ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

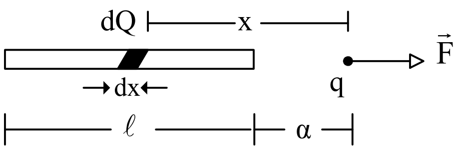
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

Θέμα 1

Μια ράβδος μήκους ℓ είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με θετικό φορτίο Q. Να υπολογιστεί η δύναμη που εξασκείται σε ένα θετικό σημειακό φορτίο q, που βρίσκεται σε απόσταση α από το ένα άκρο της ράβδου αν η απόσταση α είναι κατά μήκος της ράβδου.

(Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Έστω ένα στοιχειώδες φορτίο dQ της ράβδου πλάτους dx, που βρίσκεται σε απόσταση x από το φορτίο q. Με τη βοήθεια της σταθερής γραμμικής πυκνότητας φορτίου της ράβδου λ είναι: $dQ = \lambda dx$

Αλλά: $\lambda = \dfrac{Q}{\ell}$ οπότε: $dQ = \dfrac{Q}{\ell} dx$ **(1)**

Η δύναμη που ασκεί στο φορτίο q το στοιχειώδες φορτίο dQ είναι:

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q\,dQ}{x^2} \hat{x} \overset{(1)}{\Rightarrow} d\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o \ell} \frac{dx}{x^2} \hat{x}$$

Επειδή η δύναμη από κάθε στοιχειώδες φορτίο dQ έχει την ίδια κατεύθυνση, η ολική δύναμη στο φορτίο q είναι τελικά:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o \ell} \int_{\alpha}^{\alpha+\ell} \frac{dx}{x^2} \,\hat{x} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o \ell} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\alpha}^{\alpha+\ell} \hat{x} =$$

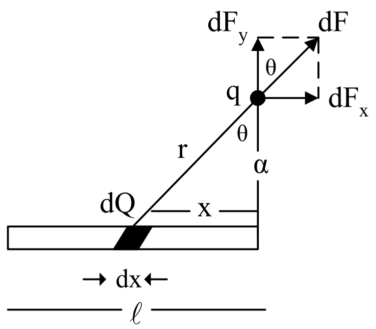
$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o \ell} \left(-\frac{1}{\alpha+\ell} + \frac{1}{\alpha} \right) \hat{x} \Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{qQ}{\alpha(\alpha+\ell)} \hat{x}$$

Θέμα 2

Μια ράβδος μήκους ℓ είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με θετικό φορτίο Q. Να υπολογιστεί η δύναμη που εξασκείται σε ένα θετικό σημειακό φορτίο q, που βρίσκεται σε απόσταση α από το ένα άκρο της ράβδου κάθετα προς αυτή.

(Σχολή Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Ένα στοιχειώδες φορτίο dQ της ράβδου ασκεί στο q δύναμη που έχει τη διεύθυνση της μεταξύ τους απόστασης r και μέτρο:

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qdQ}{r^2} \overset{(1)}{\Rightarrow} dF = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o\ell}\frac{dx}{r^2}$$

κι επειδή $r^2 = \alpha^2 + x^2$ προκύπτει:

$$dF = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o\ell}\frac{dx}{\alpha^2 + x^2}$$

Επειδή η διεύθυνση της dF μεταβάλλεται καθώς μεταβάλλεται η απόσταση x του dQ από την άκρη της ράβδου, αναλύουμε τη dF στις συνιστώσες της

$dF_x = dF\sin\theta$ και $dF_y = dF\cos\theta$. όπου $\cos\theta = \alpha/r$ και $\sin\theta = x/r$.

Επομένως τελικά είναι:

$$dF_x = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o\ell}\frac{xdx}{(\alpha^2 + x^2)^{3/2}} \quad \text{και} \quad dF_y = \frac{qQ\alpha}{4\pi\varepsilon_o\ell}\frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^{3/2}}$$

Άρα:

$$F_x = \int dF_x = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o\ell}\int_0^\ell \frac{xdx}{(\alpha^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o\ell}\left[-\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}\right]_0^\ell \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_x = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o\ell}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \ell^2}}\right)$$

$$F_y = \int dF_y = \frac{qQ\alpha}{4\pi\varepsilon_o\ell}\int_0^\ell \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{qQ\alpha}{4\pi\varepsilon_o\ell}\left[\frac{x}{\alpha^2\sqrt{\alpha^2 + x^2}}\right]_0^\ell \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_y = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_o\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \ell^2}}$$

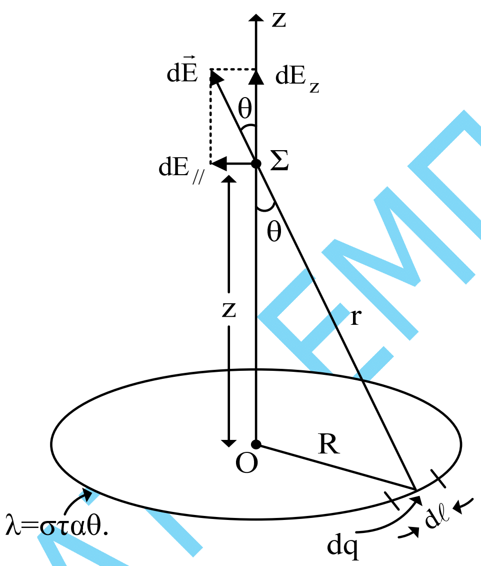
Θέμα 3

Δίνεται κυκλικός δακτύλιος ακτίνας R ομοιόμορφα φορτισμένος με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ.

α) Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ σε ένα σημείο Σ στον άξονα του δακτυλίου που απέχει απόσταση z από το κέντρο του.
β) Αν Q είναι το ολικό φορτίο του δακτυλίου δείξτε ότι σε μεγάλες αποστάσεις το πεδίο μοιάζει με εκείνο σημειακού φορτίου Q στο κέντρο του δακτυλίου.
γ) Σε ποια απόσταση η ένταση του πεδίου γίνεται μέγιστη;

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



α) Έστω ένα στοιχειώδες φορτίο dq στην περιφέρεια του δακτυλίου που έχει πλάτος $d\ell$ και απέχει απόσταση r από το σημείο Σ. Η στοιχειώδης ένταση που προκαλεί στο σημείο Σ έχει μέτρο :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά $dq = \lambda d\ell$ οπότε η **(1)** γίνεται :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r^2}d\ell \qquad \textbf{(2)}$$

Επειδή όπως παρατηρείται οι στοιχειώδεις εντάσεις $d\vec{E}$ από κάθε dq του δακτυλίου αλλάζουν κατεύθυνση στο χώρο, αναλύοντας την dE στις δυο κάθετες συνιστώσες της dE_z και $dE_{//}$ προκύπτει ότι λόγω συμμετρίας οι οριζόντιες συνιστώσες $dE_{//}$ αλληλοαναιρούνται. Άρα το ηλεκτρικό πεδίο κείται στον άξονα z και είναι :

$$dE_z = dE\cos\theta \overset{(2)}{\Rightarrow} dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r^2}d\ell\cos\theta \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά : cosθ=z/r και $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ οπότε η **(3)** γίνεται :

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r^2}d\ell\frac{z}{r} = \frac{\lambda z}{4\pi\varepsilon_o r^3}d\ell \Rightarrow dE_z = \frac{\lambda z}{4\pi\varepsilon_o(R^2+z^2)^{3/2}}d\ell \qquad \textbf{(4)}$$

Συνεπώς ολοκληρώνοντας όλες τις dE_z προκύπτει το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο Σ:

$$E_\Sigma = \int dE_z = \frac{\lambda z}{4\pi\varepsilon_o(R^2+z^2)^{3/2}}\oint_c d\ell = \frac{\lambda z}{4\pi\varepsilon_o(R^2+z^2)^{3/2}}2\pi R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_\Sigma = \frac{\lambda z R}{2\varepsilon_o(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{z} \qquad \textbf{(5)}$$

β) Σε μεγάλες αποστάσεις, δηλαδή για z>>R είναι $R^2+z^2 \cong z^2$ ή $(R^2+z^2)^{3/2} \cong z^3$.

Οπότε η **(5)** δίνει: $E_\Sigma = \frac{\lambda z R}{2\varepsilon_o z^3} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_o z^2}$ **(6)**

Επίσης η ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου του δακτυλίου είναι : $\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$, όπου Q το ολικό φορτίο του δακτυλίου.

Άρα η **(6)** γίνεται : $E_\Sigma = \frac{QR}{2\pi R 2\varepsilon_o z^2} \Rightarrow E_\Sigma = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o z^2}$ **(7)**

Δηλαδή πράγματι σε μεγάλες αποστάσεις το πεδίο προσομοιάζει με εκείνο σημειακού φορτίου Q στο κέντρο του δακτυλίου.

γ) Για να βρεθεί η απόσταση z στην οποία η ένταση του πεδίου γίνεται μέγιστη αρκεί να προσδιοριστεί το μέγιστο της συνάρτησης $E_\Sigma(z)$, που δίνεται από τη σχέση **(5)**. Δηλαδή :

$$\frac{dE_\Sigma}{dz} = 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{\lambda R}{2\varepsilon_o}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1(R^2+z^2)^{3/2} - z\frac{3}{2}(R^2+z^2)^{1/2}2z}{(R^2+z^2)^3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R^2+z^2)^{3/2} - 3z^2(R^2+z^2)^{1/2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R^2+z^2)^{1/2}\left[(R^2+z^2)-3z^2\right] = 0 \Rightarrow R^2-2z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = R^2/2 \Rightarrow z = R/\sqrt{2}$$

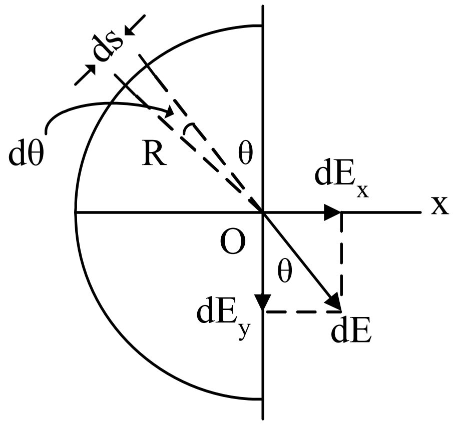
Κι επειδή η δεύτερη παράγωγος d^2E_Σ/dz^2 στο σημείο $z = R/\sqrt{2}$ είναι αρνητική, η απόσταση αυτή του z αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της E_Σ.

Θέμα 4

Φορτίο Q είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα κατά μήκος ενός ημικυκλικού βρόχου ακτίνας R. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο του ημικυκλικού βρόχου.

(Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο O από στοιχειώδες φορτίο dq του βρόχου έχει μέτρο:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{R^2}$$

Αλλά: $dq = \lambda ds = \lambda R d\theta$ και $\lambda = Q/\pi R$ οπότε:

$$dE = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_o R^2}d\theta \qquad \textbf{(1)}$$

Λόγω συμμετρίας παρατηρείται ότι οι y συνιστώσες του πεδίου που οφείλονται σε κάθε στοιχειώδες φορτίο dq αλληλοαναιρούνται, έτσι ώστε το ολικό πεδίο να κείται στη διεύθυνση x. Πράγματι :

$$E_x = \int dE_x = \int dE \sin\theta \overset{(1)}{=} \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_o R^2}\int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_o R^2}[-\cos\theta]_0^\pi =$$

$$= \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_o R^2}(1+1) \Rightarrow E_x = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_o R^2}$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE \cos\theta \overset{(1)}{=} \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_o R^2}\int_0^\pi \cos\theta d\theta = \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_o R^2}[-\sin\theta]_0^\pi =$$

$$= \frac{Q}{4\pi^2\varepsilon_o R^2}(0-0) \Rightarrow E_y = 0$$

Θέμα 5

Κύλινδρος ακτίνας R και απείρου μήκους είναι ομοιόμορφα θετικά φορτισμένος με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ. Ο άξονας του κυλίνδρου ταυτίζεται με τον άξονα z. Να υπολογιστούν :

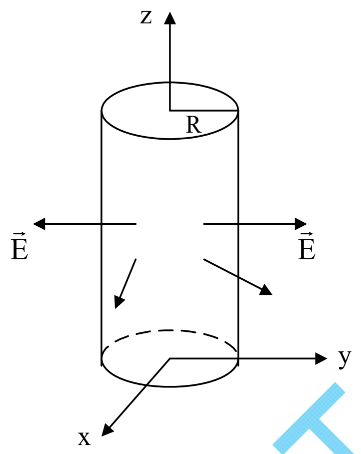
α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου.

β) Οι συνιστώσες E_x, E_y, E_z της έντασης του πεδίου στο εσωτερικό του κυλίνδρου.

γ) Να επαληθευτεί ότι η απόκλιση του πεδίου στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_o$.

(Σχολή Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας και απείρου μήκους της κατανομής, η ένταση έχει ακτινική διεύθυνση (κείται στο επίπεδο xy) και σταθερό μέτρο σε σημεία που ισαπέχουν από τον άξονα του κυλίνδρου. Επιλέγοντας ως επιφάνεια Gauss κύλινδρο ακτίνας r και μήκους ℓ, ηλεκτρική ροή εξέρχεται μόνο από την παράπλευρη επιφάνειά του. Συνεπώς ο νόμος του Gauss δίνει για το εσωτερικό και εξωτερικό του κυλίνδρου :

Για r<R:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_V \rho dV \Rightarrow E_{\varepsilon\sigma}2\pi r\ell = \frac{\rho}{\varepsilon_o}\pi r^2\ell \Rightarrow$$

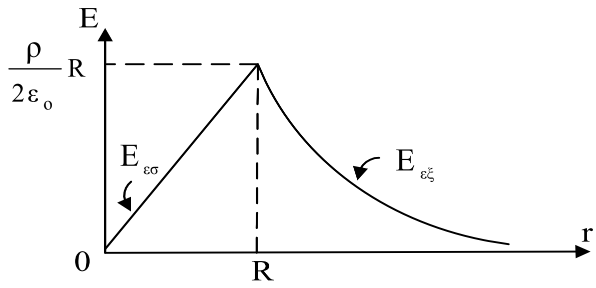
$$\Rightarrow E_{\varepsilon\sigma} = \frac{\rho}{2\varepsilon_o}r \quad \text{ή διανυσματικά} \quad \vec{E}_{\varepsilon\sigma} = \frac{\rho}{2\varepsilon_o}r\hat{r}$$

Για r>R :

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_V \rho dV \Rightarrow E_{\varepsilon\xi}2\pi r\ell = \frac{\rho}{\varepsilon_o}\pi R^2\ell \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\varepsilon\xi} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o r} \quad \text{ή διανυσματικά} \quad \vec{E}_{\varepsilon\xi} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o r}\hat{r}$$

Η εξάρτηση της έντασης $\vec{E}$ με την απόσταση r από τον άξονα του κυλίνδρου φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα :



β) Στο εσωτερικό του κυλίνδρου υπολογίστηκε ότι : $\vec{E}_{\varepsilon\sigma} = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_o} r\hat{r} = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_o}\vec{r}$

Επειδή όμως όπως αναφέρθηκε λόγω συμμετρίας η ένταση $\vec{E}$ κείται στο επίπεδο xy είναι $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$, οπότε : $\vec{E}_{\varepsilon\sigma} = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_o}(x\hat{x} + y\hat{y})$

Άρα : $E_x = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_o}x$, $E_y = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_o}y$ και $E_z = 0$

γ) Η απόκλιση του $\vec{E}_{\varepsilon\sigma}$ είναι :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{\varepsilon\sigma} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} + \frac{\rho}{2\varepsilon_o} + 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{\varepsilon\sigma} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

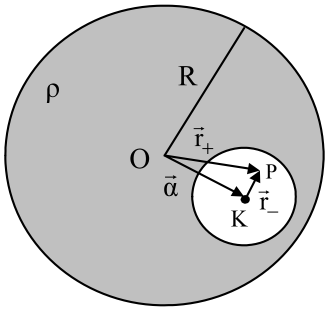
Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με τη διαφορική μορφή του νόμου του Gauss.

Θέμα 6

Σφαίρα ακτίνας R με κέντρο στο O είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με πυκνότητα φορτίου ρ και έχει αφόρτιστη σφαιρική οπή, της οποίας το κέντρο βρίσκεται σε απόσταση $\vec{\alpha}$ από το O. Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό της οπής.

(Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο P της σφαιρικής οπής προκύπτει ως η επαλληλία των εντάσεων συμπαγούς σφαίρας χωρίς οπή που χαρακτηρίζεται από πυκνότητα φορτίου ρ($\vec{E}_+$) και της σφαιρικής οπής σαν να ήταν φορτισμένη με πυκνότητα φορτίου -ρ($\vec{E}_-$).Δηλαδή :

$$\vec{E}_P = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \quad \textbf{(1)}$$

Αλλά όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, η ένταση στο εσωτερικό ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας είναι : $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o} r\hat{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{r}$

Άρα εδώ είναι : $\vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{r}_+$ και $\vec{E}_- = \frac{-\rho}{3\varepsilon_o}\vec{r}_-$

Επομένως η **(1)** γίνεται : $\vec{E}_P = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{r}_+ + \frac{(-\rho)}{3\varepsilon_o}\vec{r}_- \Rightarrow \vec{E}_P = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$

Αλλά από τη διανυσματική άθροιση ισχύει : $\vec{\alpha} + \vec{r}_- = \vec{r}_+ \Rightarrow \vec{r}_+ - \vec{r}_- = \vec{\alpha}$

Άρα τελικά : $\vec{E}_P = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\vec{\alpha}$

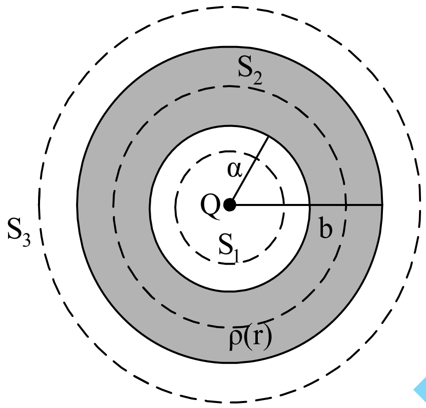
Δηλαδή η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίδια για κάθε σημείο της σφαιρικής οπής (ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μέσα στην οπή).

Θέμα 7

Ένας σφαιρικός φλοιός εσωτερικής ακτίνας α και εξωτερικής ακτίνας b είναι φορτισμένος με χωρική πυκνότητα φορτίου $\rho(r) = k/r$ (για $\alpha<r<b$), όπου r η απόσταση από το κέντρο και k σταθερά. Στο κέντρο του φλοιού υπάρχει σημειακό φορτίο Q. Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου.

(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Λόγω σφαιρικής συμμετρίας της κατανομής φορτίου η ένταση $\vec{E}$ έχει ακτινική διεύθυνση. Επιλέγοντας σφαιρική επιφάνεια Gauss κι εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss στις τρεις ακόλουθες περιοχές του χώρου προκύπτει :

Για r<α : $\oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{q_{encl}}{\varepsilon_o} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_1 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \boxed{E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}}$$

Όπως φαίνεται για r<α το περικλειόμενο φορτίο από την επιφάνεια Gauss είναι μόνο το σημειακό φορτίο Q.

Για α < r < b : $\oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{q_{encl}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_2 4\pi r^2 = \dfrac{q_{encl}}{\varepsilon_o}$ **(1)**

Το ολικό φορτίο που περικλείει η επιφάνεια Gauss S_2 ισούται με το άθροισμα του σημειακού φορτίου Q και του φορτίου του φλοιού μέχρι ακτίνας $\alpha<r<b$. Δηλαδή :

$$q_{encl} = Q + \int_V \rho dV, \quad \text{όπου } \rho = k/r \text{ και για σφαιρική κατανομή } dV = 4\pi r^2 dr$$

Οπότε : $$q_{encl} = Q + 4\pi k\int_\alpha^r r dr = Q + 2\pi k(r^2 - \alpha^2)$$

Άρα η **(1)** δίνει τελικά :

$$\boxed{E_2 = \frac{Q + 2\pi k(r^2 - \alpha^2)}{4\pi\varepsilon_o r^2}}$$

Για r > b : $\oint_{S_3} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_3 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_o}\left[Q + 4\pi k\int_{\alpha}^{b} r dr\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{E_3 = \frac{Q + 2\pi k(b^2 - \alpha^2)}{4\pi\varepsilon_o r^2}}$$

Θέμα 8

Κύβος ακμής α καταλαμβάνει το χώρο : $0 \le x \le \alpha$, $0 \le y \le \alpha$, $0 \le z \le \alpha$ (α>0).

Στο χώρο αυτό υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = c(x-\alpha)^2\hat{x}$, όπου c θετική σταθερά.

Να υπολογιστούν :

α) Η χωρική πυκνότητα φορτίου ρ στην περιοχή.

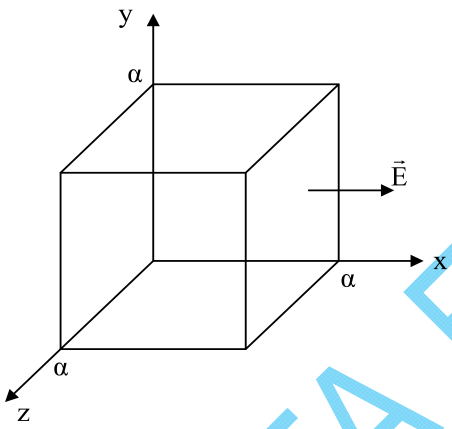
β) Το ολικό φορτίο που υπάρχει μέσα στον κύβο.

γ) Η ηλεκτρική ροή μέσα από την επιφάνεια του κύβου.

δ) Εξετάστε αν το πεδίο αυτό είναι ηλεκτροστατικό.

(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Σύμφωνα με τη διαφορική μορφή του νόμου του Gauss είναι :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_o \Rightarrow \rho = \varepsilon_o\vec{\nabla}\cdot\vec{E} =$$

$$= \varepsilon_o\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) =$$

$$= \varepsilon_o[2c(x-\alpha)+0+0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = 2\varepsilon_o c(x-\alpha) \qquad \textbf{(1)}$$

β) Το ολικό φορτίο που περικλείει ο κύβος του σχήματος θα υπολογιστεί μέσω της πυκνότητας φορτίου. Δηλαδή :

$\rho = \dfrac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho dV \Rightarrow q = \int_V \rho dV$, όπου η ολοκλήρωση λαμβάνει χώρα σε όλο τον όγκο του κύβου κι επειδή $\rho = \rho(x)$ και $dV = dxdydz$ ανάγεται στο τριπλό ολοκλήρωμα :

$$q = 2\varepsilon_o c\int_0^\alpha (x-\alpha)dx\int_0^\alpha dy\int_0^\alpha dz = 2\varepsilon_o c\alpha^2\int_0^\alpha (x-\alpha)dx \Rightarrow q = -\varepsilon_o c\alpha^4 \qquad \textbf{(2)}$$

γ) Η ηλεκτρική ροή είναι σύμφωνα με το νόμο Gauss:

$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_o} \overset{(2)}{\Rightarrow} \Phi_E = -c\alpha^4$$

δ) Για να είναι το πεδίο αυτό $\vec{E}$ ηλεκτροστατικό πρέπει να είναι αστρόβιλο (δηλ. $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$). Είναι :

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ c(x-\alpha)^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\hat{x}\cdot 0+\hat{y}\frac{\partial}{\partial z}c(x-\alpha)^2-\hat{z}\frac{\partial}{\partial y}c(x-\alpha)^2=0$$

Άρα το πεδίο $\vec{E}$ είναι συντηρητικό, δηλαδή ηλεκτροστατικό.

Θέμα 9

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάποια περιοχή του χώρου δίνεται από τη συνάρτηση :
$V(x, y) = -A(x^3 + 3y)$, όπου A σταθερά.

α) Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

β) Να υπολογιστεί η χωρική πυκνότητα ρ της κατανομής του φορτίου στην οποία οφείλεται αυτό το πεδίο.

(Σχολή Χημικών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου απορρέει από το ηλεκτρικό δυναμικό έτσι ώστε :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\right) = -(-3Ax^2\hat{x} - 3A\hat{y} + 0\hat{z}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = 3Ax^2\hat{x} + 3A\hat{y}$$

β) Από τη διαφορική μορφή του νόμου Gauss προκύπτει :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_o \Rightarrow \rho = \varepsilon_o\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varepsilon_o\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) = \varepsilon_o(6Ax + 0) \Rightarrow \rho = 6A\varepsilon_o x$$

Θέμα 10

Η συνάρτηση δυναμικού ενός ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τη σχέση :
$V(x,y) = k(x^2 - y^2)$, όπου k σταθερά
Να υπολογιστούν :

α) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ σε τυχαίο σημείο του χώρου.
β) Η χωρική πυκνότητα φορτίου ρ σε τυχαία θέση.
γ) Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης για μετακίνηση ενός φορτίου q από τη θέση A(1,1) μέχρι τη θέση B(3,4).

(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Είναι : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\right) = -(2kx\hat{x} - 2ky\hat{y} + 0\hat{z}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{E} = -2kx\hat{x} + 2ky\hat{y} \qquad \textbf{(1)}$$

β) Η χωρική πυκνότητα φορτίου είναι σύμφωνα με τη διαφορική μορφή του νόμου Gauss :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_o \Rightarrow \rho = \varepsilon_o\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varepsilon_o\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \varepsilon_o(-2k + 2k + 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = 0$$

Δηλαδή το δυναμικό αυτό επικρατεί σε περιοχή ελεύθερη φορτίων.

γ) Η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο φορτίο q είναι :

$$\vec{F} = q\vec{E} \overset{(1)}{=} -2kq(x\hat{x} - y\hat{y}) \qquad \textbf{(2)}$$

Οπότε το έργο για τη μετακίνηση του φορτίου από το σημείο Α στο Β είναι :

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{(2)}{=} -2kq\int_{(1,1)}^{(3,4)}(x\hat{x} - y\hat{y})\cdot(dx\hat{x} + dy\hat{y}) = -2kq\left[\int_1^3 x dx - \int_1^4 y dy\right] =$$

$$= -2kq\left(\frac{9-1}{2} - \frac{16-1}{2}\right) \Rightarrow W_{AB} = 7kq$$

ή $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = q[V_A - V_B] = q[k(1-1) - k(9-16)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow W_{AB} = 7kq$$

Θέμα 11

Έστω το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = \frac{E_o}{\alpha}(x-y)\hat{x} - \frac{E_o}{\alpha}(x+y)\hat{y}$

α) Να υπολογιστεί η πυκνότητα φορτίου στο χώρο.

β) Να υπολογιστεί η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού V(x,y,z), λαμβάνοντας ως σημείο αναφοράς δυναμικού το σημείο O(0,0,0).

(Σχολή Ναυπηγών Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση

α) Από τη διαφορική μορφή του νόμου Gauss προκύπτει :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_o \Rightarrow \rho = \varepsilon_o\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varepsilon_o\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}\right) = \varepsilon_o\left(\frac{E_o}{\alpha} - \frac{E_o}{\alpha}\right) \Rightarrow \rho = 0$$

Δηλαδή η ένταση του ηλεκτρικού αυτού πεδίου περιγράφει χώρο κενό φορτίων.

β) Από τη σχέση **(2 – 6)** που συνδέει την ένταση με το δυναμικό προκύπτει :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow \frac{E_o}{\alpha}(x-y)\hat{x} - \frac{E_o}{\alpha}(x+y)\hat{y} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{E_o}{\alpha}(x-y) & \textbf{(1)} \\[2ex] -\dfrac{\partial V}{\partial y} = -\dfrac{E_o}{\alpha}(x+y) & \textbf{(2)} \end{cases}$$

Ολοκληρώνοντας την **(1)** ως προς x κρατώντας το y σταθερό προκύπτει :

$$-\int dV = \frac{E_o}{\alpha}\int (x-y)dx \Rightarrow -V = \frac{E_o}{\alpha}\left(\frac{x^2}{2} - xy\right) + c(y) \qquad \textbf{(3)}$$

όπου η σταθερά ολοκληρώνοντας c(y) είναι συνάρτηση της μεταβλητής y.
Παραγωγίζοντας μερικά την **(3)** ως προς y προκύπτει:

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{E_o}{\alpha}x + \frac{\partial c(y)}{\partial y} \overset{(2)}{=} -\frac{E_o}{\alpha}(x+y) \Rightarrow \frac{\partial c(y)}{\partial y} = -\frac{E_o}{\alpha}y \Rightarrow$$

$$c(y) = -\frac{E_o}{\alpha}\int y\,dy \Rightarrow c(y) = -\frac{E_o}{\alpha}\frac{y^2}{2} + c \qquad \text{(όπου c σταθερά)} \qquad \textbf{(4)}$$

Συνεπώς η **(3)** λόγω της **(4)** δίνει τη συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού :

$$-V = \frac{E_o}{\alpha}\left(\frac{x^2}{2} - xy\right) - \frac{E_o}{\alpha}\frac{y^2}{2} + c \Rightarrow V = \frac{E_o}{\alpha}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + xy\right) + c$$

Αλλά επειδή στο σημείο (0,0) είναι V(0,0) = 0 από την παραπάνω φαίνεται ότι η τιμή της σταθεράς c είναι c=0. Άρα τελικά η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού είναι :

$$V(x,y) = \frac{E_o}{\alpha}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + xy\right)$$

Θέμα 12

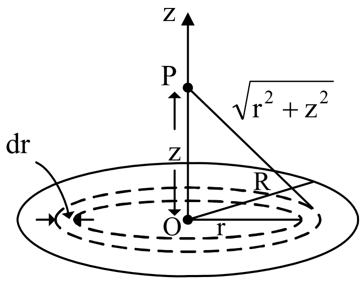
Λεπτός κυκλικός δίσκος ακτίνας R και κέντρο στο O είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ. Να υπολογιστούν :

α) Το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P του άξονα του δίσκου, που απέχει από-σταση z από το κέντρο του.

β) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο ίδιο σημείο και ποιο το αποτέλεσμα αν $R \to \infty$.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



α) Θεωρούμε ένα στοιχειώδες φορτίο dq του δίσκου σε μορφή κυκλικού δακτυλίου ακτίνας r και εύρους dr. Επειδή κάθε σημείο του δακτυλίου αυτού απέχει την ίδια απόσταση $\sqrt{r^2+z^2}$ από το σημείο P, το δυναμικό που προκαλεί στο σημείο P είναι :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{\sqrt{r^2+z^2}} \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά το φορτίο του δακτυλίου είναι : $dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$ οπότε η **(1)** γίνεται :

$$dV = \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_o\sqrt{r^2+z^2}} \Rightarrow dV = \frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_o\sqrt{r^2+z^2}} \qquad \textbf{(2)}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση **(2)** σε όλο το δίσκο προκύπτει το δυναμικό του δίσκου στο σημείο P ως :

$$V_P = \int dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[\sqrt{r^2+z^2}\right]_0^R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_P = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[\sqrt{R^2+z^2} - z\right] \qquad \textbf{(3)}$$

β) Επειδή το δυναμικό V είναι συνάρτηση μόνο του z, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P είναι :

$$\vec{E}_P = -\frac{dV_P}{dz}\hat{z} \overset{(3)}{=} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[\frac{2z}{2\sqrt{R^2+z^2}} - 1\right]\hat{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E}_P = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\hat{z} \qquad \textbf{(4)}$$

Στην περίπτωση που $R \to \infty$, δηλαδή για άπειρο φορτισμένο επίπεδο, ο όρος της σχέσης **(4)** $\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \to 0$, οπότε η σχέση αυτή δίνει :

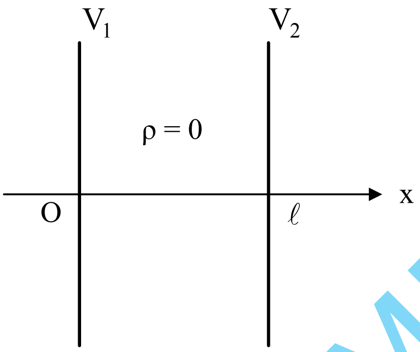
$$\vec{E}_P = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\hat{z}$$

Θέμα 13

Δυο παράλληλες άπειρες μεταλλικές πλάκες, που απέχουν απόσταση ℓ μεταξύ τους είναι κάθετες στον άξονα x και διατηρούνται σε δυναμικό V_1 και V_2 αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το δυναμικό V(x) στο χώρο μεταξύ των πλακών καθώς και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, αν στο χώρο μεταξύ των πλακών δεν υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία.

(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση



Επειδή ο χώρος μεταξύ των πλακών δεν περιέχει φορτία, δηλαδή ρ = 0, ισχύει η εξίσωση Laplace **(2 – 12)** :

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Λόγω επίπεδης συμμετρίας το δυναμικό μεταβάλλεται μόνο συναρτήσει του x, οπότε η παραπάνω ανάγεται στην :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right) = 0 \Rightarrow \int d\left(\frac{dV}{dx}\right) = \int 0dx \Rightarrow$$

$$\frac{dV}{dx} = c_1 \Rightarrow \int dV = c_1 \int dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = c_1 x + c_2 \qquad \textbf{(1)}$$

όπου c_1 , c_2 σταθερές οι οποίες υπολογίζονται από τις οριακές συνθήκες.

Δηλαδή για $x = 0$ είναι $V = V_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} V_1 = c_1 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = V_1$ **(2)**

Για $x = \ell$ είναι $V = V_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} V_2 = c_1 \ell + c_2 \overset{(2)}{\Rightarrow} c_1 = \dfrac{V_2 - V_1}{\ell}$

Άρα : $V(x) = \dfrac{V_2 - V_1}{\ell} x + V_1$ για $0 \le x \le \ell$

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{dV}{dx}\hat{x} \Rightarrow \vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{\ell}\hat{x}$$

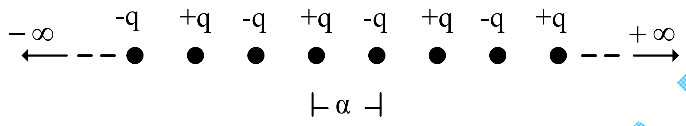
Θέμα 14

Έστω σύστημα απείρων φορτίων +q και -q τοποθετημένων εναλλάξ σε σταθερή απόσταση α. Να υπολογιστεί η ηλεκτροστατική ενέργεια ενός θετικού φορτίου +q. Δίνεται το ανάπτυγμα :

$$\ell n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

(Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π.)

Λύση



Η ηλεκτροστατική ενέργεια ενός θετικού φορτίου q της άπειρης διάταξης είναι :

$$U = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\frac{q(-q)}{\alpha} + \frac{qq}{2\alpha} + \frac{q(-q)}{3\alpha} + \ldots\right] = \frac{-q^2}{2\pi\varepsilon_o \alpha}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\right)$$

όπου ο παράγοντας 2 εκφράζει την άπειρη έκταση του πλέγματος και προς τις δυο κατευθύνσεις. Αλλά για x = 1 από το ανάπτυγμα που δίνεται προκύπτει:

$$\ell n(1+1) = \ell n 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$$

Άρα : $U = \dfrac{-q^2}{2\pi\varepsilon_o \alpha}\ell n 2$

Θέμα 15

Ένας σφαιρικός αγωγός εσωτερικής ακτίνας α και εξωτερικής b είναι φορτισμένος με ηλεκτρικό φορτίο Q, ενώ στο κέντρο του σφαιρικού αγωγού έχει τοποθετηθεί σημειακό ηλεκτρικό φορτίο q. Να υπολογιστούν :

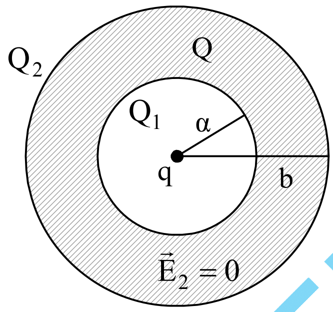
α) Η τελική κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου Q στο σφαιρικό αγώγιμο φλοιό.

β) Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παντού στο χώρο.

γ) Το ηλεκτρικό δυναμικό παντού στο χώρο.

(Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.)

Λύση



α) Το φορτίο Q με το οποίο είναι φορτισμένος ο σφαιρικός αγωγός θα κατανεμηθεί στην εσωτερική επιφάνεια Q_1 και στην εξωτερική επιφάνεια Q_2 , έτσι ώστε στο εσωτερικό του αγωγού η ένταση να είναι μηδέν, δηλαδή $\vec{E}_2 = 0$.

Σημειώνεται ότι λόγω σφαιρικής συμμετρίας του προβλήματος τα φορτία Q_1, Q_2 είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στις επιφάνειες του αγώγιμου φλοιού.

Λόγω της αρχής διατήρησης του φορτίου θα ισχύει :

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad \textbf{(1)}$$

Θεωρώντας σφαιρική επιφάνεια S_1 με ακτίνα $\alpha < r < b$ κι επειδή τα σημεία της επιφάνειας αυτής έχουν μηδενική ένταση, ο νόμος του Gauss δίνει:

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_o} \Rightarrow 0 = \frac{q + Q_1}{\varepsilon_o} \Rightarrow \boxed{Q_1 = -q}$$

και λόγω της **(1)** : $Q_2 = Q - Q_1 \Rightarrow \boxed{Q_2 = Q + q}$

β) Η ένταση $\vec{E}$ υπολογίζεται μέσω του νόμου Gauss :

Για $r \le \alpha$: $\oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_1 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2}\hat{r}$ **(2)**

Για $\alpha < r \le b$: Σύμφωνα με τη βασική ιδιότητα των αγωγών είναι :

$$\vec{E}_2 = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Για $r > b$: $\oint_{S_3} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{encl}}{\varepsilon_o} \Rightarrow E_3 4\pi r^2 = \frac{q+Q_1+Q_2}{\varepsilon_o} \overset{(1)}{=} \frac{q+Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{(q+Q)}{r^2}\hat{r} \qquad \textbf{(4)}$$

γ) Θεωρώντας ως σημείο αναφοράς το άπειρο ($V_\infty = 0$), το ηλεκτρικό δυναμικό θα υπολογιστεί από τη σχέση :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{r} \Rightarrow \int_0^V dV = -\int_\infty^r \vec{E}dr\,\hat{r} \Rightarrow V = -\int_\infty^r Edr$$

Επομένως :

Για $r > b$: $V_3 = -\int_\infty^r E_3 dr \overset{(4)}{=} -\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_\infty^r \frac{dr}{r^2} \Rightarrow V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q+Q}{r}$

Για $\alpha < r \le b$: $V_2 = -\int_\infty^r Edr = -\int_\infty^b E_3 dr - \int_b^r E_2 dr \overset{(3),(4)}{=} -\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_\infty^b \frac{dr}{r^2} - 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q+Q}{b} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Για $r < \alpha$: $V_1 = -\int_\infty^r Edr = -\int_\infty^b E_3 dr - \int_b^\alpha E_2 dr - \int_\alpha^r E_1 dr \overset{(2),(3),(4)}{=}$

$$= -\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_\infty^b \frac{dr}{r^2} - 0 - \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\int_\alpha^r \frac{dr}{r^2} \Rightarrow V_1 = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_o b} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

Θέμα 16

Να αποδειχθεί ότι οι οπλισμοί ενός πυκνωτή με επίπεδες και παράλληλες πλάκες εμβαδού S και απόστασης d, έλκονται μεταξύ τους με δύναμη : $F = q^2/2\varepsilon_o S$.
Επίσης να δειχθεί ότι η πίεση που ασκείται είναι ίση με την πυκνότητα ενέργειας στο πεδίο.
(Τμήμα Φυσικής Ε.Κ.Π.Α.)

Λύση

Αν υποτεθεί ότι η απόσταση d μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή αυξηθεί κατά dx, τότε το έργο που απαιτείται για την μετακίνηση των οπλισμών είναι :

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{x} = Fdx \qquad \textbf{(1)}$$

όπου $\vec{F}$ η δύναμη μεταξύ των οπλισμών.
Το έργο αυτό πρέπει να ισούται με τη μεταβολή της ηλεκτροστατικής ενέργειας του πυκνωτή και αυτή είναι :

$$dU = \frac{\varepsilon_o}{2}E^2 dV = \frac{\varepsilon_o}{2}E^2 Sdx \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $dV = Sdx$ ο στοιχειώδης όγκος μεταξύ των οπλισμών κατά τη μετακίνησή τους.
Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει :

$$Fdx = \frac{\varepsilon_o}{2}E^2 Sdx \Rightarrow F = \frac{\varepsilon_o}{2}E^2 S \qquad \textbf{(3)}$$

Για έναν επίπεδο πυκνωτή όμως ο νόμος του Gauss δίνει :

$$\Phi_E = ES = \frac{q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_o S} \qquad \textbf{(4)}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση **(3)** της **(4)** υπολογίζεται η ζητούμενη δύναμη :

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_o S}$$

Η πίεση που ασκείται είναι :

$$P = \frac{F}{S} \overset{(3)}{=} \frac{\varepsilon_o}{2}E^2 = \frac{dU}{dV} = u_E$$

όπου $u_E = \dfrac{dU}{dV} = \dfrac{\varepsilon_o}{2}E^2$ η πυκνότητα ενέργειας του πεδίου.

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ **6932 946778**
www.pmoiras.weebly.com