☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

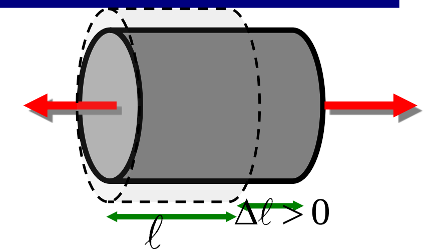
ΜΑΘΗΜΑΤΑ-ΕΜΠ-ΑΕΙ-ΕΑΠ-ΤΕΙ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Στερεά - Μηχανικές ιδιότητες Στερεών

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

Μίας ράβδος έχει μήκος ℓ και η διατομή της είναι κυκλική ακτίνας r. Η ράβδος επιμηκύνεται υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης κατά $\Delta\ell$. Να βρεθεί η ενέργεια παραμόρφωσης της ράβδου ανά μονάδα όγκου. Δίνεται το μέτρο του Young.



Η σχετική επιμήκυνση της ράβδου (παραμόρφωση) είναι: $\varepsilon = \dfrac{\Delta\ell}{\ell}$

Ισχύει: $\sigma = E\varepsilon \overset{\sigma=\frac{F}{S}}{\Rightarrow} \dfrac{F}{S} = E\varepsilon \overset{\frac{\Delta\ell}{\ell}}{\Rightarrow} F = SE\dfrac{\Delta\ell}{\ell}$

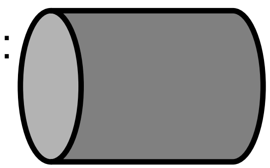
Όπου σ = F/S, είναι η εφαρμοζόμενη εγκάρσια τάση και Ε μέτρο Young

Το έργο που απαιτείται για να επιμηκύνουμε τη ράβδο από x έως x + dx θα είναι:

$$\delta W = F dx = SE\frac{x}{\ell}dx$$

x (επιμήκυνση)

dx στοιχειώδης επιμήκυνση



Θεωρώντας ότι η διατομή της ράβδου δεν αλλάζει σημαντικά, το συνολικό έργο που απαιτείται για μία επιμήκυνση της ράβδου κατά Δ είναι:

$$W = \frac{SE}{\ell}\int_0^{\Delta\ell} x dx = \frac{SE}{\ell}\frac{(\Delta\ell)^2}{2} \overset{\varepsilon=\frac{\Delta\ell}{\ell}}{=} \frac{1}{2}ES\ell\varepsilon^2$$

Το προσφερόμενο έργο είναι ίσο με την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας της ράβδου, δηλαδή μετατρέπεται σε ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης, η ενέργεια αυτή ανά μονάδα όγκου θα είναι:

$$\frac{W}{S\ell} = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \overset{\sigma=E\varepsilon}{=} \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 2

Υπολογίστε την ενέργεια της ελαστικής παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου ενός ισότροπου υλικού.

Ίδια με την προηγούμενη άσκηση.

Παρατήρηση η ενέργεια της ελαστικής παραμόρφωσης είναι ίση με την μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του υλικού και κατ' επέκταση με το έργο που προσφέρεται για να γίνει η μεταβολή αυτή.

Η ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης ανά μονάδα όγκου δείξαμε ότι είναι:

$$\frac{W}{S\ell} = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \overset{\sigma=E\varepsilon}{=} \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 3

Λαστιχένιος σωλήνας έχει μήκος ℓ = 50 cm και η εσωτερική του διάμετρος είναι d_1 = 1 cm. Ο σωλήνας επιμηκύνεται υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης κατά $\Delta\ell$ = 10 cm. Να βρεθεί η εσωτερική διάμετρος d_2. Δίνεται ο συντελεστής Poisson για το λάστιχο μ = 0.5.

Στον **εφελκυσμό**, όταν αυξάνεται το μήκος π.χ. μίας ράβδου $\Delta\ell > 0$ τότε μειώνεται η διατομή Δr < 0.

Ο συντελεστής που δείχνει τη μεταβολή του όγκου του σώματος κατά μήκος μίας διεύθυνσης, ονομάζεται **συντελεστής Poisson** και είναι

$$\mu = -\frac{\left(\dfrac{\Delta r}{r}\right)}{\left(\dfrac{\Delta\ell}{\ell}\right)} = -\frac{\left(\dfrac{\Delta d}{d_1}\right)}{\left(\dfrac{\Delta\ell}{\ell}\right)} \Rightarrow \Delta d = -\mu d_1 \frac{\Delta\ell}{\ell} = -0.5 \cdot 1\mathrm{cm}\frac{10\mathrm{cm}}{50\mathrm{cm}} = -0.1\mathrm{cm}$$

$$\Delta d = d_2 - d_1 \Rightarrow d_2 = d_1 + \Delta d = 0.9\mathrm{cm}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

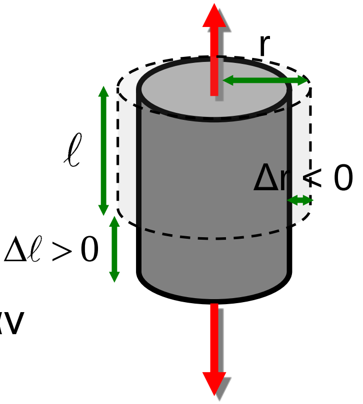
ΘΕΜΑ 4

Αποδείξτε τα όρια μεταβολής του συντελεστή Poisson.

Η παραμόρφωση από εφελκυσμό ή θλίψη συνοδεύεται πάντα από μεταβολή του όγκου.

Στις παραμορφώσεις αυτές, εκτός της σχετική επιμήκυνση (ε), υπάρχει ένας ακόμη συντελεστής που δείχνει τη μεταβολή του όγκου του σώματος κατά μήκος μίας διεύθυνσης, που είναι ο **συντελεστής Poisson**, αυτός ορίζεται από τη σχέση:

$$\mu = -\frac{\left(\dfrac{\Delta r}{r}\right)}{\left(\dfrac{\Delta \ell}{\ell}\right)} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon}$$



Θα μελετήσουμε μία ράβδος κυκλικής διατομής (το σχήμα της διατομής αν το υλικό είναι συμμετρικό ως προς το κύριο άξονα του δεν παίζει ρόλο).

$$V_{APX} = \pi r^2 \ell$$

$$V_{TE\Lambda} = \pi\big(r + (\Delta r)\big)^2 \big(\ell + (\Delta\ell)\big) = \pi\left(r^2 + 2r(\Delta r) + \cancel{(\Delta r)^2}\right)\big(\ell + (\Delta\ell)\big) \approx$$

$$\approx \pi\big(r^2 + 2r(\Delta r)\big)\big(\ell + (\Delta\ell)\big) = \pi\left(r^2\ell + 2r\ell(\Delta r) + r^2(\Delta\ell) + 2r\,\cancel{(\Delta r)(\Delta\ell)}\right) \approx$$

$$\approx \pi\big(r^2\ell + 2r\ell(\Delta r) + r^2(\Delta\ell)\big)$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Η μεταβολή του όγκου είναι: $\Delta V = V_{TE\Lambda} - V_{APX} = 2\pi r\ell(\Delta r) + \pi r^2(\Delta\ell)$

Η σχετική μεταβολή του όγκου είναι:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_{TE\Lambda} - V_{APX}}{V_{APX}} = \frac{2\pi r\ell(\Delta r) + \pi r^2(\Delta\ell)}{\pi r^2 \ell} = 2\left(\frac{\Delta r}{r}\right) + \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right) = -2\mu\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right) + \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right) = (1-2\mu)\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)$$

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1-2\mu)}$$

$$\mu = -\frac{\left(\frac{\Delta r}{r}\right)}{\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)}$$

ε

Η μεταβολή του όγκου ΔV και της σχετικής επιμήκυνσης έχουν πάντα το ίδιο πρόσημο που σημαίνει:

$$1 - 2\mu \geq 0 \Rightarrow 2\mu \leq 1 \Rightarrow \mu \leq \frac{1}{2}$$

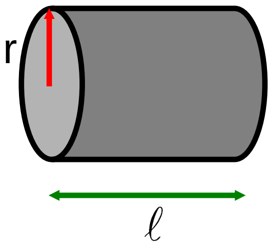
Άρα ο συντελεστής Poisson παίρνει τιμές:

$$\boxed{0 \leq \mu \leq 0.5}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

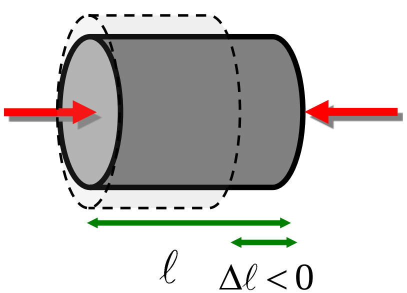
ΘΕΜΑ 5

Υπολογίστε τη σχετική μεταβολή της πυκνότητας κυλινδρικής χάλκινης ράβδου κατά τη συμπίεση υπό πίεση P = 9,8 Pa. Ο συντελεστής Poisson για το χαλκό είναι μ = 0.34, ενώ το μέτρο του Young $E = 1{,}2\cdot 10^{11}\ N/m^2$.



Η ράβδος αρχικά έχει όγκο: $V_{APX} = \pi r^2 \ell$

Η πίεση εφαρμόζεται κατά μήκος του άξονας της, δηλαδή κάθετα στην διατομή της, η πίεση αυτή θα είναι ίση με την εγκάρσια τάση (σ = P). Η παραμόρφωση είναι θλίψη, δηλαδή η ράβδος θα συμπιεστεί.



Η ράβδος τελικά έχει όγκο:

$$V_{TE\Lambda} = \pi\left(r + (\Delta r)\right)^2\left(\ell + (\Delta\ell)\right) = \pi\left(r^2 + 2r(\Delta r) + \cancel{(\Delta r)^2}\right)\left(\ell + (\Delta\ell)\right) \approx$$

$$\approx \pi\left(r^2 + 2r(\Delta r)\right)\left(\ell + (\Delta\ell)\right) = \pi\left(r^2\ell + 2r\ell(\Delta r) + r^2(\Delta\ell) + \cancel{2r(\Delta r)(\Delta\ell)}\right) \approx$$

$$\approx \pi\left(r^2\ell + 2r\ell(\Delta r) + r^2(\Delta\ell)\right)$$

Η μεταβολή του όγκου είναι:

$$\Delta V = V_{TE\Lambda} - V_{APX} = 2\pi r\ell(\Delta r) + \pi r^2(\Delta\ell)$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Επειδή η μάζα της ράβδου η μεταβολή της πυκνότητας της ράβδου θα είναι:

$$\Delta\rho = \rho_{ΤΕΛ} - \rho_{ΑΡΧ} = \frac{m}{V_{ΤΕΛ}} - \frac{m}{V_{ΑΡΧ}} = m\frac{V_{ΑΡΧ} - V_{ΤΕΛ}}{V_{ΤΕΛ}V_{ΑΡΧ}} = m\frac{-\Delta V}{V_{ΤΕΛ}V_{ΑΡΧ}} \overset{V_{ΤΕΛ}V_{ΑΡΧ} \approx V^2_{ΑΡΧ}}{\approx} -m\frac{\Delta V}{V^2_{ΑΡΧ}}$$

Η σχετική μεταβολή της πυκνότητας θα είναι:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_{ΑΡΧ}} = \frac{-m\dfrac{\Delta V}{V^2_{ΑΡΧ}}}{\dfrac{m}{V_{ΑΡΧ}}} = -\frac{\Delta V}{V_{ΑΡΧ}}$$

Όμως, $\Delta V = V_{ΤΕΛ} - V_{ΑΡΧ} = 2\pi r\ell(\Delta r) + \pi r^2(\Delta\ell)$

$$V_{ΑΡΧ} = \pi r^2 \ell$$

άρα

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_{ΑΡΧ}} = -\frac{\Delta V}{V_{ΑΡΧ}} = -\frac{2\pi r\ell(\Delta r) + \pi r^2(\Delta\ell)}{\pi r^2 \ell} = -\left(2\left(\frac{\Delta r}{r}\right) + \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)\right) = -\left(-2\mu\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right) + \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)\right) =$$

$$= -(1-2\mu)\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)$$

$$\mu = -\frac{\left(\dfrac{\Delta r}{r}\right)}{\left(\dfrac{\Delta\ell}{\ell}\right)}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Έχουμε τελικά: $$\frac{\Delta\rho}{\rho_{APX}} = -(1-2\mu)\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)$$

Στον εφελκυσμό η ασκούμενη δύναμη θεωρείται θετική ώστε $\Delta\ell > 0$

Ενώ στην θλίψη αρνητική ώστε $\Delta\ell < 0$

$$\underset{\sigma}{P} = \frac{F}{S} = E\varepsilon = E\frac{\Delta\ell}{\ell}$$

Επειδή έχουμε θλίψη $\Delta\ell < 0$ άρα: $-P = E\frac{\Delta\ell}{\ell} \Rightarrow \frac{\Delta\ell}{\ell} = -\frac{P}{E}$

Η σχετική μεταβολή του όγκου θα είναι:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_{APX}} = -(1-2\mu)\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right) = (1-2\mu)\frac{P}{E}$$

Είναι θετική, με άλλα λόγια έχουμε αύξηση του όγκου, αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$\mu = 0.34$
$E = 1{,}2\cdot10^{11}$ N/m^2
$P = 9{,}8$ Pa

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_{APX}} = 2.6\cdot10^{-11}$$

Παρατήρηση: για να έχουμε μεγαλύτερη αύξηση της πυκνότητας θα πρέπει να ασκήσουμε μεγαλύτερη τάση.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 6

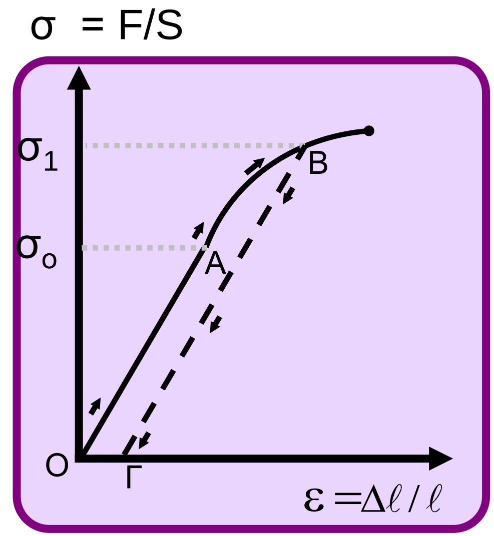
Θέλουμε να προσδιορίσουμε πειραματικά το μέτρο του Young για ένα σύρμα με τη χρήση βαρών τα οποία μπορούμε να αναρτούμε στο άκρο του (όπως ακριβώς κάνουμε στην αντίστοιχη εργαστηριακή άσκηση). Με την κατάλληλη συσκευή μπορούμε να μετρούμε την επιμήκυνση (κατά την προσθήκη βαρών) ή τη βράχυνση (κατά την αφαίρεση βαρών) του σύρματος. Εάν δεν έχουμε καμιά πληροφορία για το υλικό από το οποίο αποτελείται το σύρμα ποια είναι η πιο σωστή διαδικασία; Η σταδιακή προσθήκη ή η σταδιακή αφαίρεση βαρών (τα οποία έχουν τοποθετηθεί αρχικά); Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

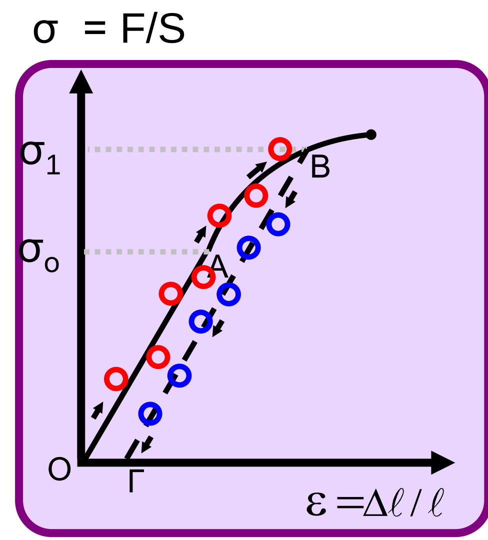
Παρατηρήσεις

1. Για τον προσδιορισμό του μέτρου του Young, για ένα υλικό πρέπει να έχουμε εξασφαλίσει ότι βρισκόμαστε στην αναλογική περιοχή, (ελαστική περιοχή) (ΟΑ), ώστε πράγματι με χρήση της ευθείας ελάχιστων τετραγώνων η κλίση να μας δίνει το μέτρο του Young.

2. Μόνο στην ελαστική περιοχή ισχύει ο νόμος του Hooke, δηλαδή, σ = Εε.

3. Άρα αν προσθέτουμε βάρη (σ = Β/S) δίχως να ξέρουμε το όριο ελαστικότητας $σ_ο$ πολύ πιθανό να φύγουμε από την ελαστική περιοχή, όπου εκεί η παραμόρφωση αυξάνει απότομα και δεν ισχύει ο νόμος του Hooke.





4. Ακόμα χειρότερα εφόσον δεν γνωρίζουμε το «υλικό» δεν γνωρίζουμε επίσης και το όριο θραύσης του $σ_θ$. Αν συνεχίσουμε να προσθέτουμε βάρη τότε μπορεί η τάση να ξεπεράσει την τάση θραύσης και τελικά να καταστρέψουμε το σύρμα, που σημαίνει το πείραμα πρέπει να επαναληφθεί, να ξαναρυθμιστούν οι διατάξεις κ.λ.π.

5. Αν κατά την πρόσθεση βαρών ξεπεράσουμε το όριο ελαστικότητας, θα υπάρχει μία παραμένουσα παραμόρφωση, κατά συνέπεια όταν αφαιρούμε τα βάρη δεν θα επιστρέψουμε από την ίδια καμπύλη (ΟΒ) αλλά από την ευθεία γραμμή ΒΓ. Όντως όταν αφαιρεθούν όλα τα βάρη η παραμόρφωση δεν θα είναι μηδενική (ε).

6. Το μέτρο του Young εξαρτάται από την κλίση της ευθείας ΟΑ και αυτή είναι ίδια με την κλίση της ευθείας ΓΒ, δηλαδή το μέτρο του Young θα προκύψει το ίδιο είτε προσθέσουμε βάρη είτε αφαιρέσουμε βάρη.

Συμπέρασμα

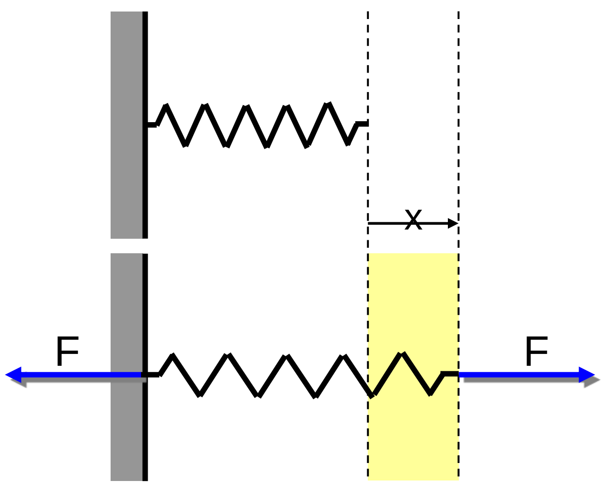
Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, καταλαβαίνουμε ότι αν έχουν προστεθεί ήδη κάποια βάρη, τότε θα συνεχίσουμε το πείραμα αφαιρώντας σταδιακά τα βάρη, όπου σχεδιάζουμε την καμπύλη σ (F/S) συναρτήσει της σχετικής βράχυνσης (ε), και από την κλίση που θα προκύψει από την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων προκύπτει το μέτρο του Young του υλικού.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 7

Σ' αυτό το κεφάλαιο της Φυσικής για να χαρακτηρίσουμε την ελαστικότητα των υλικών χρησιμοποιούμε το μέτρο του Young, ενώ στη Μηχανική τη σταθερά του Hooke. Ποια είναι η σχέση των δύο μεγεθών; Ποια τα πλεονεκτήματα και ποια τα μειονεκτήματά τους;

Σταθερά Hooke k - Νόμος του Hooke για το ελατήριο.



Για να διατηρήσουμε ένα ελατήριο τεντωμένο κατά επιπλέον μήκος x πέραν του αρχικού του μήκους, πρέπει να ασκήσουμε μία δύναμη F σε κάθε άκρο. Αν η επιμήκυνση δεν είναι πάρα πολύ μεγάλη βρίσκουμε ότι το μέτρο της δύναμης είναι ανάλογη της επιμήκυνσης:

$$F = kx$$

Για το ελατήριο η σχέση αυτή κανονικά δεν πρέπει να αποκαλείται νόμος, διότι είναι η διατύπωση ενός κανόνα για μία συγκεκριμένη συσκευή (ελατήριο) και όχι ένας θεμελιώδης νόμος τη φύσης. Η σταθερά αναλογίας που έχει διαστάσεις δύναμης ανά μονάδα μήκους ονομάζεται **σταθερά ελατηρίου** ή **σταθερά του Hooke**.

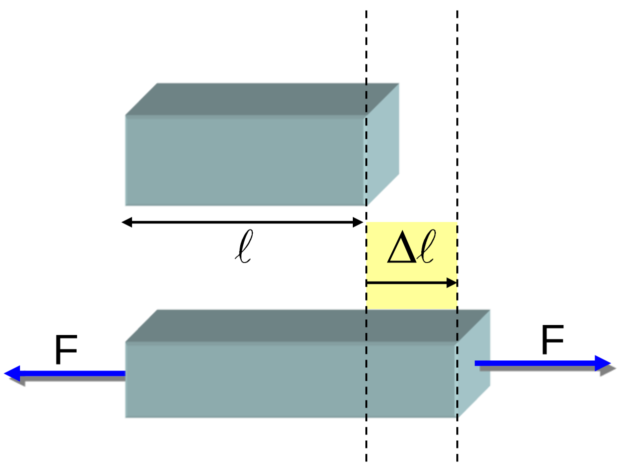
☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Μέτρο του Young E - Νόμος του Hooke για στερεό σώμα.

Για κάθε είδος παραμόρφωσης εισάγουμε ένα μέγεθος που ονομάζεται **τάση** και ορίζει τη δύναμη που προκαλεί την επιμήκυνση, τη συμπίεση ή τη στρέψη, με την έκφραση δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας (F/S). Ένα δεύτερο μέγεθος, η **παραμόρφωση**, περιγράφει ακριβώς τη παραμόρφωση που προκαλεί η αντίστοιχη τάση.

Για μικρές τιμές τάσης και παραμόρφωσης, διαπιστώνεται ότι η τάση είναι ανάλογη της παραμόρφωσης, ο συντελεστής αναλογίας ονομάζεται **μέτρο ελαστικότητας** και ο νόμος αυτός **Νόμος του Hooke**.

Στην περίπτωση του **εφελκυσμού**, η της **θλίψης** το μέτρο της ελαστικότητας ονομάζεται μέτρο του Young (Ε) και ισχύει:



$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\frac{F}{S} \qquad \frac{\Delta\ell}{\ell}$$

$$F = SE\frac{\Delta\ell}{\ell}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Για να συσχετίσουμε τη σταθερά ελατηρίου k (μέτρο ελαστικότητας για τα ελατήρια) με το μέτρο του Young E (μέτρο ελαστικότητας στερεού κατά τον εφελκυσμό ή τη θλίψη) ότι οι δύο δυνάμεις είναι ίσες και συνεπώς:

$$\left.\begin{aligned} F &= kx \\ F &= E\frac{\Delta\ell}{\ell} \end{aligned}\right\} \overset{x\equiv\Delta\ell}{\Rightarrow} k\Delta\ell = SE\frac{\Delta\ell}{\ell} \Rightarrow k = \frac{S}{\ell}E$$

Σταθερά ελατηρίου k	Μέτρο του Young E
Εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του ελατηρίου.	Εξαρτάται από το υλικό του στερεού, για πολλά υλικά όμως έχει σχεδόν την ίδια τιμή.
Χρησιμοποιείται μόνο για επιμηκύνσεις ελατηρίων.	Χρησιμοποιείται για επιμηκύνσεις ελαστικών υλικών.
Ο νόμος του ελατήριου είναι ειδική περίπτωση του Νόμου του Hooke.	
Μονάδα μέτρησης: σε N/m	Μονάδα μέτρησης: σε Pa = N/m^2

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 8

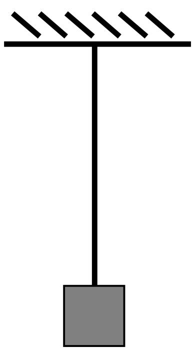
Πόση πρέπει να είναι η οριακή διάμετρος d ατσάλινης ράβδου, ώστε να αντέχει δύναμη F = 9.8 kN; Δίνεται σ_θ = 0.60 GPa.

Το όριο θραύσης είναι η μέγιστη εγκάρσια δύναμη που μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα στερεό ανά μονάδα επιφάνειας δίχως να καταστραφεί.

$$\sigma_\theta = \frac{F}{S_{\text{οριακό}}} \Rightarrow S_{\text{οριακό}} = \frac{F}{\sigma_\theta} \Rightarrow \pi r_{min}^2 = \frac{F}{\sigma_\theta} \Rightarrow \frac{\pi}{4} d_{min}^2 = \frac{F}{\sigma_\theta} \Rightarrow$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε, ότι η ελάχιστη διάμετρος που πρέπει να έχει το σύρμα ώστε να αντέξει αυτή τη δύναμη είναι:

$$d_{min} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9.8 \cdot 10^3 N}{\pi \cdot 0.6 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}}} = 4.56 \cdot 10^{-3} m = 4.56 mm$$



m = 1 ton

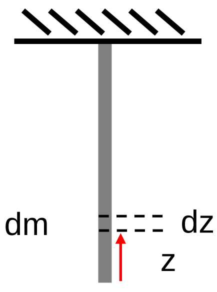
Παρατήρηση

Σε μία ατσάλινη ράβδος με διάμετρο διατομής μεγαλύτερη περίπου από 5 mm αν βρίσκεται στερεωμένη σε ένα τοίχο μπορεί να αντέξει συνολικά μάζα 1 τόνο (μαζί με το βάρος της), το ατσάλι έχει σχετικά μεγάλο όριο θραύσης σε σχέση με τα άλλα μέταλλα.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 9

Υπολογίστε το μήκος χάλκινου σύρματος, το οποίο αν το κρεμάσουμε αρχίζει να κόβεται υπό την επίδραση του δικού του βάρους. Συγκρίνεται με σύρμα από μόλυβδο. Δίνονται για το χαλκό σ_θ = 0.245 GPa, ρ = 8.9 · 10^3 kgr/m^3 και για το μόλυβδο σ_θ = 0.020 GPa, ρ = 11.3 · 10^3 kgr/m^3, g = 9.81 m/s^2.



Η στοιχειώδης μάζα μήκους dz είναι $dm = \rho S dz$

Θεωρώντας ότι η διατομή του σύρματος είναι η ίδια κατά μήκος του άξονα της z η μάζα της ράβδου σε ύψος από 0 έως z θα είναι:

$$m = \rho S \int_0^z dz = \rho S z$$

Το μέγιστο μήκος του σύρματος το οποίο αν το κρεμάσουμε θα αρχίσει να κόβεται είναι εκείνο στο οποίο το βάρος του ανά μονάδα επιφάνειας είναι το ίδιο με το όριο θραύσης, δηλαδή:

$$\sigma_\theta = \frac{B}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho S z_{max} g}{S} = \rho g z_{max} \Rightarrow \quad z_{max} = \frac{\sigma_\theta}{\rho g}$$

Για το χαλκό έχουμε:

$$z_{max} = \frac{\sigma_\theta}{\rho g} = \frac{0.245 \cdot 10^9 \, Pa}{8.9 \cdot 10^3 \frac{Kgr}{m^3} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 2806 m$$

Για το μόλυβδο έχουμε:

$$z_{max} = \frac{\sigma_\theta}{\rho g} = \frac{0.020 \cdot 10^9 \, Pa}{11.3 \cdot 10^3 \frac{Kgr}{m^3} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 180 m$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 10

Για την μέτρηση του βάθους της θάλασσας, από ένα σκάφος ρίχνουν βαρίδι δεμένο με ατσάλινο σύρμα. Ποιο είναι το μέγιστο βάθος που μπορεί να μετρηθεί; Να αγνοηθεί η μάζα του βαριδιού συγκριτικά με τη μάζα του σύρματος. Δίνονται σ_θ = 0.60 GPa, $\rho = 7.7 \cdot 10^3$ kgr/m^3, g = 9.81 m/s^2, $\rho_\upsilon = 10^3$ kgr/m^3.

Μέσα στο νερό, η εγκάρσια δύναμη που ασκείται σε κάθε τμήμα του σύρματος είναι:

$$F_{o\lambda} = B - A = mg - \rho_\upsilon gV = \rho gV - \rho_\upsilon gV = (\rho - \rho_\upsilon) gSz$$

Το μέγιστο βάθος που μπορούμε να ρίξουμε το σύρμα είναι εκείνο στο οποίο η συνολική δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας είναι ίση με το όριο θραύσης:

$$\sigma_\theta = \frac{F_{o\lambda}}{S} = \frac{(\rho - \rho_\upsilon) gSz}{S} = (\rho - \rho_\upsilon) gz \Rightarrow \quad z_{max} = \frac{\sigma_\theta}{(\rho - \rho_\upsilon) g}$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$z_{max} = \frac{\sigma_\theta}{(\rho - \rho_\upsilon) g} = \frac{0.60 \cdot 10^9 \, Pa}{\left(7.7 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^3\right) \frac{Kgr}{m^3} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 9.3 km$$

Το μήκος αυτό είναι μεγαλύτερο αν κρεμούσαμε το σύρμα σε ακλόνητο τοίχο στη στεριά.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 11

Ατσάλινο σύρμα μήκους 40 m και διαμέτρου 2mm κρέμεται από ακλόνητο σημείο. α) Τι βάρος μπορεί να αντέξει το σύρμα; β) Πόσο θα επιμηκυνθεί αν σε αυτό προσδέσουμε μάζα m = 70kgr; γ) Θα παρατηρήσουμε παραμένουσα παραμόρφωση όταν αφαιρέσουμε τη μάζα, αν ξέρουμε ότι το όριο ελαστικότητας είναι 294 MPa; Δίνονται σ_θ = 0.60 GPa, ρ = 7.7 · 10^3 kgr/m^3, g = 9.81 m/s^2, E = 22 10^{10} N/m^2.

Θεωρούμε αμελητέα τη μάζα του σύρματος (m_σ = 1 Kgr) στους υπολογισμούς μας.

α) $$\sigma_\theta = \frac{B_{o\rho}}{S} \Rightarrow B_{o\rho} = \sigma_\theta S = \sigma_\theta \pi r^2 = \frac{1}{4}\sigma_\theta \pi d^2 = \frac{1}{4} 0.60 \cdot 10^9 \,\text{Pa} \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot 10^{-3}\text{m}\right)^2 = 1885\text{N}$$

μάζα περίπου 189kgr

β) θεωρώντας ότι βρισκόμαστε στην ελαστική περιοχή θα ισχύει ο Νόμος του Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{E}\frac{F}{S} \Rightarrow \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{E}\frac{F}{S} \overset{\substack{F=mg \\ S=\frac{1}{4}\pi d^2}}{\Rightarrow} \Delta\ell = \frac{4mg\ell}{E\pi d^2} \Rightarrow \Delta\ell = \frac{4 \cdot 70\text{kg} \cdot 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 40\text{m}}{22 \cdot 10^{10}\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\pi \cdot \left(2 \cdot 10^{-3}\text{m}\right)^2} \cong 4\text{cm}$$

γ) η εφαρμοζόμενη τάση είναι:

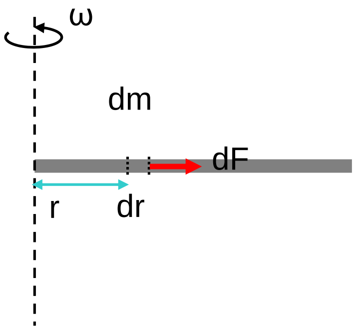
$$\sigma = E\varepsilon = E \cdot \frac{\Delta\ell}{\ell} = 22 \cdot 10^{10}\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-2}\text{m}}{40\text{m}} = 22 \cdot 10^7 \,\text{Pa} = 220\text{MPa} < \sigma_o = 294\text{MPa}$$

Δεν παρατηρούμε παραμένουσα παραμόρφωση διότι δεν ξεπεράσαμε την ελαστική περιοχή.

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 12

Ομογενής χάλκινη ράβδος μήκους ℓ = 1 m περιστρέφεται ομαλά γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το άκρο της. Για ποια συχνότητα περιστροφής η ράβδος θα σπάσει; Δίνονται σ_θ = 0.245 GPa, ρ = 8.9 · 10^3 Kgr/m^3.



Καθώς η ράβδος περιστρέφεται, αναπτύσσεται σε κάθε σημείο της φυγόκεντρος δύναμη, η οποία αυξάνει όσο απομακρυνόμαστε από τον άξονα περιστροφής και δίνεται από τη σχέση:

$$F = m\frac{\upsilon^2}{r} \overset{\upsilon=\omega r}{=} m\omega^2 r$$

Σε κάθε στοιχειώδη τμήμα της dr της ράβδου που έχει μάζα dm αναπτύσσεται δύναμη dF η οποία είναι:

$$dF = dm\omega^2 r = (\rho dV)\omega^2 r = \rho S\omega^2 r dr$$

Η συνολική δύναμη που αναπτύσσεται στο κάθε άκρο της ράβδου θα είναι:

$$F = \rho S\omega^2 \int_0^\ell r dr = \rho S\omega^2 \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^\ell = \rho S\omega^2 \frac{\ell^2}{2} \overset{\omega=2\pi f}{=} 2\rho S\pi^2 f^2 \ell^2$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Η ράβδος θα σπάσει όταν η τάση της δύναμης γίνει ίση με το όριο θραύσης της ράβδου, δηλαδή:

$$\sigma_\theta = \frac{F}{S} \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{2\rho S\pi^2 f^2 \ell^2}{S} \Rightarrow \sigma_\theta = 2\rho\pi^2 f^2 \ell^2 \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{\pi\ell}\sqrt{\frac{\sigma_\theta}{2\rho}}$$

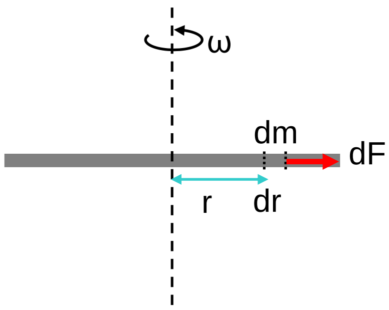
Αντικαθιστώντας βρίσκουμε την συχνότητα όπου η ράβδος θα σπάσει:

$$f = \frac{1}{\pi\cdot 1m}\sqrt{\frac{0.245\cdot 10^9\,Pa}{2\cdot 8.9\cdot 10^3\,\frac{kgr}{m^3}}} = 38s^{-1} = 38Hz$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 13

Ομογενής ράβδος περιστρέφεται ομαλά γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Η ράβδος σπάει όταν η ταχύτητα στο άκρο της φθάνει την τιμή υ = 380 m/s. Υπολογίστε το όριο θραύσης σ_θ του υλικού, αν γνωρίζετε ότι η πυκνότητα του είναι : $\rho = 7.9 \cdot 10^3$ Kgr/m^3.



Σε κάθε στοιχειώδη τμήμα της dr της ράβδου που έχει μάζα dm αναπτύσσεται δύναμη dF η οποία είναι:

$$dF = dm\omega^2 r = (\rho dV)\omega^2 r = \rho S\omega^2 r dr$$

Η συνολική δύναμη που αναπτύσσεται στο κάθε άκρο της ράβδου θα είναι:

$$F = \rho S\omega^2 \int_0^{\ell/2} r dr = \rho S\omega^2 \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{\ell/2} = \rho S \frac{\omega^2(\ell/2)^2}{2} \overset{\upsilon=\omega\frac{\ell}{2}}{=} \frac{1}{2}\rho S\upsilon^2$$

Η ράβδος θα σπάσει όταν η τάση της δύναμης γίνει ίση με το όριο θραύσης της ράβδου, δηλαδή:

$$\sigma_\theta = \frac{F}{S} = \frac{\frac{1}{2}\rho S\upsilon^2}{S}\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$$

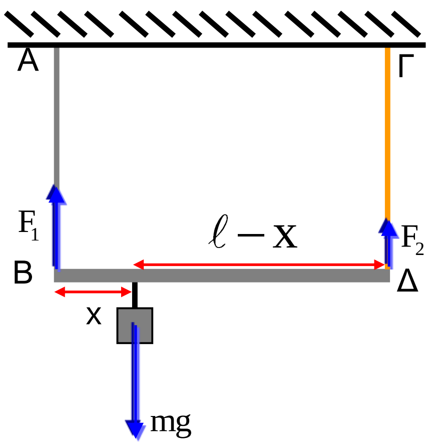
Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2} 7.9 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}\left(380\frac{m}{s}\right)^2 = 5.7 GPa$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 14

Στο επόμενο σχήμα το ΑΒ είναι σύρμα από σίδηρο, το ΓΔ από χαλκό. Και τα δύο σύρματα έχουν το ίδιο μήκος και την ίδια διατομή. Η ράβδος ΓΔ έχει μήκος ℓ = 80 cm. Σε ποια απόσταση x από το άκρο Β πρέπει να κρεμάσομε μάζα m = 2 kgr, ώστε η ράβδος να παραμείνει οριζόντια;



Θεωρούμε τη ράβδο ΒΔ αβαρή και άκαμπτη.

Λόγω δράσης – αντίδρασης το σύρμα κάθε σύρμα θα ασκεί δύναμη στην ράβδο ίση με αυτή που δέχεται στο άκρο της αλλά αντίθετης φοράς.

Για το σύρμα ΑΒ (σίδηρο) έχουμε:

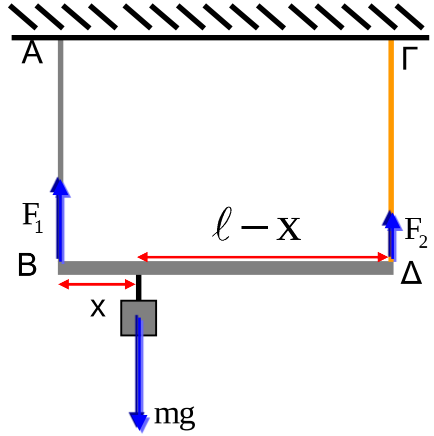
$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \frac{F_1}{S} = E_{Fe}\frac{(\Delta\ell)_1}{\ell} \Rightarrow F_1 = E_{Fe}S\frac{(\Delta\ell)_1}{\ell} \quad (1)$$

Όμοια για το το σύρμα ΓΔ (χαλκό) έχουμε:

$$F_2 = E_{Cu}S\frac{(\Delta\ell)_2}{\ell} \quad (2)$$

Για μα είναι οριζόντια η ράβδος ΒΔ πρέπει οι επιμηκύνσεις να είναι ίσες δηλαδή: $(\Delta\ell)_1 = (\Delta\ell)_2$

Διαιρώντας κατά μέλη (1)/(2) έχουμε: $F_1 = \dfrac{E_{Fe}}{E_{Cu}}F_2 \quad (3)$



Για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδενική καθώς και οι ροπές ως προς ένα σημείο.

$$\sum F = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = mg \xRightarrow{F_1 = \frac{E_{Fe}}{E_{Cu}} F_2} F_2 = \frac{mg}{1 + \frac{E_{Fe}}{E_{Cu}}}$$

$$\sum \tau_B = 0 \Rightarrow -mgx + F_2 \ell = 0 \xRightarrow{F_2 = \frac{mg}{1 + \frac{E_{Fe}}{E_{Cu}}}} \boxed{x = \frac{\ell}{1 + \frac{E_{Fe}}{E_{Cu}}}}$$

Αντικαθιστώντας, βρίσκουμε:

$$\ell = 80\text{cm}$$

$$E_{Fe} = 22 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}$$

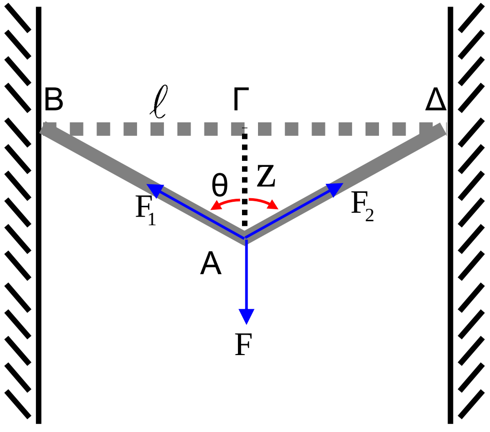
$$E_{Cu} = 12 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}$$

$$x = \frac{80\text{cm}}{1 + \frac{22 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}}{12 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}}} = 28.2\text{cm}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 15

Τα άκρα Α και Β μίας λεπτής οριζόντιας ράβδου μήκους 2ℓ, είναι στερεωμένα σε κάθετους τοίχους. Υπολογίστε τη δύναμη F που πρέπει να επιδράσει στο μέσο της ράβδου Γ ώστε να απομακρυνθεί κατά απόσταση z. Δίνονται η διατομή της ράβδου S και το μέτρο του Young του υλικού της ράβδου Ε.



Η δύναμη F ασκείται στο κέντρο της ράβδου με αποτέλεσμα οι επιμήκυνση του τμήματος ΑΒ να είναι ίση με αυτή του τμήματος ΑΔ, και τελικά οι αξονικές δυνάμεις F_1 και F_2 να είναι ίσες.

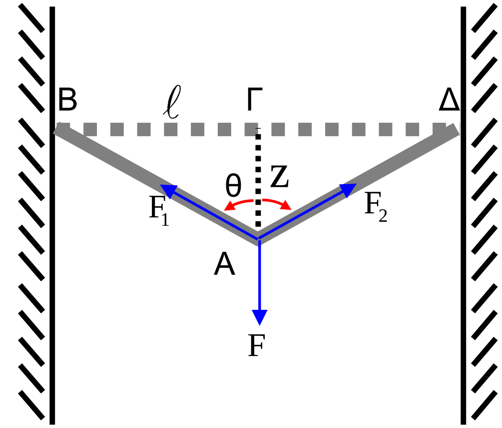
Η γωνία θ υπολογίζεται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ:

$$\cos\theta = \frac{\Gamma A}{BA} = \frac{z}{\sqrt{\ell^2 + z^2}}$$

Για το τμήμα ΑΒ ισχύει: $$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \frac{F_1}{S} = E\frac{(\Delta\ell)_1}{\ell} \Rightarrow F_1 = ES\frac{(\Delta\ell)_1}{\ell}$$

Επειδή: $$\frac{(\Delta\ell)_1}{\ell} = \frac{AB - \ell}{\ell} = \frac{\sqrt{\ell^2 + z^2} - \ell}{\ell} \Rightarrow F_1 = ES\frac{\sqrt{\ell^2 + z^2} - \ell}{\ell}$$

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας θα βρούμε τελικά το ζητούμενο.

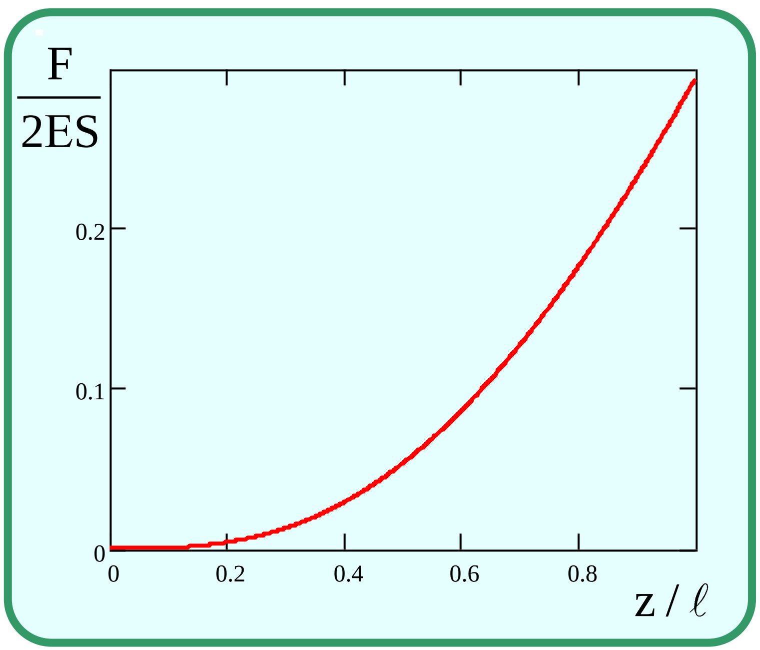


$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_1 \sin\theta = F_2 \sin\theta \Rightarrow F_1 = F_2 \\ F_1 \cos\theta + F_2 \cos\theta = F \end{cases} \Rightarrow F = 2F_1 \cos\theta$$

Όμως, $F_1 = ES\dfrac{\sqrt{\ell^2+z^2}-\ell}{\ell}$ και $\cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{\ell^2+z^2}}$ άρα

$$F = 2ES\frac{\sqrt{\ell^2+z^2}-\ell}{\ell}\frac{z}{\sqrt{\ell^2+z^2}}$$

Αυτή είναι η δύναμη που πρέπει να ασκήσουμε ώστε να απομακρυνθεί κατά z.



παρατήρηση $F = 2ES\dfrac{z}{\ell}\left(1 - \dfrac{\ell}{\sqrt{\ell^2+z^2}}\right)$

$$\sqrt{\ell^2+z^2} = \ell\sqrt{1+\left(\frac{z}{\ell}\right)^2} = \ell\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^2+\dots\right)$$

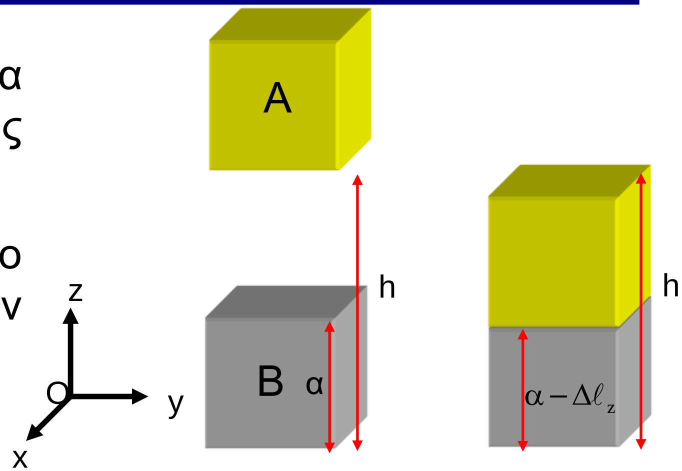
$$1 - \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+z^2}} = \frac{1}{2}\frac{z^2}{\ell^2}+\dots$$

Αν $\dfrac{z}{\ell} \ll 1$ τότε $F \approx 2ES\dfrac{z}{\ell}\dfrac{1}{2}\dfrac{z^2}{\ell^2} = ES\dfrac{z^3}{\ell^3}$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 16

Μεταλλικός κύβος A μάζας m = 50kg πέφτει ελεύθερα από ύψος h = 50m πάνω σε μολύβδινο κύβο B που βρίσκεται στο έδαφος ακμής ℓ = 10 cm . O κύβος A δεν παθαίνει καμιά παραμόρφωση, να υπολογιστούν οι μεταβολές των ακμών του κύβου α) στη γενική περίπτωση και β) αν $\Delta\ell_z$ << h. Δίδεται $E_B = 1.5\ 10\ N/m^2$, μ = 0.44.



Αν δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας, τότε η δυναμική ενέργεια του κύβου A θα γίνει μετατραπεί σε ενέργεια παραμόρφωσης του κύβου B (ενέργεια θλίψης).

Θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο όπου θα σταματήσει ο κύβος A μετά την παραμόρφωση του κύβου B η δυναμική του ενέργεια θα είναι:

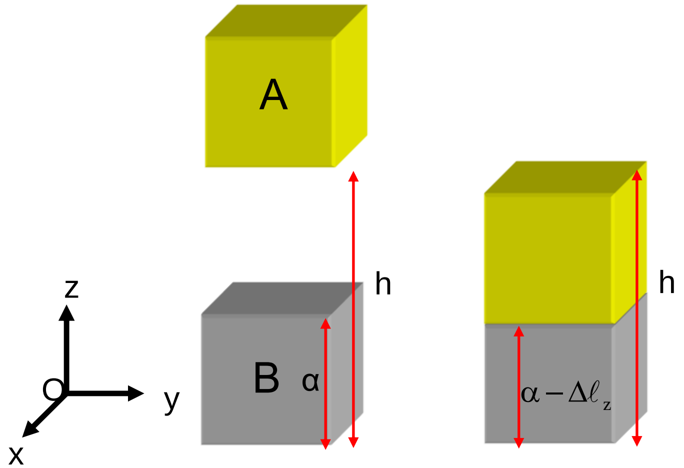
$$E_{\Delta YN} = mg\left(h - \left(\ell - \Delta\ell_z\right)\right)$$

Για την παραμόρφωση του κύβου το έργο που απαιτείται από z έως z + dz (dz<0) θα είναι:

$$\delta W = Fdz = SE\frac{z}{\ell}dz$$

Το συνολικό έργο όπου είναι η ενέργεια παραμόρφωσης θα είναι:

$$W = \frac{SE}{\ell}\int_0^{\Delta\ell_z} zdz = \frac{SE}{\ell}\frac{\left(\Delta\ell_z\right)^2}{2} \overset{S=\ell^2}{=} \frac{1}{2}E\ell\left(\Delta\ell_z\right)^2$$



Επειδή: $E_{\Delta YN} = W \Rightarrow mg\left(h-\ell+\Delta\ell_z\right)=\frac{1}{2}E\ell\left(\Delta\ell_z\right)^2$

από την λύση της δευτεροβάθμια εξίσωση αυτή μπορεί να προκύψει η μεταβολή της ακμής του z άξονα.

β) στην περίπτωση όπου $\Delta\ell_z \ll h$ $\quad \left(h+\Delta\ell_z \approx h\right)$

$$mg\left(h-\ell\right)=\frac{1}{2}E\ell\left(\Delta\ell_z\right)^2 \Rightarrow \Delta\ell_z=\sqrt{\frac{2mg\left(h-\ell\right)}{E\ell}}$$

Όσο για την μεταβολή του μήκους στο x άξονα θα δίνεται από το συντελεστή Poisson:

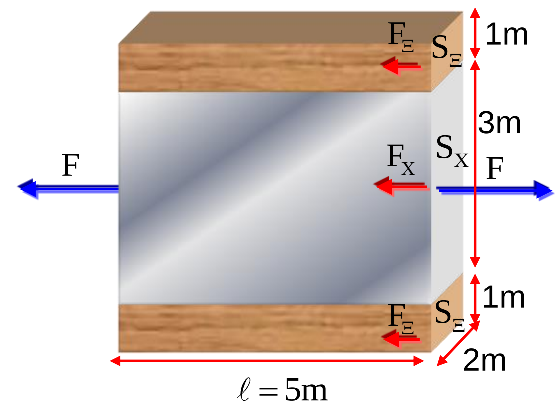
$$\mu=-\frac{\frac{\Delta\ell_x}{\ell_x}}{\frac{\Delta\ell_z}{\ell_z}} \overset{\ell_x=\ell_z=\ell}{\Rightarrow} \mu=-\frac{\Delta\ell_z}{\Delta\ell_x} \Rightarrow \Delta\ell_x=-\mu\Delta\ell_z$$

Όμοια βρίσκουμε: $\Delta\ell_y=-\mu\Delta\ell_z$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 17

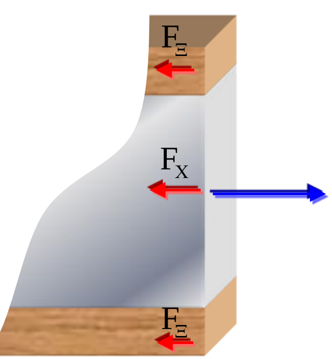
Η σύνθετη ράβδος του σχήματος εφελκύεται από αξονική δύναμη $F = 2 \cdot 10^4$ N. Δεδομένου ότι η σύνδεση των τεμαχίων του χάλυβα και του ξύλου είναι στέρεα να υπολογιστούν οι αναπτυσσόμενες τάσεις στο χάλυβα και στο ξύλο, καθώς και η κοινή επιμήκυνση τους. Δίνονται $E_X = 2 \cdot 10^6$ atm και $E_\Xi = 15 \cdot 10^4$ atm



Η τάση της δύναμης «μοιράζεται» και στο ξύλο και στο χάλυβα εφόσον αυτά είναι στέρεα. Άρα οι επιμηκύνσεις τόσο του ξύλου όσο του χάλυβα θα είναι ίδιες.

$$\begin{cases} \ell_\Xi = \ell_X = \ell \\ \Delta\ell_\Xi = \Delta\ell_X \end{cases} \overset{\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell}}{\Rightarrow} \varepsilon_X = \varepsilon_\Xi \overset{\frac{F}{S} = \varepsilon E}{\Rightarrow} \frac{1}{E_\Xi}\frac{F_\Xi}{S_\Xi} = \frac{1}{E_X}\frac{F_X}{S_X} \quad (1)$$

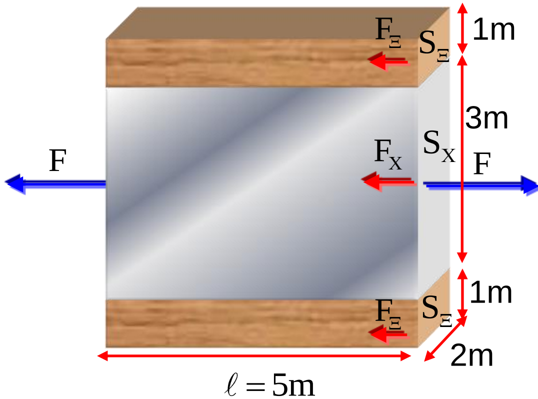
Για να υπάρχει ισορροπία πρέπει: $F = 2F_\Xi + F_X$ (2)



Από την (1) και (2) με απλές πράξεις προκύπτει:

$$F_\Xi = \frac{E_\Xi S_\Xi}{2E_\Xi S_\Xi + E_X S_X} F \overset{\sigma = \frac{F}{S}}{\Rightarrow} \sigma_\Xi = \frac{E_\Xi}{2E_\Xi S_\Xi + E_X S_X} F$$

$$F_X = \frac{E_X S_X}{2E_\Xi S_\Xi + E_X S_X} F \overset{\sigma = \frac{F}{S}}{\Rightarrow} \sigma_x = \frac{E_X}{2E_\Xi S_\Xi + E_X S_X} F$$



Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$\sigma_\Xi = \frac{E_\Xi}{2E_\Xi S_\Xi + E_X S_X} F = \frac{15 \cdot 10^4 \text{atm}}{15 \cdot 10^4 \text{atm} \cdot 1\text{m} \cdot 2\text{m} + 2 \cdot 10^6 \text{atm} \cdot 3\text{m} \cdot 2\text{m}} 10^4 \text{N} = 122 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_x = \frac{E_X}{2E_\Xi S_\Xi + E_X S_X} F = \frac{2 \cdot 10^6 \text{atm}}{15 \cdot 10^4 \text{atm} \cdot 1\text{m} \cdot 2\text{m} + 2 \cdot 10^6 \text{atm} \cdot 3\text{m} \cdot 2\text{m}} 10^4 \text{N} = 1626 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Η επιμήκυνση θα βρεθεί ως εξής:

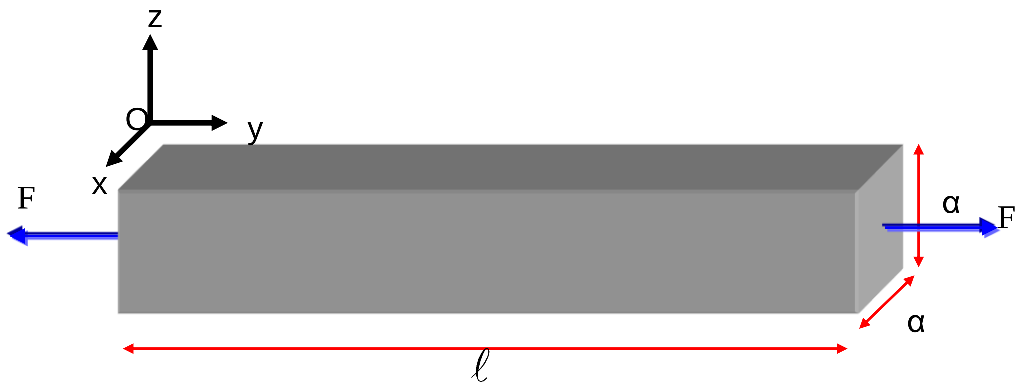
$$\sigma = \varepsilon E \Rightarrow \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{1}{E_\Xi} \sigma_\Xi \Rightarrow \Delta\ell = \frac{\ell}{E_\Xi} \sigma_\Xi \Rightarrow$$

$$\Delta\ell = \frac{5\text{m}}{15 \cdot 10^4 \text{atm}} 122 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{5\text{m}}{15 \cdot 10^4 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} 122 \cdot \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 0.04 \mu\text{m}$$

☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 18

Ράβδος μήκους 10 cm και τετραγωνικής διατομής με πλευρά 1 cm δέχεται μία αξονική εφελκυστική δύναμη F = 10^6 N. Να υπολογίσετε α) την επιμήκυνση της ράβδου β) την την ελάττωση της επιφάνειας της τετραγωνικής διατομής κατά τη διάρκεια αυτής τη διεργασίας. Δίνονται Ε = 10^{11} Pa και μ = 0.3

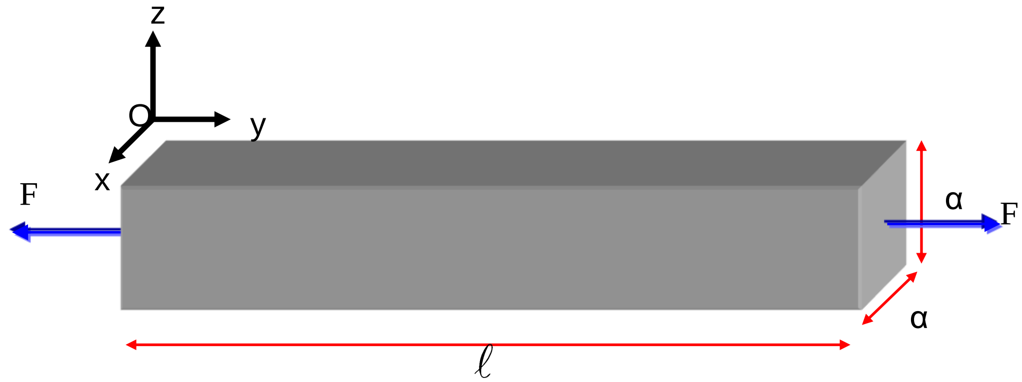


Από το Νόμο του Hooke έχουμε:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \frac{F}{S} = E\frac{\Delta\ell}{\ell} \Rightarrow \quad \Delta\ell = \frac{\ell F}{ES} = \frac{\ell F}{E\alpha^2}$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$\Delta\ell = \frac{\ell F}{E\alpha^2} = \frac{10\mathrm{cm}\cdot 10^6\,\mathrm{N}}{10^{11}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\left(10^{-2}\mathrm{m}\right)^2} = 1\mathrm{cm}$$



Η μεταβολή του μήκους στους άξονες x,z θα βρεθεί από το συντελεστή Poisson:

$$\mu = -\frac{\dfrac{\Delta\ell_x}{\ell_x}}{\dfrac{\Delta\ell_y}{\ell_y}} \overset{\substack{\ell_x=\alpha \\ \ell_y=\ell \\ \Delta\ell_y=\Delta\ell}}{\Rightarrow} \mu = -\frac{\ell\Delta\ell_x}{\alpha\Delta\ell} \Rightarrow \quad \Delta\ell_x = -\mu\alpha\frac{\Delta\ell}{\ell}$$

όμοια: $\Delta\ell_z = \Delta\ell_x = -\mu\alpha\dfrac{\Delta\ell}{\ell}$

Η μεταβολή της επιφάνειας θα είναι:

$$\Delta S = S_{\tau\varepsilon\lambda} - S_{\alpha\rho\chi} = \left(\alpha + \underbrace{\Delta\ell_x}_{<0}\right)\left(\alpha + \underbrace{\Delta\ell_z}_{<0}\right) - \alpha^2 \overset{\Delta\ell_x=\Delta\ell_z}{=} \alpha^2 + 2\alpha\Delta\ell_z + \underbrace{\left(\Delta\ell_z\right)^2}_{<<1} - \alpha^2 = 2\alpha\Delta\ell_z$$

$$\overset{\Delta\ell_z=-\mu\alpha\frac{\Delta\ell}{\ell}}{=} -2\mu\alpha^2\frac{\Delta\ell}{\ell} = -2\cdot 0.3\cdot(1\text{cm})^2\cdot\frac{1\text{cm}}{10\text{cm}} = -0.06\text{cm}^2$$