Θέμα

Σωματίδιο μάζας m και σπιν $1/2$ βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t=0$ στην κατάσταση

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a - ib \\ a + ib \end{pmatrix}$$

όπου a, b θετικές πραγματικές σταθερές. Δίνεται ότι $\langle S_y \rangle = \frac{\sqrt{2}\hbar}{3}$, $\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{6}$.
(α) Υπολογίστε πλήρως την $\chi(0)$.
(β) Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ το σωματίδιο τίθεται εντός μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = B_0\hat{y}$ όπου B_0 γνωστή σταθερά και η ότι η ενέργεια αλληλεπίδρασης δίνεται από $H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$, με $\mu = -\frac{e}{mc}\vec{S}$. Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t για την οποία $\frac{eB_0}{2mc}t = \frac{\pi}{2}$.

α) $\langle S_y \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}\hbar \rightarrow \chi^\dagger_{(0)} S_y \chi_{(0)} = \frac{\sqrt{2}}{3}\hbar \rightarrow \chi^\dagger_{(0)} \frac{\cancel{\hbar}}{2}\sigma_y \chi_{(0)} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cancel{\hbar} \rightarrow$

$\rightarrow \chi^\dagger_{(0)}\sigma_y\chi_{(0)} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha+ib & \alpha-ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha-ib \\ \alpha+ib \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{pmatrix} \alpha+ib & \alpha-ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\alpha-\overset{1}{\cancel{i^2}}b \\ i\alpha-\overset{1}{\cancel{i^2}}b \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{pmatrix} \alpha+ib & \alpha-ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i\alpha+b \\ i\alpha+b \end{pmatrix} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow$

$\rightarrow (\alpha+ib)(-i\alpha+b)+(\alpha-ib)(i\alpha+b) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow$

$\rightarrow \cancel{-i\alpha^2}+\alpha b-\overset{-1}{\cancel{i^2}}b\alpha+\cancel{ib^2}+\cancel{i\alpha^2}+\alpha b-\overset{-1}{\cancel{i^2}}b\alpha-\cancel{ib^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow$

$\rightarrow 4\alpha b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \alpha b = \frac{\sqrt{2}}{6}$ (1)

www.pmoiras.weebly.com panmoiras@gmail.com 6932 946778

$\langle S_x\rangle = \frac{\hbar}{6} \to \chi_{(0)}^\dagger S_x \chi_{(0)} = \frac{\hbar}{6} \to \chi_{(0)}^\dagger \frac{\cancel{\hbar}}{2}\sigma_x \chi_{(0)} = \frac{\cancel{\hbar}}{6} \to$

$\to \chi^\dagger_{(0)}\sigma_x\chi_{(0)} = \frac{1}{3} \to (\alpha+ib \quad \alpha-ib)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha-ib\\\alpha+ib\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\to$

$\to(\alpha+ib\quad\alpha-ib)\begin{pmatrix}\alpha+ib\\\alpha-ib\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\to(\alpha+ib)^2+(\alpha-ib)^2=\frac{1}{3}\to$

$\to \alpha^2+\overset{-1}{\cancel{i^2}}b^2+\cancel{2i}\alpha b+\alpha^2+\overset{-1}{\cancel{i^2}}b^2-\cancel{2i}\alpha b=\frac{1}{3}\to$

$\to 2\alpha^2-2b^2=\frac{1}{3}\to\alpha^2-b^2=\frac{1}{6} \quad (2)$

Συνθήκη κανονικοποίησης: $\chi^\dagger_{(0)}\chi_{(0)}=1\to$

$\to(\alpha+ib\quad\alpha-ib)\begin{pmatrix}\alpha-ib\\\alpha+ib\end{pmatrix}=1\to(\alpha+ib)(\alpha-ib)+(\alpha-ib)(\alpha+ib)=1\to$

$\to\alpha^2-\overset{-1}{\cancel{i^2}}b^2+\alpha^2-\overset{-1}{\cancel{i^2}}b^2=1\to2\alpha^2+2b^2=1\to\alpha^2+b^2=\frac{1}{2}\quad(3)$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2), (3) προκύπτει:

$\alpha^2-\cancel{b^2}+\alpha^2+\cancel{b^2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\to2\alpha^2=\frac{4}{6}\to\alpha^2=\frac{2}{6}\to\alpha^2=\frac{1}{3}\to$

$\to\boxed{\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}}$ (γιατί $\alpha>0$)

Και η (2) δίνει: $b^2=\alpha^2-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\to b^2=\frac{1}{6}\to$

$$\rightarrow \boxed{b = \frac{1}{\sqrt{6}}} \quad (\text{γιατί } b>0)$$

Παρατηρούμε ότι επαληθεύεται η (2) καθώς: $a\cdot b = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{18}} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{36}} \rightarrow a\cdot b = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Άρα: } \boxed{X(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}} \qquad (4)$$

β) Έστω η χρονική στιγμή t όπου το σωματίδιο περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $X(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ (5)

Από τη χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger προκύπτει:

$$i\hbar \frac{\partial X}{\partial t} = HX \qquad (6)$$

όπου η Hamiltonian είναι:

$$H = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\left(\frac{-e}{mc}\vec{S}\right)\cdot\vec{B} = \frac{e}{mc}\vec{S}\cdot\vec{B} = \frac{e}{mc}\left(S_x\hat{x} + S_y\hat{y} + S_z\hat{z}\right)\cdot B_0\hat{y} =$$

$$= \frac{e}{mc}S_y B_0 = \frac{eB_0}{mc}\frac{\hbar}{2}\sigma_y \rightarrow H = \frac{eB_0\hbar}{2mc}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

Συνεπώς η (6) λόγω των (5), (7) δίνει:

$$i\cancel{\hbar}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \frac{eB_0\cancel{\hbar}}{2mc}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \rightarrow$$

Θέτουμε: $\omega = \frac{eB_0}{2mc}$

$$\rightarrow i\begin{pmatrix}\dot{a}(t)\\ \dot{b}(t)\end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix}-i\,b(t)\\ i\,a(t)\end{pmatrix} \rightarrow \cancel{i}\begin{pmatrix}\dot{a}(t)\\ \dot{b}(t)\end{pmatrix} = \cancel{i}\,\omega\begin{pmatrix}-b(t)\\ a(t)\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases}\dot{a}(t) = -\omega\, b(t) & (8)\\ \dot{b}(t) = \omega\, a(t) & (9)\end{cases}$$

Η (8) είναι: $\ddot{a}(t) = -\omega\,\dot{b}(t) \xrightarrow{(9)} \ddot{a}(t) = -\omega^2 a(t) \rightarrow$

$$\rightarrow \ddot{a}(t) + \omega^2 a(t) = 0$$

Με γενική λύση: $a(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$ (10)

Οπότε η (8) λόγω της (10) είναι:

$$\frac{da(t)}{dt} = -\omega\, b(t) \xrightarrow{(10)} C_1 \cancel{\omega} \cos\omega t - C_2 \cancel{\omega} \sin\omega t = -\cancel{\omega}\, b(t) \rightarrow$$

$$\rightarrow b(t) = -C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \quad (11)$$

Επομένως η X λόγω των (10), (11) γίνεται:

$$X(t) = \begin{pmatrix} C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t \\ -C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \end{pmatrix} \quad (12)$$

Αλλά: $X(0) \overset{(12)}{=} \begin{pmatrix} C_2 \\ -C_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \\ -C_1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{i}{\sqrt{6}} \rightarrow c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{i}{\sqrt{6}} \rightarrow c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

Άρα η (12) γράφεται:

$$X(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\sin\omega t + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cos\omega t \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cos\omega t + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\sin\omega t \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow X(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\sin\omega t & \left(1-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cos\omega t \\ \left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\cos\omega t & \left(1-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\sin\omega t \end{pmatrix} \quad (13)$$

Συνεπώς τη χρονική στιγμή για την οποία:

$\omega t = \frac{eB_0}{2mc} t = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{2\omega}$ η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου

είναι:

$$X\left(t = \frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} & \left(1-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} \\ \left(1+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} & \left(1-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} \end{pmatrix} \rightarrow$$

Μεθοδικά, απλά & κατανοητά...

$$\boxed{X\left(t=\frac{\pi}{2\omega}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\\[2ex] 1-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}}$$