ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΥ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

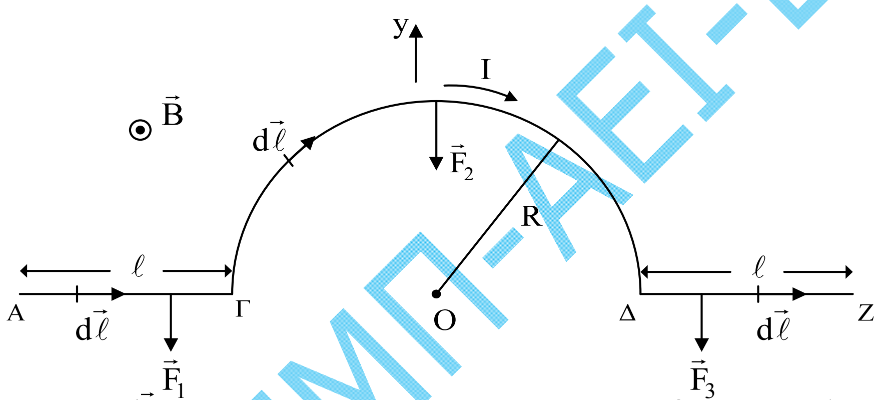
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 1

Ο συρμάτινος αγωγός του σχήματος διαρρέεται από ρεύμα έντασης I και βρίσκεται κάθετα μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Να υπολογιστεί η ολική μαγνητική δύναμη που ασκείται στον αγωγό.

(Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Σε κάθε στοιχειώδες τμήμα $d\vec{\ell}$ του ρευματοφόρου αγωγού ασκείται η δύναμη Laplace :

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B} \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα ολοκληρώνοντας την **(1)** σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα προκύπτει :

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F} = I\int_{A}^{\Gamma} d\vec{\ell} \times \vec{B} = I\,\overrightarrow{A\Gamma} \times \vec{B} = I(A\Gamma)\hat{x} \times B\hat{z} = BI\ell\hat{x} \times \hat{z} \Rightarrow \vec{F}_1 = BI\ell(-\hat{y})$$

και : $\vec{F}_3 = \int d\vec{F} = I\int_{\Delta}^{Z} d\vec{\ell} \times \vec{B} = I\,\overrightarrow{\Delta Z} \times \vec{B} = I(\Delta Z)\hat{x} \times B\hat{z} = BI\ell\hat{x} \times \hat{z} \Rightarrow \vec{F}_3 = BI\ell(-\hat{y})$

Ενώ ολοκληρώνοντας την **(1)** στο ημικυκλικό τμήμα προκύπτει :

$$\vec{F}_2 = \int d\vec{F} = I\int_{\Gamma}^{\Delta} d\vec{\ell} \times \vec{B} = I\,\overrightarrow{\Gamma\Delta} \times \vec{B} = I(\Gamma\Delta)\hat{x} \times B\hat{z} = BI2R\hat{x} \times \hat{z} \Rightarrow \vec{F}_2 = 2BIR(-\hat{y})$$

Συνεπώς η ολική δύναμη πάνω στον αγωγό είναι :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow \vec{F} = 2IB(\ell + R)(-\hat{y})$$

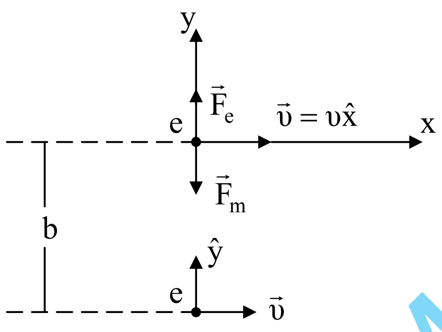
Από το παραπάνω αποτέλεσμα συμπεραίνεται ότι η ολική δύναμη είναι ίση με την ασκούμενη δύναμη πάνω σε ευθύγραμμο αγωγό μήκους $2(\ell + R)$.

Θέμα 2

Δυο ηλεκτρόνια κινούνται με ταχύτητα υ σε παράλληλες τροχιές, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση b. Ποιες οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτά όπως τις αντιλαμβάνεται ακίνητος παρατηρητής ; Υπολογίστε το λόγο των μέτρων τους. Τι θα άλλαζε αν ο παρατηρητής κινούνταν μαζί με τα ηλεκτρόνια με την ίδια ταχύτητα;

(Σχολή Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Στο πάνω ηλεκτρόνιο ασκείται μια ηλεκτρική δύναμη λόγω της αμοιβαίας άπωσης των δυο ηλεκτρονίων και σύμφωνα με το νόμο του Coulomb είναι :

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{b^2}\hat{y} \qquad \textbf{(1)}$$

Το κάτω κινούμενο ηλεκτρόνιο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στη θέση του πάνω το οποίο είναι :

$$\vec{B} = \frac{\mu_o q}{4\pi}\frac{\vec{\upsilon}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_o e}{4\pi}\frac{\upsilon\hat{x}\times\hat{y}}{b^2} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_o e\upsilon}{4\pi b^2}\hat{z}$$

Άρα η μαγνητική δύναμη που ασκείται στο πάνω ηλεκτρόνιο είναι :

$$\vec{F}_m = e\vec{\upsilon}\times\vec{B} = e\upsilon\hat{x}\times\frac{\mu_o e\upsilon}{4\pi b^2}\hat{z} \Rightarrow \vec{F}_m = \frac{\mu_o e^2\upsilon^2}{4\pi b^2}(-\hat{y}) \qquad \textbf{(2)}$$

Προφανώς και στο κάτω ηλεκτρόνιο ασκούνται οι ίδιες δυνάμεις με αντίθετες φορές. Ο λόγος των μέτρων των δυο δυνάμεων, λόγω των **(1)** και **(2)** είναι :

$$\frac{F_m}{F_e} = \varepsilon_o\mu_o\upsilon^2 = \frac{\upsilon^2}{c^2}, \quad \text{επειδή} \quad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_o\mu_o}$$

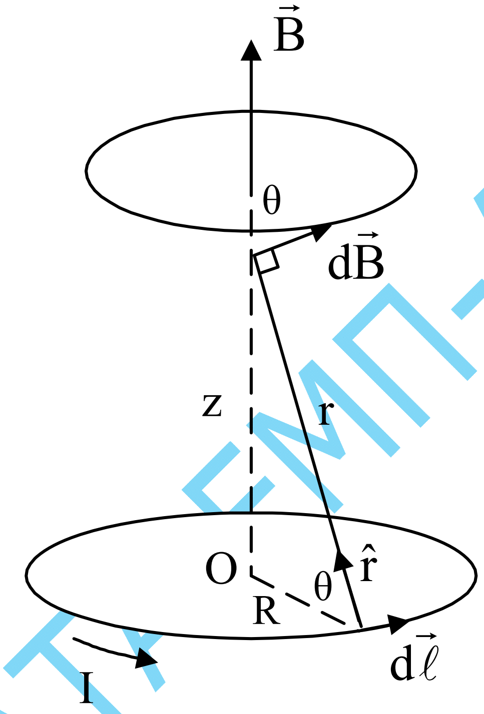
Αν ο παρατηρητής κινούταν μαζί με τα ηλεκτρόνια με την ίδια ταχύτητα υ, τα ηλεκτρόνια θα ήταν ακίνητα ως προς αυτόν κι επομένως δεν θα αντιλαμβανόταν την επίδραση της μαγνητικής δύναμης σ’ αυτά. Άρα ως προς τον κινούμενο παρατηρητή ασκείται μόνο η ηλεκτρική δύναμη στα ηλεκτρόνια.

Θέμα 3

Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση z πάνω από το κέντρο O ενός κυκλικού βρόχου ακτίνας R, που διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



Το πεδίο $d\vec{B}$ που οφείλεται σε στοιχειώδες τμήμα $d\vec{\ell}$ του βρόχου είναι κάθετο στο επίπεδο των $d\vec{\ell}$ και $\hat{r}$ και έχει την κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα, ενώ το μέτρο του σύμφωνα με το νόμο των Biot-Savart κι επειδή τα $d\vec{\ell}$ και $\hat{r}$ είναι κάθετα μεταξύ τους είναι :

$$dB = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{d\ell \sin\pi/2}{r^2} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{d\ell}{r^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Λόγω συμμετρίας παρατηρείται ότι για αντιδιαμετρικά στοιχειώδη τμήματα του βρόχου οι οριζόντιες συνιστώσες αλληλοαναιρούνται, με άμεση συνέπεια η ένταση $\vec{B}$ να κείται επί του κατακόρυφου άξονα. Επομένως ενδιαφέρει μόνο η κατακόρυφη συνιστώσα $dB_z = dB\cos\theta$.

Λόγω της **(1)** κι επειδή $\cos\theta = R/r$ είναι τελικά :

$$dB_z = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{R}{r^3}d\ell = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}d\ell \qquad \textbf{(2)}$$

όπου από το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι $r = (R^2+z^2)^{1/2}$.

Ολοκληρώνοντας σε όλο το μήκος του δακτυλίου προκύπτει το ζητούμενο πεδίο. Δηλαδή :

$$B = \int dB_z \stackrel{(2)}{=} \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\oint_c d\ell = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}2\pi R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \quad \text{ή διανυσματικά} \quad \vec{B} = \frac{\mu_o I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \qquad \textbf{(3)}$$

Σύμφωνα με τη σχέση **(3)** το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του δακτυλίου (για $z = 0$) είναι :

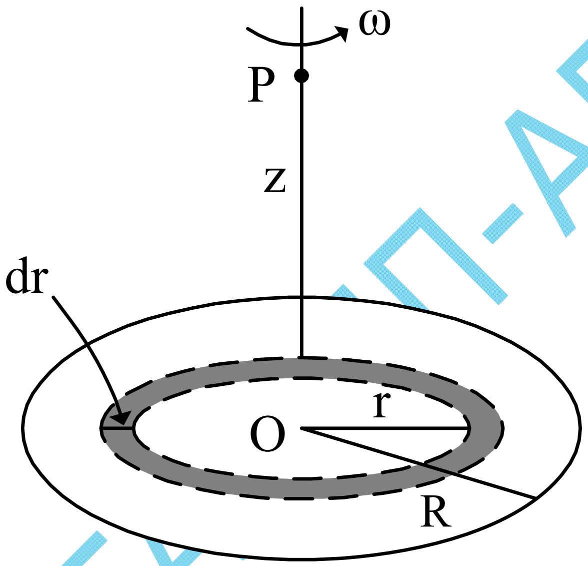
$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2R}\hat{z}$$

Θέμα 4

Λεπτός δίσκος ακτίνας R είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με ολικό θετικό φορτίο Q. Ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, που δημιουργείται πάνω στον άξονά του σε απόσταση z από το κέντρο του δίσκου. Πόσο είναι το πεδίο ακριβώς πάνω στο κέντρο του δίσκου;

(Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Έστω στοιχειώδης κυκλικός δακτύλιος του δίσκου φορτίου dQ, ακτίνας r και εύρους dr. Από τον ορισμό της επιφανειακής πυκνότητας φορτίου ισχύει: $dQ = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$, όπου λόγω της ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου είναι $\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi R^2}$ οπότε τελικά :

$$dQ = \frac{2Q}{R^2} r dr \qquad \textbf{(1)}$$

Η περιστροφή του φορτισμένου δίσκου ισοδυναμεί με ηλεκτρικό ρεύμα. Συνεπώς σε χρόνο μιας περιόδου $T = 2\pi/\omega$ ο δακτύλιος κάνει μια πλήρη περιστροφή κι αυτό ισοδυναμεί με το κυκλικό ρεύμα dI:

$$dI = \frac{dQ}{T} \overset{(1)}{=} \frac{2Q}{R^2}\frac{r dr}{2\pi/\omega} \Rightarrow dI = \frac{\omega Q}{\pi R^2} r dr \qquad \textbf{(2)}$$

Σύμφωνα με το νόμο των Biot-Savart το κυκλικό αυτό ρεύμα δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $d\vec{B}$ πάνω στον άξονα του δίσκου σε απόσταση z από το κέντρο του ίσο με :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o dI}{2}\frac{r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \overset{(2)}{=} \frac{\mu_o \omega Q}{2\pi R^2}\frac{r^3}{(r^2+z^2)^{3/2}}dr\hat{z} \qquad \textbf{(3)}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση **(3)** υπολογίζεται το ολικό μαγνητικό πεδίο στο ζητούμενο σημείο P:

$$\vec{B}_P = \int d\vec{B} = \frac{\mu_o \omega Q}{2\pi R^2}\int_0^R \frac{r^3 dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} = \frac{\mu_o \omega Q}{2\pi R^2}\left[(r^2+z^2)^{1/2} + \frac{z^2}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right]_0^R \hat{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}_P = \frac{\mu_o \omega Q}{2\pi R^2}\left[(R^2+z^2)^{1/2} + \frac{z^2}{(R^2+z^2)^{1/2}} - 2z\right]\hat{z} \qquad \textbf{(4)}$$

❒ **Σημείωση :** Το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα κάνοντας την αντικατάσταση : $r^2+z^2 = x^2$ απ’ όπου $2rdr = 2xdx$ ή $rdr = xdx$.

Στο κέντρο του δίσκου, δηλαδή για $z = 0$ η **(4)** δίνει :

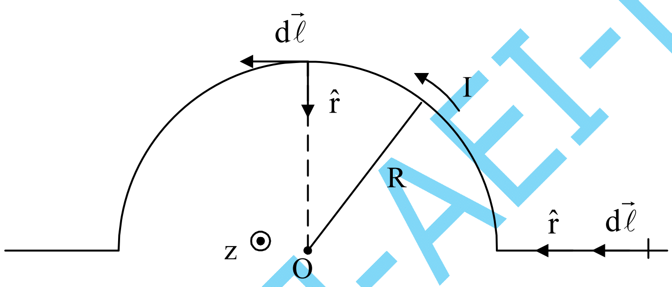
$$\vec{B}_o = \frac{\mu_o \omega Q}{2\pi R}\hat{z}$$

Θέμα 5

Ένας συρμάτινος βρόχος που έχει τη μορφή του ακόλουθου σχήματος διαρρέεται από ρεύμα έντασης I. Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ που δημιουργείται στο κέντρο O του ημικυκλίου.

(Σχολή Ναυπηγών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Το μαγνητικό πεδίο στο O προκύπτει από την επαλληλία των πεδίων των δυο ευθύγραμμων τμημάτων και του ημικυκλικού τμήματος του αγωγού. Σύμφωνα με το νόμο των Biot-Savart είναι :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{d\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Στα ευθύγραμμα τμήματα το $d\vec{\ell}$ είναι παράλληλο στο $\hat{r}$ κι επομένως $d\vec{\ell}\times\hat{r} = 0$, δηλαδή αυτά δεν παράγουν μαγνητικό πεδίο στο O.
Στο ημικυκλικό τμήμα το $d\vec{\ell}$ είναι κάθετο στο $\hat{r}$, οπότε :

$$d\vec{\ell}\times\hat{r} = d\ell\sin\frac{\pi}{2}\hat{z} = d\ell\hat{z}$$

όπου $\hat{z}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο του αγωγού με φορά προς τα έξω.

Άρα η **(1)** δίνει : $\quad d\vec{B}_o = \dfrac{\mu_o I}{4\pi}\dfrac{d\ell}{R^2}\hat{z}$

Κι ολοκληρώνοντας προκύπτει το ολικό πεδίο στο O :

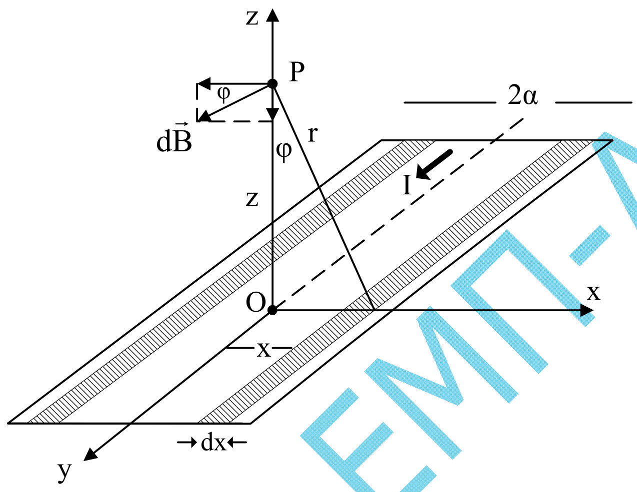
$$\vec{B}_o = \int d\vec{B}_o = \frac{\mu_o I}{4\pi R^2}\hat{z}\int_c d\ell = \frac{\mu_o I}{4\pi R^2}\pi R\hat{z} \Rightarrow \vec{B}_o = \frac{\mu_o I}{4R}\hat{z}$$

Θέμα 6

Επίπεδος μεταλλικός αγωγός απείρου μήκους, πλάτους 2α και αμελητέου πάχους, διαρρέεται από ομοιόμορφα κατανεμημένο ρεύμα έντασης I. Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε σημείο P που βρίσκεται πάνω στην κάθετη στο επίπεδο του αγωγού και απέχει απόσταση z από τον κεντρικό του άξονα.

(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου στο σημείο P, υποδιαιρείται η επίπεδη πλάκα σε απειροστά νήματα πάχους dx, που το καθένα λογίζεται ως ξεχωριστός αγωγός και λόγω της ομοιόμορφης κατανομής ρεύματος μεταφέρει ρεύμα έντασης :

$$dI = \frac{I}{2\alpha}dx \qquad \textbf{(1)}$$

Η συνεισφορά dB στο μαγνητικό πεδίο από έναν στοιχειώδη αγωγό δίνεται κατά τα γνωστά από μια σχέση ανάλογη της **(5 – 21)**. Δηλαδή :

$$dB = \frac{\mu_o dI}{2\pi r} \overset{(1)}{=} \frac{\mu_o I}{4\pi\alpha r}dx \qquad \textbf{(2)}$$

Το διάνυσμα $d\vec{B}$ αναλύεται σε δυο συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους, την $dB_x = dB\cos\varphi$ και $dB_z = dB\sin\varphi$. Η κάθετη συνιστώσα dB_z όμως εξουδετερώνεται από τη συνεισφορά ενός άλλου στοιχειώδους αγωγού, συμμετρικού του προηγούμενου ως προς τον κεντρικό άξονα. Έτσι στο μαγνητικό πεδίο στο P συνεισφέρει μόνο η οριζόντια συνιστώσα dB_x και είναι :

$$dB_x = dB\cos\varphi \overset{(2)}{=} \frac{\mu_o I}{4\pi\alpha r}\cos\varphi dx$$

Αλλά : $\cos\varphi = z/r$ και $r = (x^2 + z^2)^{1/2}$ οπότε :

$$dB_x = \frac{\mu_o I\, z}{4\pi\alpha r^2}dx = \frac{\mu_o I\, z}{4\pi\alpha(x^2+z^2)}dx$$

Ολοκληρώνοντας τελικά προκύπτει :

$$B_P = \int dB_x = \frac{\mu_o Iz}{4\pi\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{dx}{x^2+z^2} = \frac{\mu_o Iz}{4\pi\alpha}2\int_0^{\alpha}\frac{dx}{x^2+z^2} = \frac{\mu_o Iz}{2\pi\alpha}\left[\frac{1}{z}\tan^{-1}\left(\frac{x}{z}\right)\right]_0^{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_P = \frac{\mu_o I}{2\pi\alpha}\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{z}\right)$$

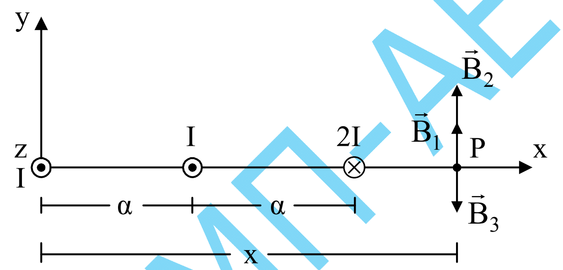
Η κατεύθυνση του $\vec{B}_P$ είναι στα αρνητικά του άξονα x.

Θέμα 7

Τρεις ευθύγραμμοι άπειροι ρευματοφόροι αγωγοί βρίσκονται στο επίπεδο xz και είναι παράλληλοι στον άξονα z. Οι αγωγοί αυτοί βρίσκονται στις θέσεις x = 0, x = α και x = 2α. Ο πρώτος αγωγός, που βρίσκεται στη θέση x = 0, διαρρέεται από ρεύμα έντασης I με φορά κατά τα θετικά του άξονα z. Ο δεύτερος αγωγός, που βρίσκεται στη θέση x = α, διαρρέεται επίσης από ρεύμα I με την ίδια φορά του πρώτου, ενώ ο τρίτος αγωγός, που βρίσκεται στη θέση x = 2α, διαρρέεται από ρεύμα 2I με φορά κατά τα αρνητικά του άξονα z. Να προσδιοριστεί η θέση του άξονα x, όπου το μαγνητικό πεδίο είναι μηδενικό.

(Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Έστω P ένα τυχαίο σημείο του άξονα x. Το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P οφείλεται στους τρεις ρευματοφόρους αγωγούς, που σύμφωνα με την **(5 – 21)** για καθέναν είναι :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_o I}{2\pi x}\hat{y}, \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi(x-\alpha)}\hat{y} \quad \text{και} \quad \vec{B}_3 = \frac{\mu_o 2I}{2\pi(x-2\alpha)}(-\hat{y})$$

Έτσι σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας προκύπτει :

$$\vec{B}_P = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_o I}{2\pi x}\hat{y} + \frac{\mu_o I}{2\pi(x-\alpha)}\hat{y} + \frac{\mu_o 2I}{2\pi(x-2\alpha)}(-\hat{y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}_P = \frac{\mu_o I}{2\pi}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-\alpha} - \frac{2}{x-2\alpha}\right]\hat{y} \qquad \textbf{(1)}$$

Για να είναι το μαγνητικό πεδίο στο σημείο P μηδενικό πρέπει :

$$\vec{B}_P = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\alpha} - \frac{2}{x-2\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{(x-\alpha)(x-2\alpha) + x(x-2\alpha) - 2x(x-\alpha)}{x(x-\alpha)(x-2\alpha)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2\alpha x - \alpha x + 2\alpha^2 + x^2 - 2\alpha x - 2x^2 + 2x\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\alpha x + 2\alpha^2 = 0 \Rightarrow 3\alpha x = 2\alpha^2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}\alpha$$

Θέμα 8

Κυλινδρικός αγωγός ακτίνας R και απείρου μήκους κατά τον άξονα z, διαρρέεται από ρεύμα του οποίου η πυκνότητα $\vec{J}$ σε απόσταση r από τον άξονα του κυλινδρικού αγωγού δίνεται από τη σχέση :

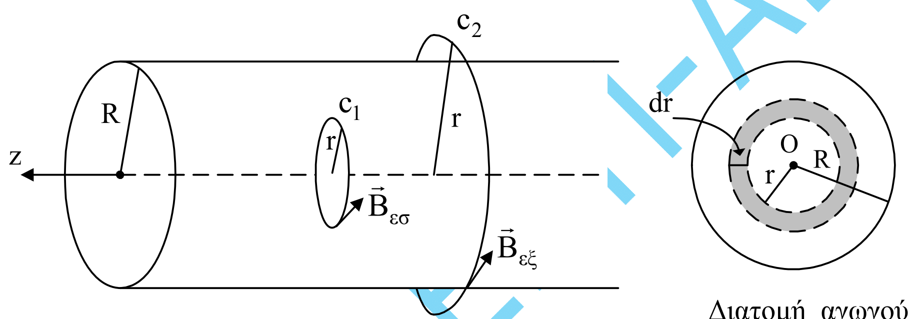
$\vec{J} = \dfrac{J_o}{R} r\hat{z}$, όπου J_o σταθερά. Να υπολογιστούν :

α) Η ένταση I του ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό.

β) Το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ στο εσωτερικό και εξωτερικό του αγωγού.

(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Διατομή αγωγού

α) Σε μια τυχαία διατομή του αγωγού κάθετη στον άξονα z η ένταση του ρεύματος dI που διέρχεται από στοιχειώδη επιφάνεια dS αυτής, που έχει τη μορφή κυκλικού δακτυλίου ακτίνας r και πλάτους dr, σύμφωνα με την **(5 – 18)** είναι :

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά : $\vec{J} = \dfrac{J_o}{R} r\hat{z}$ και $d\vec{S} = dS\hat{z}$ οπότε η **(1)** γίνεται :

$$dI = \frac{J_o}{R} r\hat{z} \cdot dS\hat{z} = \frac{J_o}{R} rdS \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $dS = 2\pi r dr$ είναι η επιφάνεια του δακτυλίου κι επομένως η **(2)** γράφεται :

$$dI = \frac{2\pi J_o}{R} r^2 dr \qquad \textbf{(3)}$$

Ολοκληρώνοντας την **(3)** σε όλη τη διατομή του αγωγού λαμβάνεται η ένταση του ρεύματος I που διαρρέει όλο τον αγωγό. Δηλαδή :

$$I = \int dI = \frac{2\pi J_o}{R}\int_0^R r^2 dr = \frac{2\pi J_o}{R}\frac{R^3}{3} \Rightarrow I = \frac{2}{3}\pi J_o R^2 \qquad \textbf{(4)}$$

β) Για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου στον εσωτερικό και εξωτερικό χώρο του κυλινδρικού αυτού αγωγού θεωρείται ως αμπεριανός βρόχος, κύκλος ακτίνας r < R και r > R αντίστοιχα με κέντρο τον άξονα του αγωγού.

Λόγω συμμετρίας η ένταση $\vec{B}$ έχει σταθερό μέτρο και είναι παράλληλη με το διάνυσμα $d\vec{\ell}$ κάθε καμπύλης. Έτσι εφαρμόζοντας το νόμο του Ampere στις δυο περιοχές προκύπτει :

Για **r < R** : $\oint_{c_1} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_o I_{enc\ell} \Rightarrow B_{\varepsilon\sigma} 2\pi r = \mu_o I_{enc\ell} \Rightarrow B_{\varepsilon\sigma} = \frac{\mu_o I_{enc\ell}}{2\pi r}$

όπου $I_{enc\ell} = \int_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{S} \overset{(3)}{=} \frac{2\pi J_o}{R}\int_0^r r^2 dr \Rightarrow I_{enc\ell} = \frac{2\pi J_o}{3R} r^3$

Άρα τελικά : $B_{\varepsilon\sigma} = \frac{\mu_o J_o}{3R} r^2$

Για **r > R** : $\oint_{c_2} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_o I_{enc\ell} \Rightarrow B_{\varepsilon\xi} 2\pi r = \mu_o I \overset{(4)}{\Rightarrow} B_{\varepsilon\xi} 2\pi r = \mu_o \frac{2}{3}\pi J_o R^2 \Rightarrow$

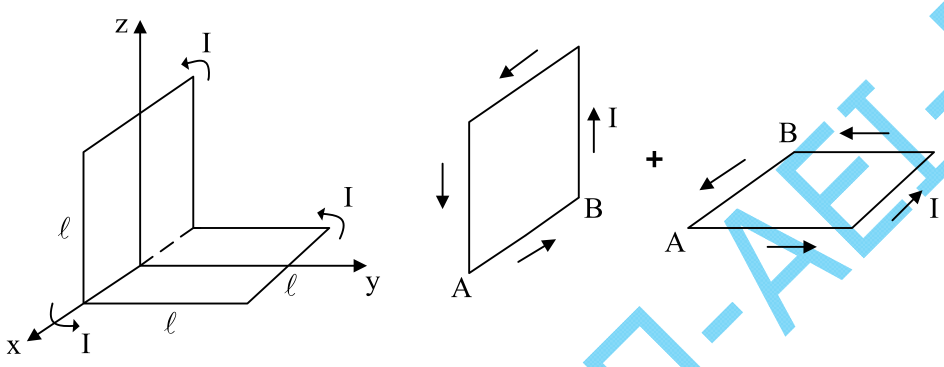
$$\Rightarrow B_{\varepsilon\xi} = \frac{\mu_o J_o R^2}{3r}$$

Θέμα 9

Να υπολογιστεί η μαγνητική διπολική ροπή του βρόχου του ακόλουθου σχήματος. Όλες οι πλευρές του βρόχου έχουν μήκος ℓ και διαρρέονται από ρεύμα έντασης Ι.

(Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



(α) **(β)**

Ο ρευματοφόρος βρόχος του σχήματος **(α)** μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία των δυο επίπεδων τετράγωνων βρόχων του σχήματος **(β)**. Οι επιπλέον πλευρές ΑΒ που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο αλληλοαναιρούνται, επειδή διαρρέονται από ίσα και αντίθετα ρεύματα. Η ολική μαγνητική διπολική ροπή είναι :

$$\vec{m} = \sum_{i=1}^{2} IS\hat{n} \Rightarrow \vec{m} = I\ell^2\hat{y} + I\ell^2\hat{z}$$

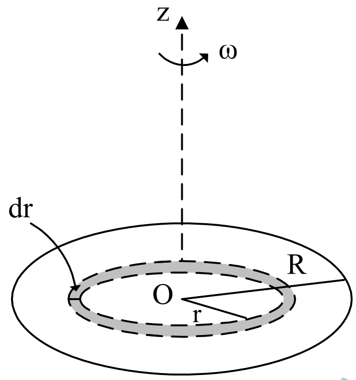
Άρα η μαγνητική διπολική ροπή του βρόχου αυτού έχει μέτρο $\sqrt{2}\, I\ell^2$ και κατεύθυνση 45^o ως προς τον άξονα y, δηλαδή κείται κατά μήκος της γραμμής $z = y$.

Θέμα 10

Επίπεδος κυκλικός δίσκος ακτίνας R είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ και περιστρέφεται περί τον άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Να υπολογιστεί η μαγνητική διπολική ροπή του δίσκου.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



Έστω ένας κυκλικός δακτύλιος του δίσκου ακτίνας r και πλάτους dr, που αντιστοιχεί σε φορτίο dQ. Είναι:

$$dQ = \sigma dS \Rightarrow dQ = \sigma 2\pi r dr \quad \textbf{(1)}$$

Καθώς ο δίσκος περιστρέφεται περί τον κάθετο άξονά του, το φορτίο dQ προκαλεί κυκλικό ρεύμα έντασης:

$$dI = \frac{dQ}{T} = \frac{dQ}{2\pi/\omega} \overset{(1)}{=} \frac{\omega\sigma 2\pi r dr}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dI = \sigma\omega r dr \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα η μαγνητική διπολική ροπή του δακτυλίου, θεωρώντας ως $S = \pi r^2$ την επιφάνεια που ορίζει αυτός, είναι:

$$d\vec{m} = dIS\hat{z} \overset{(2)}{=} \sigma\omega r dr\, \pi r^2 \hat{z} \Rightarrow d\vec{m} = \pi\sigma\omega r^3 dr\, \hat{z} \qquad \textbf{(3)}$$

Συνεπώς ολοκληρώνοντας την **(3)** προκύπτει η μαγνητική διπολική ροπή του δίσκου:

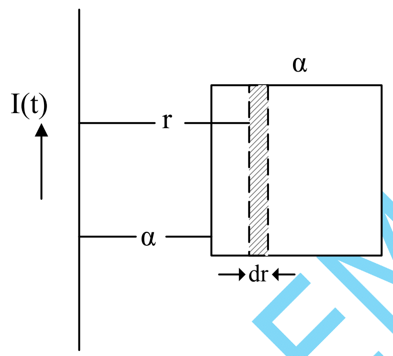
$$\vec{m} = \int d\vec{m} \overset{(3)}{=} \pi\sigma\omega \int_0^R r^3 dr\, \hat{z} = \pi\sigma\omega \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \hat{z} \Rightarrow \vec{m} = \frac{\pi\sigma\omega R^4}{4}\hat{z}$$

Θέμα 11

Ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός απείρου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα $I(t) = I_o \sin\omega t$ βρίσκεται στο επίπεδο συρμάτινου τετραγωνικού πλαισίου πλευράς α και αντίστασης R, παράλληλα στο ένα ζεύγος των πλευρών του πλαισίου και σε απόσταση α από την πλησιέστερη. Υπολογίστε την τάση που επάγεται στο πλαίσιο και το επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει αυτό.

(Σχολή Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Ο ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός σύμφωνα με το νόμο Ampere δημιουργεί μαγνητικό πεδίο σε απόσταση r, στο εσωτερικό του πλαισίου, με φορά προς το εσωτερικό του φύλλου και μέτρο :

$$B(t) = \frac{\mu_o I(t)}{2\pi r} \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από το τετραγωνικό πλαίσιο είναι :

$$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B dS \overset{(1)}{=} \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{\mu_o I(t)}{2\pi r} \alpha dr = \frac{\mu_o I(t)}{2\pi} \alpha \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{\mu_o I(t)}{2\pi} \alpha \ell n\left(\frac{2\alpha}{\alpha}\right) \Rightarrow \Phi_B(t) = \frac{\mu_o \alpha \ell n 2}{2\pi} I_o \sin\omega t \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $dS = \alpha dr$ η επιφάνεια στοιχειώδους λωρίδας του πλαισίου.

Συνεπώς η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στο πλαίσιο είναι :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \overset{(2)}{\Rightarrow} \mathcal{E} = -\frac{\mu_o \alpha \ell n 2}{2\pi} I_o \omega \cos\omega t \qquad \textbf{(3)}$$

Και το επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο είναι :

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{\mathcal{E}}{R} \overset{(3)}{\Rightarrow} I_{\varepsilon\pi} = -\frac{\mu_o \alpha \ell n2}{2\pi R} I_o \omega \cos\omega t$$

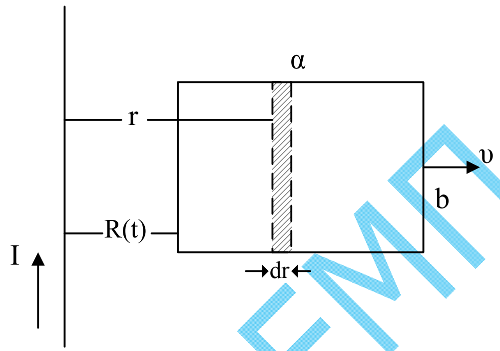
Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz, η φορά του επαγωγικού ρεύματος είναι τέτοια ώστε να αναιρεί το αίτιο που το προκάλεσε, δηλαδή τη μεταβολή του μαγνητικού πεδίου B(t). Επειδή το ρεύμα I(t) μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με το χρόνο, θα αυξάνεται και θα μειώνεται συναρτήσει του χρόνου κι επομένως και η μαγνητική ροή που διέρχεται από το πλαίσιο αντίστοιχα. Συνεπώς το επαγωγικό ρεύμα θα έχει κάθε χρονική στιγμή τέτοια φορά έτσι ώστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί να αντιτίθεται στην κατά περίπτωση αύξηση ή μείωση της μαγνητικής ροής.

Θέμα 12

Ένα συρμάτινο ορθογώνιο πλαίσιο, πλευρών α και b κινείται με σταθερή ταχύτητα υ απομακρυνόμενο από ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους, που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I. Αν τα δυο κυκλώματα παραμένουν στο ίδιο επίπεδο, να υπολογιστεί η επαγωγική τάση στο πλαίσιο, αν για $t = 0$ η απόσταση του ευθύγραμμου αγωγού από την πλησιέστερη πλευρά του πλαισίου είναι $R(0) = \ell$.

(Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Έστω μια τυχαία χρονική στιγμή t, όπου η πλησιέστερη πλευρά του πλαισίου προς τον ευθύγραμμο αγωγό, απέχει απόσταση R(t) από αυτόν.
Το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση r από τον ευθύγραμμο αγωγό ως γνωστόν είναι :

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \qquad \textbf{(1)}$$

Έτσι η ολική μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από το ορθογώνιο πλαίσιο είναι :

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S B dS = \int_R^{R+\alpha} \frac{\mu_o I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_o I b}{2\pi}\int_R^{R+\alpha}\frac{dr}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_B = \frac{\mu_o I b}{2\pi}\ell n\left(\frac{R+\alpha}{R}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Επειδή η ταχύτητα του πλαισίου είναι σταθερή, προκύπτει :

$$\upsilon = \frac{dR}{dt} \Rightarrow \int_{R(0)=\ell}^{R(t)} dR = \upsilon\int_0^t dt \Rightarrow R(t) = \ell + \upsilon t \qquad \textbf{(3)}$$

Οπότε η χρονικά μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή, που οφείλεται στην κίνηση του πλαισίου, λόγω των **(2)** και **(3)** είναι :

$$\Phi_B(t) = \frac{\mu_o I b}{2\pi} \ell n\left(1 + \frac{\alpha}{\ell + \upsilon t}\right) \quad \textbf{(4)}$$

Άρα η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στο ορθογώνιο πλαίσιο είναι :

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} \overset{(4)}{=} -\frac{\mu_o I b}{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\ell + \upsilon t}} \frac{(-\alpha\upsilon)}{(\ell + \upsilon t)^2} \Rightarrow$$

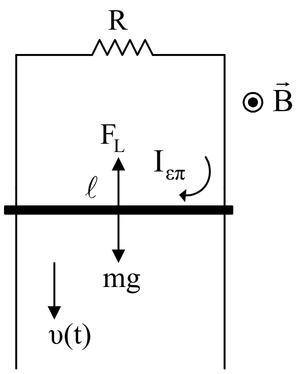
$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\mu_o I b}{2\pi} \frac{\alpha\upsilon}{(\ell + \upsilon t + \alpha)(\ell + \upsilon t)}$$

Θέμα 13

Αγωγός μήκους ℓ και μάζας m μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε δυο κατακόρυφους ημιάπειρους αγωγούς, οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι με αντίσταση R. Κάθετα στο επίπεδο του αγωγού εφαρμόζεται ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία θα κινείται ο αγωγός συναρτήσει του χρόνου και να σχεδιαστεί το διάγραμμα της συνάρτησης υ(t).

(Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Ο αγωγός κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω υπό την επίδραση του βάρους του mg και της δύναμης Laplace F_L, που ασκείται σε αυτόν λόγω του επαγωγικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα. Σύμφωνα με τον κανόνα του Lenz η F_L έχει τέτοια φορά ώστε να αντιτίθεται στην κίνηση του αγωγού, η οποία προκαλεί το επαγωγικό ρεύμα. Το επαγωγικό αυτό ρεύμα σύμφωνα με το νόμο του Ohm είναι :

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B\upsilon\ell}{R} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $\mathcal{E}$ η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στα άκρα της ράβδου.
Επομένως η δύναμη Laplace που ασκείται στη ράβδο σύμφωνα με την **(5 – 11)** και λόγω της **(1)** είναι :

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}\ell \Rightarrow F_L = \frac{B^2\ell^2\upsilon}{R} \qquad \textbf{(2)}$$

Άρα η εξίσωση κίνησης, σύμφωνα με το 2ο νόμο του Newton δίνει :

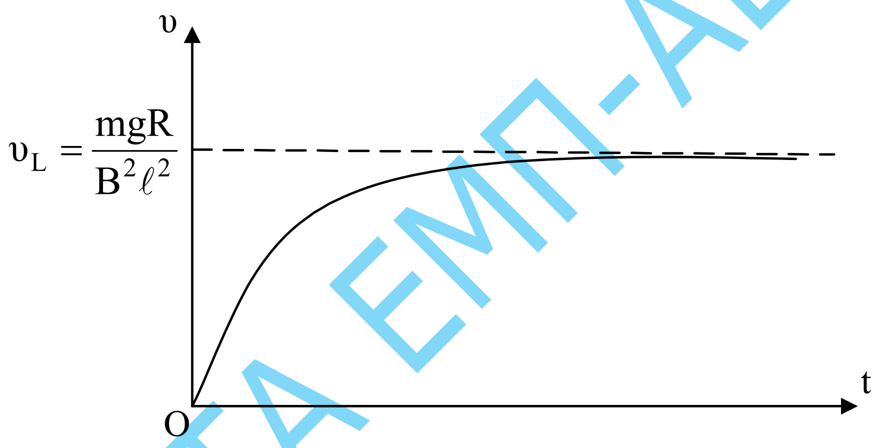
$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \Rightarrow mg - F_L = m\frac{d\upsilon}{dt} \overset{(2)}{\Rightarrow} mg - \frac{B^2\ell^2\upsilon}{R} = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\upsilon} \frac{m d\upsilon}{mg - \frac{B^2\ell^2}{R}\upsilon} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{mR}{B^2\ell^2}\ell n\frac{mg - \frac{B^2\ell^2}{R}\upsilon}{mg} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell n\left(1-\frac{B^2\ell^2}{mgR}\upsilon\right) = -\frac{B^2\ell^2}{mR}t \Rightarrow 1-\frac{B^2\ell^2}{mgR}\upsilon = e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon(t) = \frac{mgR}{B^2\ell^2}\left(1-e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}\right)$$

Από τη συνάρτηση της υ(t) παρατηρείται ότι για t = 0 είναι e^o =1, οπότε $\upsilon = 0$, ενώ για $t \to \infty$ είναι $e^{-\infty} \to 0$, οπότε $\upsilon \to mgR/B^2\ell^2$. Δηλαδή η ταχύτητα της ράβδου τείνει στην οριακή τιμή $\upsilon_L \to mgR/B^2\ell^2$ κι αυτό συμβαίνει όταν $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $F_L = mg$. Η γραφική παράσταση της υ(t) φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα :



Θέμα 14

Τα άκρα δυο ημιάπειρων οριζόντιων παράλληλων αγωγών συνδέονται με αντίσταση R. Αγώγιμη ράβδος μήκους ℓ και μάζας m μπορεί να ολισθαίνει πάνω στους ευθύγραμμους αγωγούς, μένοντας συνεχώς κάθετος σε αυτούς. Το σύστημα αυτό βρίσκεται κάθετα μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = -B\hat{z}$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ προσδίδεται στη ράβδο αρχική ταχύτητα υ_o. Οι αγωγοί έχουν αμελητέα αντίσταση.

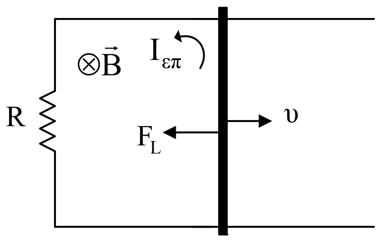
α) Να υπολογιστεί η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στα άκρα της ράβδου, καθώς και η ταχύτητα της ράβδου συναρτήσει του χρόνου.

β) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα $\mathcal{E} = \mathcal{E}(t)$ και $\upsilon = \upsilon(t)$.

γ) Να υπολογιστεί η εξωτερική δύναμη F που πρέπει να εξασκηθεί στη ράβδο, ούτως ώστε αυτή να κινείται με σταθερή ταχύτητα.

(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Λόγω της κίνησης της ράβδου μέσα σε μαγνητικό πεδίο αναπτύσσεται στα άκρα της επαγωγική τάση και σύμφωνα με το νόμο Faraday είναι :

$$\mathcal{E} = B\upsilon\ell \qquad \textbf{(1)}$$

Έτσι το κύκλωμα θα διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα, τέτοιο ώστε να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκαλεί, η φορά του οποίου φαίνεται στο σχήμα και είναι :

$$I_{\varepsilon\pi} = \frac{\mathcal{E}}{R} \overset{(1)}{\Rightarrow} I_{\varepsilon\pi} = \frac{B\upsilon\ell}{R} \qquad \textbf{(2)}$$

Στη ράβδο θα ασκείται δύναμη Laplace F_L, η οποία αντιτίθεται στη κίνηση της και είναι :

$$F_L = BI_{\varepsilon\pi}\ell \overset{(2)}{\Rightarrow} F_L = \frac{B^2\ell^2\upsilon}{R}$$

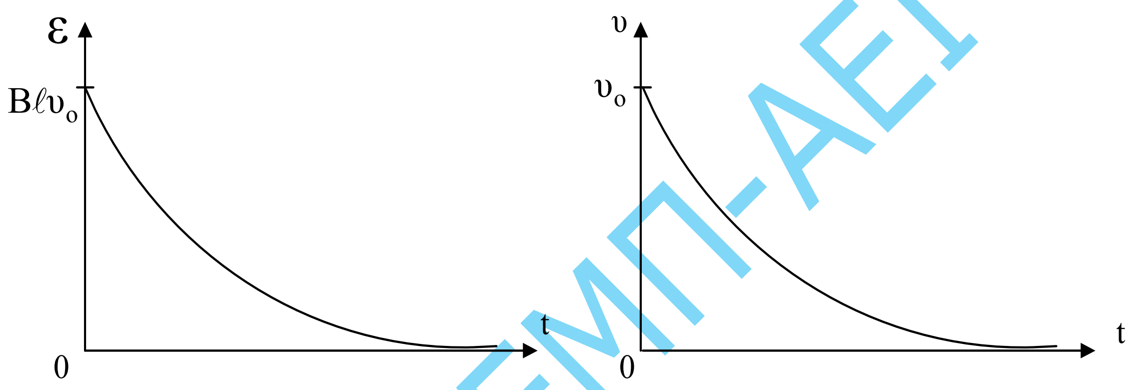
Άρα από το 2^o νόμο του Newton προκύπτει :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow -F_L = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow -\frac{B^2\ell^2\upsilon}{R} = m\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow \int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}\int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell n\frac{\upsilon}{\upsilon_o} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}t \Rightarrow \upsilon(t) = \upsilon_o e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}$$

Και από την **(1)** : $\mathcal{E}(t) = B\ell\upsilon_o e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}$

β) Από τις συναρτήσεις υ(t) και $\mathcal{E}(t)$ παρατηρείται ότι για t = 0 είναι $e^0 = 1$ δηλαδή $\upsilon(t) = \upsilon_o$ και $\mathcal{E}(t) = B\ell\upsilon_o$, ενώ για $t \to \infty$ είναι $e^{-\infty} \to 0$, δηλαδή $\upsilon(t) \to 0$ και $\mathcal{E}(t) \to 0$. Ακολούθως παριστάνονται γραφικά οι συναρτήσεις $\mathcal{E}(t)$ και υ(t).



γ) Για να κινείται η ράβδος με σταθερή ταχύτητα υ θα πρέπει η ισχύς που θα παρέχει η εξωτερική δύναμη F να αντισταθμίζει την ισχύ Joule που καταναλώνεται στο κύκλωμα.

Η ισχύς της δύναμης F είναι : $P = \frac{dW}{dt} = \frac{Fdx}{dt} = F\upsilon$

ενώ η ισχύς που καταναλίσκεται στο κύκλωμα είναι : $P = I_{\varepsilon\pi}^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$

Οπότε πρέπει να ισχύει : $F\upsilon = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \Rightarrow F = \frac{\mathcal{E}^2}{R\upsilon} \overset{(1)}{=} \frac{B^2\upsilon^2\ell}{R\upsilon} \Rightarrow F = \frac{B^2\upsilon\ell^2}{R}$