΄ είναι:



$$E' = \gamma(E - \beta c p_x)$$

Αλλά $E' = h\nu'$, $E = h\nu$ και $p_x = p\cos\theta = \frac{E}{c}\cos\theta \Rightarrow p_x = \frac{h\nu}{c}\cos\theta$

οπότε η παραπάνω σχέση δίνει:

$$h\nu' = \gamma\left(h\nu - \beta c\frac{h\nu}{c}\cos\theta\right) \Rightarrow \nu' = \gamma\nu(1-\beta\cos\theta) \qquad \textbf{(1)}$$

β) Οι συνιστώσες της ορμής του φωτονίου στο σύστημα S΄ σύμφωνα με τους μετασχηματισμούς ορμής – ενέργειας είναι:

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\beta}{c}E\right) = \gamma\left(\frac{h\nu}{c}\cos\theta - \frac{\beta}{c}h\nu\right) \Rightarrow p'_x = \gamma\frac{h\nu}{c}(\cos\theta - \beta) \qquad \textbf{(2)}$$

$$p'_y = p_y \Rightarrow p'_y = \frac{h\nu}{c}\sin\theta \qquad \textbf{(3)}$$

$$p'_z = p_z \Rightarrow p'_z = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Είναι: $E'^2 - c^2(p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2) \overset{(2),(3),(4)}{=}$

$$= (h\nu')^2 - c^2\left[\gamma^2 \frac{h^2\nu^2}{c^2}(\cos\theta - \beta)^2 + \frac{h^2\nu^2}{c^2}\sin^2\theta + 0\right] \overset{(1)}{=}$$

$$= h^2\gamma^2\nu^2(1-\beta\cos\theta)^2 - \gamma^2 h^2\nu^2(\cos\theta-\beta)^2 - h^2\nu^2\sin^2\theta =$$

$$= h^2\gamma^2\nu^2(1+\beta^2\cos^2\theta - 2\beta\cos\theta) - \gamma^2h^2\nu^2(\cos^2\theta + \beta^2 - 2\beta\cos\theta) - h^2\nu^2\sin^2\theta =$$

$$= h^2\gamma^2\nu^2(1+\beta^2\cos^2\theta) - \gamma^2h^2\nu^2(\cos^2\theta+\beta^2) - h^2\nu^2\sin^2\theta =$$

$$= h^2\gamma^2\nu^2\beta^2(\cos^2\theta - 1) + h^2\gamma^2\nu^2(1-\cos^2\theta) - h^2\nu^2\sin^2\theta =$$

$$= -h^2\gamma^2\nu^2\beta^2\sin^2\theta + h^2\gamma^2\nu^2\sin^2\theta - h^2\nu^2\sin^2\theta =$$

$$= h^2\gamma^2\nu^2\sin^2\theta(1-\beta^2) - h^2\nu^2\sin^2\theta =$$

$$= h^2\nu^2\gamma^2\sin^2\theta\frac{1}{\gamma^2} - h^2\nu^2\sin^2\theta = 0$$

όπου στους προηγούμενους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις :

$$\cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta, \quad 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta \quad \text{και} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$