ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΚΥΜΑΤΑ ΣΕ 2 & 3 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

EMC²

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΘΕΜΑ 1

Η κυματοσυνάρτηση οδεύοντος κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$\Psi_{(x,y,z,t)} = \Psi_o \cos[3\pi\cdot 10^6 t + 60\pi(\sqrt{8}x + 2y - 4z) + \varphi]$$

Να προσδιοριστούν η συχνότητα, η κατεύθυνση διάδοσης, το μήκος κύματος και η φασική ταχύτητα του κύματος.

Λύση

Από τη γενική μορφή του τρισδιάστατου αυτού κύματος είναι:

$$\Psi_{(x,y,z,t)} = \Psi_o \cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) =$$

$$= \Psi_o \cos(3\pi 10^6 t + 60\sqrt{8}\pi x + 120\pi y - 240\pi z)$$

Επομένως από την παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\omega = 3\cdot 10^6 \pi \Rightarrow 2\pi\nu = 3\cdot 10^6 \pi \Rightarrow \nu = \frac{3}{2}\cdot 10^6\,\text{Hz} = 15\cdot 10^5\,\text{Hz}$$

και $k_x = -60\sqrt{8}\pi$, $k_y = -120\pi$, $k_z = 240\pi$

Η κατεύθυνση διάδοσης του κύματος καθορίζεται από το κυματοδιάνυσμα $\vec{k}$, δηλαδή είναι η κατεύθυνση του $\vec{k}$, το οποίο είναι:

$$\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z} \Rightarrow \vec{k} = -60\sqrt{8}\pi\hat{x} - 120\pi\hat{y} + 240\pi\hat{z}$$

Το μήκος κύματος είναι:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{28800\pi^2 + 14400\pi^2 + 57600\pi^2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{100800}\pi} = \frac{2}{317{,}5} \Rightarrow \lambda = 0{,}0063\text{m} = 6{,}3\cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

Ενώ η φασική ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \lambda\nu = 6{,}3\cdot 10^{-3}\cdot 15\cdot 10^5 \Rightarrow \upsilon = 9{,}45\cdot 10^3\,\text{m/sec}$$

ΘΕΜΑ 2

Να δείξετε ότι η εξίσωση Klein – Gordon στον τρισδιάστατο χώρο:

$\nabla^2\Psi(\vec{r},t) - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\Psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = n^2\Psi(\vec{r},t)$, όπου u, n πραγματικές σταθερές

επιδέχεται σα λύσεις τις:

$\Psi(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$ αν $\omega^2 = \omega_o^2 + \upsilon^2 k^2 > \omega_o^2$

και $\Psi(\vec{r},t) = Ae^{\vec{k}\cdot\vec{r}}\cos(\omega t + \varphi)$ αν $\omega^2 = \omega_o^2 - \upsilon^2 k^2 < \omega_o^2$

Δίνεται ότι Α και φ είναι σταθερές και $\omega_o = n\upsilon$.

Λύση

Θέτοντας :

$$\Psi(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi) = A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi) \qquad \textbf{(1)}$$

επειδή $\vec{k}\cdot\vec{r} = (k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z})\cdot(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = k_x x + k_y y + k_z z$ είναι:

$$\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} =$$

$$= -k_x^2 A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi) - k_y^2 A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi) -$$

$$- k_z^2 A\cos(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z + \varphi) = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla^2\Psi = -k^2\Psi \qquad \textbf{(2)}$$

και $$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi) = -\omega^2\Psi \qquad \textbf{(3)}$$

Αντικαθιστώντας τις **(2)**, **(3)** στη δοθείσα εξίσωση Klein-Gordon προκύπτει:

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = n^2\Psi \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} -k^2\Psi + \frac{1}{\upsilon^2}\omega^2\Psi = n^2\Psi \Rightarrow$$

$$-k^2+\frac{\omega^2}{\upsilon^2}=n^2 \overset{(n=\omega_o/\upsilon)}{\Rightarrow} -k^2+\frac{\omega^2}{\upsilon^2}=\frac{\omega_o^2}{\upsilon^2}\Rightarrow \omega^2=\omega_o^2+\upsilon^2k^2>\omega_o^2 \qquad \textbf{(4)}$$

Άρα η εξίσωση Klein-Gordon επιδέχεται ως λύση την **(1)** αν ισχύει η **(4)**.

Ομοίως θέτοντας :

$$\Psi(\vec{r},t)=Ae^{\vec{k}\cdot\vec{r}}\cos(\omega t+\varphi)=Ae^{k_x x+k_y y+k_z z}\cos(\omega t+\varphi) \qquad \textbf{(5)}$$

Είναι:

$$\nabla^2\Psi=\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=$$

$$k_x^2Ae^{k_x x+k_y y+k_z z}\cos(\omega t+\varphi)+k_y^2Ae^{k_x x+k_y y+k_z z}\cos(\omega t+\varphi)+$$

$$+k_z^2Ae^{k_x x+k_y y+k_z z}\cos(\omega t+\varphi)=(k_x^2+k_y^2+k_z^2)Ae^{\vec{k}\cdot\vec{r}}\cos(\omega t+\varphi)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla^2\Psi=k^2\Psi \qquad \textbf{(6)}$$

και $$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-\omega^2Ae^{\vec{k}\cdot\vec{r}}\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2\Psi \qquad \textbf{(7)}$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας τις **(6)**, **(7)** στην εξίσωση Klein-Gordon προκύπτει:

$$\nabla^2\Psi-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=n^2\Psi \overset{(6),(7)}{\Rightarrow} k^2\Psi+\frac{1}{\upsilon^2}\omega^2\Psi=n^2\Psi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2+\frac{\omega^2}{\upsilon^2}=n^2\Rightarrow k^2+\frac{\omega^2}{\upsilon^2}=\frac{\omega_o^2}{\upsilon^2}\Rightarrow \omega^2=\omega_o^2-k^2<\omega_o^2 \qquad \textbf{(8)}$$

Άρα η **(5)** είναι λύση της εξίσωσης Klein-Gordon αν ισχύει η **(8)**.

ΘΕΜΑ 3

Μπορεί να δειχθεί ότι ένα σφαιρικό ισοτροπικό κύμα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2(r\xi)}{\partial r^2}$. Επαληθεύστε ότι η λύση αυτής της εξίσωσης είναι $\xi = (1/r)f(r \pm \upsilon t)$.

Λύση

Είναι: $$\xi = \frac{1}{r} f(r \pm ut) \Rightarrow r\xi = f(r \pm \upsilon t) \quad \textbf{(1)}$$

Θέτοντας $z = r \pm \upsilon t$ είναι $r\xi = f(z)$, οπότε:

$$\frac{\partial(r\xi)}{\partial t} \overset{(1)}{=} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{df}{dz}(\pm\upsilon) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \pm\upsilon\frac{df}{dz} \quad \textbf{(2)}$$

και $$\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \overset{(2)}{=} \pm\upsilon\frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dz}\right) = \pm\upsilon\frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = \pm\upsilon\frac{d^2 f}{dz^2}(\pm\upsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2(r\xi)}{\partial t^2} = \upsilon^2\frac{d^2 f}{dz^2} \quad \textbf{(3)}$$

Επίσης: $$\frac{\partial(r\xi)}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{df}{dz}\cdot 1 = \frac{df}{dz} \quad \textbf{(4)}$$

Και $$\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \overset{(4)}{=} \frac{d}{dr}\left(\frac{df}{dz}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{d^2 f}{dz^2}\cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial^2(r\xi)}{\partial r^2} = \frac{d^2 f}{dz^2} \quad \textbf{(5)}$$

Άρα αντικαθιστώντας τις **(3)** και **(5)** στη δοθείσα διαφορική εξίσωση εύκολα προκύπτει ότι $\upsilon^2 = \upsilon^2$, δηλαδή η $\xi = (1/r)f(r \pm \upsilon t)$ την ικανοποιεί και αποτελεί μια λύση αυτής.

ΘΕΜΑ 4

Δυο γραμμικά πολωμένα, επίπεδα αρμονικά κύματα, που έχουν την ίδια συχνότητα ω, διαδίδονται κατά την κατεύθυνση z με τα επίπεδα πολώσεως κάθετα μεταξύ τους, δηλαδή έχουν τη γενική μορφή:

$$\vec{A}_1 = A_x \cos(\omega t - kz + \varphi_1)\hat{x} = A_1\hat{x}$$

$$\vec{A}_2 = A_y \cos(\omega t - kz + \varphi_2)\hat{y} = A_2\hat{y}$$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση, που ικανοποιούν οι συνιστώσες A_1 και A_2 του συνισταμένου κύματος $\vec{A}$ σε οποιαδήποτε θέση z περιγράφει κωνική τομή.
β) Πότε το συνιστάμενο κύμα είναι γραμμικά πολωμένο, πότε ελλειπτικά και πότε κυκλικά πολωμένο;

Λύση

α) Το συνιστάμενο κύμα είναι:

$$\vec{A}(z,t) = \vec{A}_1(z,t) + \vec{A}_2(z,t) = A_1\hat{x} + A_2\hat{y} \qquad \textbf{(1)}$$

και σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x τέτοια ώστε:

$$\tan\theta = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_y \cos(\omega t - kz + \varphi_2)}{A_x \cos(\omega t - kz + \varphi_1)} =$$

$$= \frac{A_y}{A_x} \cdot \frac{\cos(\omega t - kz)\cos\varphi_2 - \sin(\omega t - kz)\sin\varphi_2}{\cos(\omega t - kz)\cos\varphi_1 - \sin(\omega t - kz)\sin\varphi_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \cdot \frac{\cos\varphi_2 - \tan(\omega t - kz)\sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 - \tan(\omega t - kz)\sin\varphi_1} \qquad \textbf{(2)}$$

Από τη σχέση **(2)** παρατηρείται ότι αν $\varphi_1 \neq \varphi_2$ η tanθ εξαρτάται γενικά από το χρόνο σε δοσμένη θέση, δηλαδή το A(z,t) δεν έχει σταθερή διεύθυνση για δοσμένο z ή δοσμένο t.
Για τον προσδιορισμό της καμπύλης που διαγράφει το A(z,t) σε τυχούσα θέση z, αρκεί να βρεθεί η εξίσωση που ικανοποιούν οι προβολές του A_1 και A_2, οι οποίες μπορούν να γραφούν ως:

$$A_1 = A_x \cos(\omega t - kz + \varphi_1) = A_x \cos(\omega t - kz)\cos\varphi_1 - A_x \sin(\omega t - kz)\sin\varphi_1 \qquad \textbf{(3)}$$

$$A_2 = A_y \cos(\omega t - kz + \varphi_2) = A_y \cos(\omega t - kz)\cos\varphi_2 - A_y \sin(\omega t - kz)\sin\varphi_2 \qquad \textbf{(4)}$$

Αν λυθεί το γραμμικό σύστημα των **(3)** και **(4)** ως προς cos(ωt-kz) και sin(ωt-kz) προκύπτει εύκολα:

$$\cos(\omega t - kz) = \frac{A_x A_2 \sin\varphi_1 - A_y A_1 \sin\varphi_2}{A_x A_y (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)} \quad \textbf{(5)}$$

$$\sin(\omega t - kz) = \frac{A_x A_2 \cos\varphi_1 - A_y A_1 \sin\varphi_2}{A_x A_y (\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)} \quad \textbf{(6)}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις **(5)**, **(6)** και προσθέτοντάς τις κατά μέλη τελικά προκύπτει:

$$A_y^2 A_1^2 + A_x^2 A_2^2 - 2A_x A_y \cos(\varphi_1 - \varphi_2) A_1 A_2 = A_x^2 A_y^2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad \textbf{(7)}$$

Η σχέση **(7)** είναι η ζητούμενη εξίσωση που ικανοποιούν οι συνιστώσες A_1 και A_2 και περιγράφει κωνική τομή. Επειδή τα A_1, A_2 έχουν φραγμένες τιμές η εξίσωση αυτή ανάγεται σε έλλειψη κι επομένως το συνιστάμενο κύμα θα είναι γενικά ελλειπτικά πολωμένο.

β) Αν $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ η σχέση **(2)** δίνει $\tan\theta = A_y / A_x = \sigma\tau\alpha\theta.$, δηλαδή η διεύθυνση θα είναι ανεξάρτητη και του z και του t, οπότε το προκύπτον κύμα $\vec{A}(z,t)$ θα είναι γραμμικά πολωμένο και η στιγμιαία τιμή του συνιστάμενου κύματος θα είναι:

$$A(z,t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}\cos(\omega t - kz + \varphi)$$

Αν $|\varphi_1 - \varphi_2| = \pi/2$ τότε η **(7)** γίνεται:

$$A_y^2 A_1^2 + A_x^2 A_2^2 = A_x^2 A_y^2$$

η οποία παριστάνει εξίσωση έλλειψης με ημιάξονες A_x και A_y παράλληλους αντίστοιχα προς τους άξονες x και y. Αν επιπλέον είναι $A_x = A_y$ τότε προκύπτει κυκλικά πολωμένο κύμα.

ΘΕΜΑ 5

Δείξτε ότι ισχύει η ταυτότητα:

$$\Psi = A\sin k_y y \cos(k_z z - \omega t) = \frac{1}{2} A \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t) - \frac{1}{2} A \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)$$

όπου $\vec{k}_1 = k_z\hat{z} + k_y\hat{y}$ και $\vec{k}_2 = k_z\hat{z} - k_y\hat{y}$.

Η ταυτότητα αυτή είναι η βάση για την περιγραφή ενός οδεύοντος κύματος, που διαδίδεται ζιγκ-ζαγκ μέσα σε ένα κυματοδηγό. Είναι μια απόδειξη του γεγονότος ότι τα τρισδιάστατα οδεύοντα αρμονικά κύματα (ή τα στάσιμα κύματα) σχηματίζουν ένα πλήρες σύνολο συναρτήσεων για την περιγραφή των τρισδιάστατων κυμάτων.

Λύση

Θέτοντας $k_y y = X$, $k_z z = Y$ και ωt = Z και αντικαθιστώντας στη δοθείσα σχέση προκύπτει:

$$\Psi = A\sin k_y y \cos(k_z z - \omega t) = A\sin X \cos(Y - Z) =$$

$$= \frac{A}{2}[\sin(X + Y - Z) + \sin(X - Y + Z)] = \frac{A}{2}[\sin(X + Y - Z) - \sin(Y - X - Z)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Psi = \frac{A}{2}[\sin(k_y y + k_z z - \omega t) - \sin(k_z z - k_y y - \omega t)] \qquad \textbf{(1)}$$

Αλλά: $\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = (k_z\hat{z} + k_y\hat{y}) \cdot (y\hat{y} + z\hat{z}) = k_y y + k_z z$

και $\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = (k_z\hat{z} - k_y\hat{y}) \cdot (y\hat{y} + z\hat{z}) = k_z z - k_y y$

Άρα η **(1)** παίρνει τελικά τη μορφή:

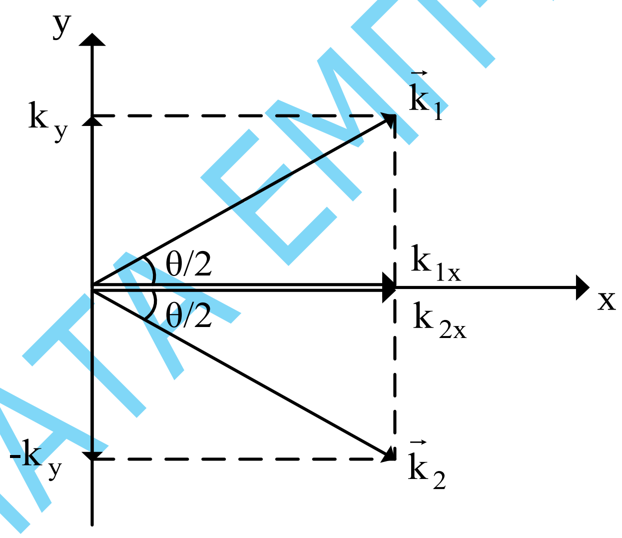
$$\Psi = \frac{A}{2}[\sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t) - \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

ΘΕΜΑ 6

Την επιφάνεια μιας μεμβράνης απείρων διαστάσεων διατρέχουν δυο εγκάρσια αρμονικά κύματα των οποίων οι διευθύνσεις των κυματοδιανυσμάτων $\vec{k}_1$ και $\vec{k}_2$ σχηματίζουν γωνία θ.
α) Αν ο άξονας των x συμπίπτει με τη διχοτόμο της γωνίας θ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στα οποία σχηματίζεται δεσμός κατά τη συμβολή των δυο κυμάτων. Δίνεται ότι $|\vec{k}_1|=|\vec{k}_2|=k=\omega/\upsilon$, όπου ω η κυκλική συχνότητα και υ η ταχύτητα του κύματος στη μεμβράνη και ότι τα πλάτη των δυο κυμάτων είναι ίσα.

β) Στις θέσεις $y_o=\pi/2k_y$ και $y_5=11\pi/2k_y$ τοποθετούνται δυο στερεές ράβδοι και αμελούνται τα τμήματα της μεμβράνης που δεν περιέχονται στο χώρο μεταξύ των δυο ράβδων. Τι περιορισμός υπεισέρχεται στη διάδοση των κυμάτων κατά τη διεύθυνση x;

Λύση



α) Η μορφή των δυο κυμάτων δίνεται από τις σχέσεις:

$$\Psi_1=A\cos(\vec{k}_1\cdot\vec{r}-\omega t)=A\cos(k_x x+k_y y-\omega t)$$

$$\Psi_2=A\cos(\vec{k}_2\cdot\vec{r}-\omega t)=A\cos(k_x x-k_y y-\omega t)$$

όπου $\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}$ και $\vec{k}_1=k_x\hat{x}+k_y\hat{y}$, $\vec{k}_2=k_x\hat{x}-k_y\hat{y}$

Το συνιστάμενο κύμα είναι:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A[\cos(k_x x + k_y y - \omega t) + \cos(k_x x - k_y y - \omega t)] =$$

$$= 2A\cos(k_x x + k_y y - \omega t + k_x x - k_y y - \omega t/2)$$

$$\cos(k_x x + k_y y - \omega t - k_x x + k_y y - \omega t/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Psi = 2A\cos(k_y y)\cos(k_x x - \omega t) \qquad \textbf{(1)}$$

Άρα από την **(1)** παρατηρείται ότι το συνιστάμενο κύμα οδεύει κατά τη διεύθυνση x, δηλαδή στη διχοτόμο της γωνίας που σχηματίζουν οι διευθύνσεις διάδοσης των δυο αρχικών κυμάτων και έχει πλάτος διαμορφωμένο κατά τη διεύθυνση y, δηλαδή είναι στάσιμο κύμα κατά τη διεύθυνση αυτή.

Η ταχύτητα φάσης είναι:

$$\upsilon_x = \frac{\omega}{k_x} = \frac{k\upsilon}{k_x} = \frac{k\upsilon}{k\cos\theta/2} \Rightarrow \upsilon_x = \frac{\upsilon}{\cos\theta/2} > \upsilon \qquad (\text{γιατί } \cos\theta/2 < 1)$$

Οι δεσμοί σχηματίζονται στα σημεία εκείνα για τα οποία το πλάτος $2A\cos(k_y y)$ μηδενίζεται, δηλαδή για τις τιμές του y τέτοιες ώστε:

$$\cos(k_y y) = 0 \Rightarrow k_y y = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = (2n+1)\frac{\pi}{2k_y}, \quad n=0,1,2,\ldots \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στα οποία σχηματίζεται δεσμός δίνεται από την **(2)** και παριστάνει ευθείες παράλληλες προς τον άξονα των x.

β) Η απόσταση ℓ μεταξύ των δυο ράβδων είναι:

$$\ell = y_5 - y_o = \frac{11\pi}{2k_y} - \frac{\pi}{2k_y} = \frac{10\pi}{2k_y} \Rightarrow \ell = \frac{5\pi}{k_y}$$

Οπότε: $$k_y = \frac{5\pi}{\ell} \qquad \textbf{(3)}$$

Αλλά:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \overset{(k=\omega/\upsilon)}{\Rightarrow} k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{\upsilon^2} \Rightarrow k_x^2 = \frac{\omega^2}{\upsilon^2} - k_y^2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow k_x^2 = \frac{\omega^2}{\upsilon^2} - \frac{25\pi^2}{\ell^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Συνεπώς για να υπάρχει διάδοση κύματος κατά τη διεύθυνση x θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$k_x^2 > 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} \frac{\omega^2}{\upsilon^2} - \frac{25\pi^2}{\ell^2} > 0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{\upsilon^2} > \frac{25\pi^2}{\ell^2} \Rightarrow \omega^2 > \frac{25\pi^2\upsilon^2}{\ell^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega > \frac{5\pi\upsilon}{\ell}$$

Δηλαδή συμπεραίνεται ότι κατά τη διεύθυνση x δεν μπορούν να διαδοθούν κύματα με συχνότητα μικρότερη από $\omega = 5\pi\upsilon/\ell$.

ΘΕΜΑ 7

Επίπεδη ομογενής ορθογώνια μεμβράνη έχει πλευρές μήκους α, b οι οποίες είναι ακίνητες. Η κίνηση της μεμβράνης κάθετα στο επίπεδό της ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\frac{\tau}{\sigma}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) \qquad \textbf{(1)}$$

όπου Ψ(x,y,t) είναι η μετατόπιση του σημείου (x,y) της μεμβράνης τη χρονική στιγμή t, σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα μάζας της μεμβράνης και τ η δύναμη ανά μονάδα μήκους που τέντωσε τη μεμβράνη.

Ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης της μεμβράνης δίνεται από τη σχέση:

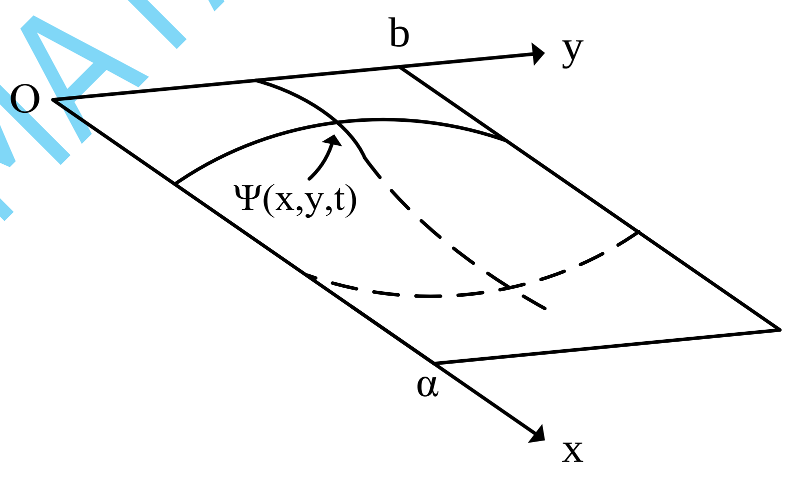
$$\Psi(x,y,t)=$$

$$=(A\sin k_x x+B\cos k_x x)(C\sin k_y y+D\cos k_y y)(E\sin\omega t+F\cos\omega t) \qquad \textbf{(2)}$$

Όπου A,B,C,D,E,F σταθερές και $\omega^2=\frac{\tau}{\sigma}(k_x^2+k_y^2)$ η σχέση διασποράς.

Να προσδιοριστούν οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης της μεμβράνης.

Λύση



Επειδή οι πλευρές της μεμβράνης είναι ακίνητες τα σημεία x = 0 και y = 0 της μεμβράνης είναι ακίνητα. Δηλαδή:

$$\Psi(0,y,t)=0\overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow B(C\sin k_y y+D\cos k_y y)(E\sin\omega t+F\cos\omega t)=0\Rightarrow B=0 \qquad \textbf{(3)}$$

$$\text{και}\quad \Psi(x,0,t)=0\overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow A\sin k_x x\cdot D(E\sin\omega t+F\cos\omega t)=0\Rightarrow D=0 \qquad \textbf{(4)}$$

Συνεπώς η **(2)** λόγω των **(3)** και **(4)** γίνεται:

$$\Psi(x,y,t)=A\sin k_x xC\sin k_y y(E\sin\omega t+F\cos\omega t)=$$

$$=\sin k_x x\sin k_y y(ACE\sin\omega t+ACF\cos\omega t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Psi(x,y,t)=\sin k_x x\sin k_y y(A'\sin\omega t+B'\cos\omega t) \qquad \textbf{(5)}$$

όπου $A'=ACE$ και $B'=ACF$ η σύμπτηξη των σταθερών.

Επίσης επειδή τα σημεία x = α της μεμβράνης είναι ακίνητα, για $x=\alpha$ η σχέση **(5)** δίνει:

$$\Psi(\alpha,y,t)=0\overset{(5)}{\Rightarrow}\sin k_x\alpha\sin k_y y(A'\sin\omega t+B'\cos\omega t)=0\Rightarrow\sin k_x\alpha=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_x\alpha=n\pi\Rightarrow k_{xn}=\frac{n\pi}{\alpha}\ ,\qquad n=1,2,\ldots \qquad \textbf{(6)}$$

Ομοίως τα σημεία y=b είναι ακίνητα οπότε η **(5)** δίνει:

$$\Psi(x,b,t)=0\overset{(5)}{\Rightarrow}\sin k_x x\sin k_y b(A'\sin\omega t+B'\cos\omega t)=0\Rightarrow\sin k_y b=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_y b=m\pi\Rightarrow k_{ym}=\frac{m\pi}{b}\ ,\quad m=1,2,\ldots \qquad \textbf{(7)}$$

Αντικαθιστώντας τις **(6)**, **(7)** στη δοθείσα σχέση διασποράς προκύπτουν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης της μεμβράνης ως :

$$\omega^2 = \frac{\tau}{\sigma}(k_x^2 + k_y^2) \overset{(6),(7)}{\Rightarrow} \omega^2 = \frac{\tau}{\sigma}\left(\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}\right) \Rightarrow \omega_{nm} = \pi\sqrt{\frac{\tau}{\sigma}\left(\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)}$$