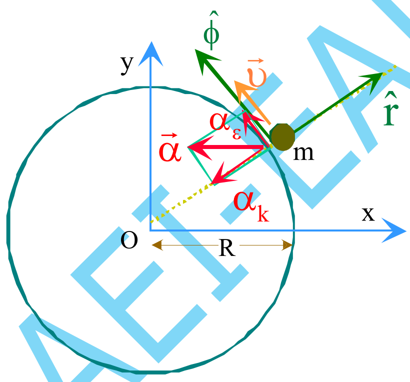
5.1 ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Η κυκλική κίνηση είναι μια επίπεδη κίνηση, η εξίσωση τροχιάς της οποίας είναι κύκλος $\left(x^2+y^2=R^2\right)$.

Έστω ένα σώμα μάζας m, το οποίο κινείται στην κυκλική τροχιά του σχήματος. Τα κινητικά μεγέθη της ταχύτητας και της επιτάχυνσης φαίνονται στο σχήμα. Δηλαδή η ταχύτητα είναι εφαπτομενική στην τροχιά, ενώ η επιτάχυνση μπορεί να κείται, οπουδήποτε, στο εσωτερικό του κύκλου.



Τα δυο αυτά διανύσματα μπορούν να αναλυθούν ως προς το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (x,y), αλλά δεν δίνουν περαιτέρω πληροφορίες. Για τον λόγο αυτό σε κάθε κυκλική κίνηση μας συμφέρει να αναλύουμε τα διανύσματα αυτά ως προς το πολικό σύστημα συντεταγμένων $\left(\hat{r},\hat{\phi}\right)$, όπου $\hat{r}$ η **ακτίνα διεύθυνσης** με θετική φορά προς τα έξω από τα κοίλα του κύκλου και $\hat{\phi}$ η **εφαπτομενική διεύθυνση** με θετική φορά τη φορά της ταχύτητας (όπως φαίνονται στο σχήμα).

Επομένως παρατηρείται ότι το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ βρίσκεται πάντα πάνω στην εφαπτομενική διεύθυνση, ενώ το διάνυσμα της επιτάχυνσης αναλύεται σε δυο συνιστώσες:

Την **κεντρομόλο επιτάχυνση** α_k στην ακτινική διεύθυνση και

την **επιτρόχιο επιτάχυνση** α_ε στην εφαπτομενική διεύθυνση.

Αποδεικνύεται ότι το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι:

$$\boxed{\alpha_k=\frac{\upsilon^2}{R}}$$

Η φυσική της σημασία είναι ότι περιγράφει τη μεταβολή της διεύθυνσης (μόνο) της ταχύτητας, ενώ το μέτρο της επιτροχίου επιτάχυνσης είναι:

$$\boxed{\alpha_\varepsilon=\frac{d\upsilon}{dt}}$$

όπου $\upsilon=\left|\vec{\upsilon}\right|$ το μέτρο της ταχύτητας !! και η φυσική της σημασία είναι ότι περιγράφει τη μεταβολή του μέτρου (μόνο) της ταχύτητας.

Σημείωση:

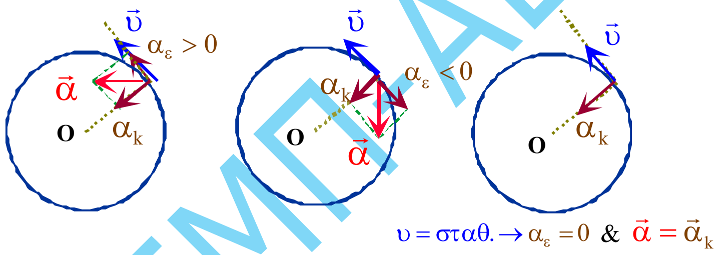
Το διάνυσμα της επιτάχυνσης $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ περιγράφει τη μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας, δηλαδή τη μεταβολή του μέτρου και της διεύθυνσης της ταχύτητας.

Άρα, όπως εύκολα γίνεται αντιληπτό, κάθε συνιστώσα της στο πολικό σύστημα $(\alpha_k, \alpha_\varepsilon)$ περιγράφει μια από τις μεταβολές.

Παρατήρηση:

Επειδή σε κάθε κυκλική κίνηση η ταχύτητα αλλάζει διεύθυνση, θα υπάρχει <u>πάντα</u> η κεντρομόλος επιτάχυνση.

Ενώ αν το μέτρο της ταχύτητας αυξάνει είναι $\alpha_\varepsilon > 0$ (επιταχυνόμενη κίνηση) (σχήμα 1), αν το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται είναι $\alpha_\varepsilon < 0$ (επιβραδυνόμενη κίνηση) (σχήμα 2) και τέλος αν το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό, είναι $\alpha_\varepsilon = 0$ (ομαλή κυκλική κίνηση) (σχήμα 3).



Σχήμα 1 Σχήμα 2 Σχήμα 3

Υπενθυμίζουμε τις σχέσεις:

$$\upsilon = \omega R, \qquad \omega = 2\pi\nu, \qquad \nu = \frac{1}{T}$$

όπου ω η γωνιακή ταχύτητα, ν η συχνότητα και Τ η περίοδος. Η γωνιακή ταχύτητα ορίζεται ως:

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{z}}$$

όπου θ η γωνία της επιβατικής ακτίνας.

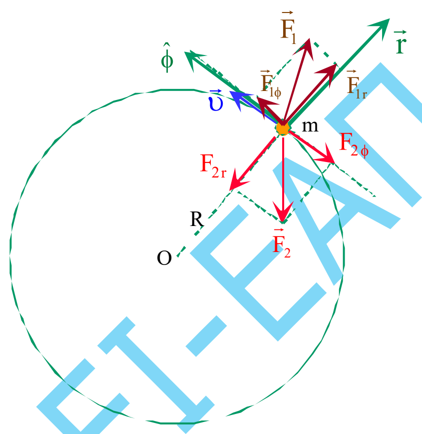
Δυναμική της κυκλικής κίνησης

Όπως κάθε κινούμενο σώμα, έτσι και ένα σώμα που εκτελεί κυκλική κίνηση υπόκειται στο 2ο νόμο του Newton. Αλλά επειδή στην κυκλική κίνηση η επιτάχυνση αναλύεται στο πολικό σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_k + \vec{\alpha}_\varepsilon$$

θα πρέπει να αναλυθούν και οι εφαρμοζόμενες δυνάμεις στο σώμα στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

Για παράδειγμα έστω ότι στο σώμα ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ του σχήματος. Τότε αυτές αναλυόμενες στο πολικό σύστημα έχουν τις συντεταγμένες F_{1r}, $F_{1\phi}$, F_{2r} και $F_{2\phi}$ (όπως φαίνεται στο σχήμα) και ο $2^{ος}$ νόμος του Newton δίνει:



$$\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \hat{r}: & \Sigma F_r = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad F_{2r} - F_{1r} = m\dfrac{\upsilon^2}{R} \\ \hat{\phi}: & \Sigma F_\phi = m\alpha_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad F_{1\phi} - F_{2\phi} = m\dfrac{d\upsilon}{dt} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η συνισταμένη των δυνάμεων στην ακτινική διεύθυνση λέγεται **κεντρομόλος δύναμη** F_k και προσέξτε ότι δεν είναι ένα νέο είδος δύναμης αλλά κάποιες δυνάμεις ή συνιστώσες τους, παίζουν το ρόλο αυτής σε κάποιο σώμα το οποίο κινείται κυκλικά. Επίσης προσέξτε ότι ως θετική φορά των ακτινικών δυνάμεων επιλέγεται αυτή που διευθύνεται προς το κέντρο, δηλαδή η διεύθυνση της κεντρομόλου επιτάχυνσης.

Η φυσική σημασία της F_k είναι όμοια με αυτή της α_k, δηλαδή περιγράφει τη μεταβολή της διεύθυνσης της ταχύτητας, γι' αυτό και είναι απαραίτητη πάντα η ύπαρξή της σε μια οποιαδήποτε κυκλική κίνηση. Αντίστοιχα για τις εφαπτομενικές συνιστώσες των δυνάμεων ως θετική φορά επιλέγεται η φορά της κίνησης (δηλαδή της ταχύτητας) και αυτές περιγράφουν τη μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας, όπως και η επιτρόχιος επιτάχυνση.

Σε μια ομαλή κυκλική κίνηση είναι $\alpha_\varepsilon = 0$ οπότε και οι εφαπτομενικές δυνάμεις μηδενίζονται.

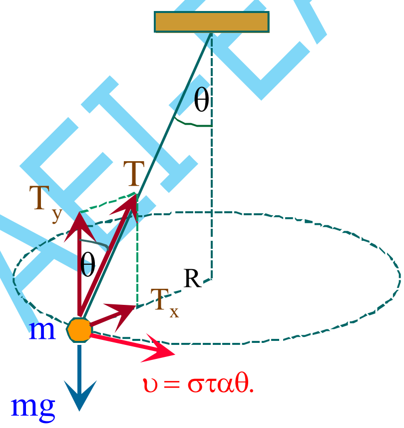
Μεθοδολογία: Σε κάθε άσκηση κυκλικής κίνησης θα πρέπει να γίνεται ανάλυση των δυνάμεων στο πολικό σύστημα συντεταγμένων και εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου Newton σε αυτό. Συνήθως εμείς θα χρησιμοποιούμε μόνο την κεντρομόλο δύναμη, αφού θα αναφερόμαστε σε προβλήματα ομαλής κυκλικής κίνησης.

5.2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1η

Ένα μικρό σώμα μάζας m περιστρέφεται πάνω σε ένα οριζόντιο κύκλο με σταθερή ταχύτητα στο άκρο ενός νήματος μήκους ℓ. Καθώς το σώμα κινείται το νήμα διαγράφει την επιφάνεια κώνου (κωνικό εκκρεμές). Βρείτε το χρόνο μιας πλήρους περιστροφής, συναρτήσει των ℓ και θ.

Λύση: Το σώμα κινείται υπό την επίδραση του βάρους του mg και της τάσης του νήματος T, η οποία αναλύεται στις συνιστώσες $T_x = T\sin\theta$ και $T_y = T\cos\theta$. Ο χρόνος μιας πλήρους περιστροφής ισούται με την περίοδο του σώματος και είναι:



$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1)$$

Λόγω ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα y ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_y - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T\cos\theta = mg \quad (2)$$

Ενώ η συνιστώσα T_x παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης της κυκλικής τροχιάς του σώματος, δηλαδή:

$$T_x = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad T\cdot\sin\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R \quad (3)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (3) και (2) προκύπτει:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\omega^2 R}{g} \quad (4)$$

Αλλά από το ορθογώνιο τρίγωνο είναι:

$$\sin\theta = \frac{R}{\ell} \quad \Rightarrow \quad R = \ell\sin\theta$$

οπότε η (4) δίνει:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\omega^2}{g}\ell\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\theta}} \quad (5)$$

Άρα η (1) λόγω της (5) δίνει:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\theta}{g}}}$$

Άσκηση 2η

Ένα μικρό σώμα μάζας $m = 0,2kgr$ είναι δεμένο στο άκρο ενός αβαρούς νήματος μήκους $\ell = 1m$ και εξαναγκάζεται να διαγράφει έναν κατακόρυφο κύκλο.

α. Να υπολογιστεί η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του έτσι ώστε να κάνει ανακύκλωση, δηλαδή να διαγράφει έναν πλήρη κύκλο.

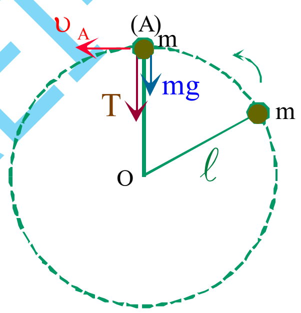
β. Να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του έτσι ώστε να μην κοπεί το νήμα, αν το όριο θραύσης του νήματος είναι:

$$T_{\theta\rho\alpha\acute{\upsilon}\sigma\eta\varsigma} = 10Nt$$

Δίνεται $g = 10\ m/sec^2$.

Λύση:

α. Στο ανώτατο σημείο της τροχιάς Α, οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος του mg και η τάση του νήματος T.



Όπως φαίνεται και στο σχήμα στο συγκεκριμένο σημείο οι δυο αυτές δυνάμεις παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή ισχύει:

$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad mg + T = m\frac{\upsilon_A{}^2}{\ell} \quad \Rightarrow$$

$$T = m\frac{\upsilon_A{}^2}{\ell} - mg \quad (1)$$

Αλλά πρέπει να ισχύει:

$$T \geq 0 \quad \overset{(1)}{\Rightarrow} \quad m\frac{\upsilon_A{}^2}{\ell} - mg \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$m\frac{\upsilon_A{}^2}{\ell} \geq mg \quad \Rightarrow$$

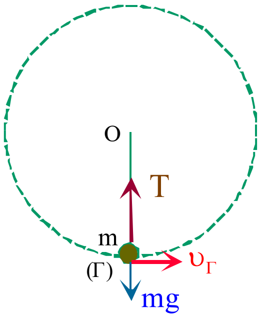
$$\upsilon_A{}^2 \geq g\ell \quad \Rightarrow \quad \upsilon_A \geq \sqrt{g\ell} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_A \geq \sqrt{10}m/sec$$

Άρα:

$$\upsilon_{A_{min}} = \sqrt{g\ell}$$

και όπως φαίνεται από τα προηγούμενα αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου $T = 0$ στο σημείο Α.

β. Στο κατώτερο σημείο της τροχιάς Γ στο σώμα ασκείται το βάρος mg και η τάση του νήματος, όπως φαίνονται στο σχήμα. Η συνισταμένη τους παίζει πάλι το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Επομένως:



$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad T - mg = m\frac{\upsilon_\Gamma{}^2}{\ell} \quad \Rightarrow$$

$$T = m\frac{\upsilon_\Gamma{}^2}{\ell} + mg \quad (2)$$

Αλλά για να μην κοπεί το νήμα πρέπει να ισχύει:

$$T \leq T_{\theta\rho\alpha\acute{\upsilon}\sigma\eta\varsigma} \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad m\frac{\upsilon_\Gamma{}^2}{\ell} + mg \leq 10 \quad \Rightarrow$$

$$m\frac{\upsilon_\Gamma{}^2}{\ell} \leq 10 - mg \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_\Gamma^{\ 2} \le \frac{10\ell}{m} - g\ell \quad \Rightarrow \quad \upsilon_\Gamma \le \sqrt{\frac{10\ell}{m} - g\ell} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_\Gamma \le \sqrt{\frac{10\cdot 1}{0,2} - 10\cdot 1} \quad \Rightarrow$$

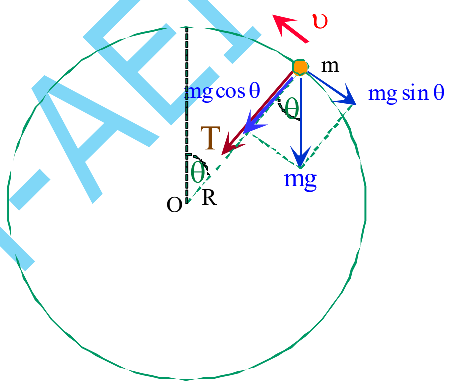
$$\upsilon_\Gamma \le \sqrt{50-10} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_\Gamma \le \sqrt{40} m/sec$$

Άρα: $\upsilon_{\Gamma_{max}} = \sqrt{40} m/sec$

<u>Άσκηση 3η</u>

Μια μικρή πέτρα μάζας m είναι δεμένη με νήμα μήκους R και περιστρέφεται κυκλικά σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ένα σταθερό σημείο Ο. Προσδιορίστε την τάση του νήματος τη στιγμή που το μέτρο της ταχύτητας της πέτρας είναι υ και το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο. Για ποια γωνία η τάση του νήματος είναι μέγιστη και για ποια ελάχιστη.

<u>Λύση:</u> Στη θέση αυτή της μάζας οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτή είναι η τάση του νήματος και το βάρος της mg, που αναλύεται στην ακτινική συνιστώσα $mg\cos\theta$ και την εφαπτομενική συνιστώσα $mg\sin\theta$. Παρατηρείται ότι η T και η $mg\cos\theta$ παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή:



$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad T + mg\cos\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow$$

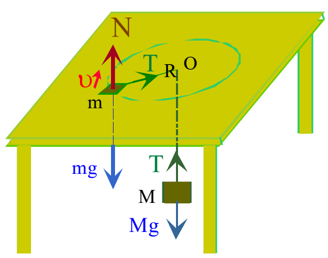
$$\boxed{T = m\frac{\upsilon^2}{R} - mg\cos\theta}$$

Όπως παρατηρείται από την τελευταία σχέση η τάση του νήματος γίνεται μέγιστη όταν $\cos\theta = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 180^o$, ενώ αυτή γίνεται ελάχιστη όταν $\cos\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0^o$ (επειδή $-1 \le \cos\theta \le 1$).

Άρα γίνεται μέγιστη η τάση στο κατώτερο σημείο της τροχιάς $\left(\theta = 180^o\right)$ ενώ γίνεται ελάχιστη στο ανώτερο σημείο της τροχιάς $\left(\theta = 0^o\right)$.

<u>Άσκηση 4η</u>

Μια μάζα m κινείται κυκλικά (ακτίνα R) σε λείο οριζόντιο τραπέζι και συνδέεται με νήμα με μια μάζα M, όπως στο σχήμα. Να προσδιοριστεί η ταχύτητα υ με την οποία πρέπει να περιστρέφεται η m έτσι ώστε η M να παραμένει ακίνητη.



<u>Λύση:</u> Στο σώμα M ασκείται το βάρος του Mg και η τάση του νήματος T. Επειδή αυτό ισορροπεί ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T = Mg \quad (1)$$

Στο σώμα m ασκείται το βάρος του mg, η κάθετη αντίδραση N από το τραπέζι και η τάση του νήματος T. Η T όμως παίζει το ρόλο της απαραίτητης κεντρομόλου δύναμης για την κυκλική κίνηση και ισχύει:

$$F_k = m\alpha_k \quad\Rightarrow\quad T = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad\overset{(1)}{\Rightarrow}\quad Mg = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad\Rightarrow\quad \upsilon^2 = \frac{MgR}{m} \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{MgR}{m}}}$$

<u>Άσκηση 5η</u>

Ένα σώμα μάζας $m = 0,8kgr$ περιστρέφεται γύρω από μια κάθετη ράβδο με τη βοήθεια δυο νημάτων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τα νήματα συνδέονται με τη ράβδο μέσω συνδέσμων χωρίς τριβές. Το μήκος κάθε νήματος είναι $\ell = 5m$, ενώ η απόσταση των δυο συνδέσμων είναι $d = 8m$. Αν η τάση του επάνω νήματος είναι $T_1 = 15Nt$ να βρείτε:

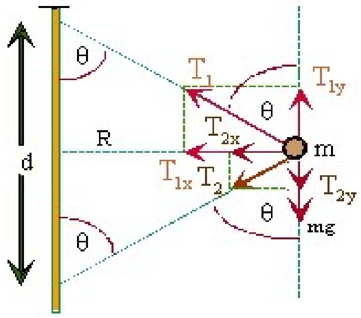
α. Τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος.

β. Τη τάση στο κάτω νήμα.

(Εξετάσεις ΦΥΕ 14 30-7-2005)

<u>Λύση:</u> Από την τριγωνομετρία του σχήματος είναι:

$$\sin\theta = \frac{R}{\ell} = \frac{\sqrt{\ell^2 - d^2/4}}{d} \quad\Rightarrow\quad \sin\theta = \frac{3}{5}$$



όπου:

$$R = \sqrt{\ell^2 - d^2/4} = \sqrt{5^2 - 8^2/4} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} \Rightarrow \boxed{R = 3m}$$

και

$$\cos\theta = \frac{d/2}{\ell} = \frac{8/2}{5} \quad\Rightarrow\quad \cos\theta = \frac{4}{5}$$

Λόγω ισορροπίας στον άξονα y ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad\Rightarrow\quad T_{1y} - T_{2y} - mg = 0 \quad\Rightarrow\quad T_1\cos\theta - T_2\cos\theta - mg = 0 \quad\Rightarrow$$

$$T_2\cos\theta = T_1\cos\theta - mg \quad\Rightarrow\quad T_2 = T_1 - \frac{mg}{\cos\theta} = 15 - \frac{0,8\cdot 10}{4/5} = 15 - \frac{8\cdot 5}{4} = 15 - 10 \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{T_2 = 5Nt}$$

Ενώ οι συνιστώσες των τάσεων T_{1x} και T_{2x} παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, οπότε:

$$F_k = m\alpha_k \quad\Rightarrow\quad T_{1x} + T_{2x} = m\omega^2 R \quad\Rightarrow\quad T_1\sin\theta + T_2\sin\theta = m\omega^2 R \quad\Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(T_1 + T_2)\sin\theta}{mR}} = \sqrt{\frac{(15+5)\frac{3}{5}}{0,8\cdot 3}} = \sqrt{\frac{12}{2,4}} \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{5}\ \text{rad/sec}}$$

Άσκηση 6η

Σφαιρίδιο μάζας m είναι δεμένο με δυο νήματα από έναν κατακόρυφο άξονα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Όλο το σύστημα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα.

α. Υποθέτοντας ότι η ω είναι αρκετά μεγάλη για να κρατάει και τα δυο νήματα τεντωμένα, βρείτε τη δύναμη που ασκεί κάθε νήμα στο σφαιρίδιο σαν συνάρτηση των ω, m, g, R και θ.

β. Βρείτε την ελάχιστη γωνιακή ταχύτητα ω_{min} για την οποία το κάτω νήμα μόλις να παραμένει τεντωμένο.

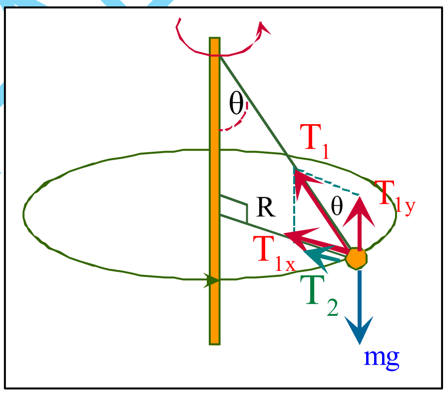
Λύση:

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σφαιρίδιο είναι το βάρος του mg και οι τάσεις T_1 και T_2 από τα δυο νήματα.

Λόγω ισορροπίας στον άξονα y είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_{1y} - mg = 0 \Rightarrow T_1 \cos\theta = mg \Rightarrow$$

$$\boxed{T_1 = \frac{mg}{\cos\theta}} \quad (1)$$



Επίσης η T_{1x} και η T_2 παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου, οπότε:

$$F_k = m\alpha_k \Rightarrow T_{1x} + T_2 = m\omega^2 R \Rightarrow T_1 \sin\theta + T_2 = m\omega^2 R \Rightarrow$$

$$T_2 = m\omega^2 R - T_1 \sin\theta \overset{(1)}{\Rightarrow} T_2 = m\omega^2 R - \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{T_2 = m\omega^2 R - mg\tan\theta} \quad (2)$$

β. Για να παραμένει το κάτω νήμα τεντωμένο πρέπει να ισχύει:

$$T_2 \geq 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} m\omega^2 R - mg\tan\theta \geq 0 \Rightarrow m\omega^2 R \geq mg\tan\theta \Rightarrow$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g\tan\theta}{R}}$$

Άρα:

$$\boxed{\omega_{min} = \sqrt{\frac{g\tan\theta}{R}}}$$

<u>Άσκηση 7η</u>

Σώμα μάζας $m = 12kgr$ βρίσκεται πάνω σε λεία κωνική επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχήμα, η οποία περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 1rad/sec$. Υπολογίστε:

α. Τη γραμμική ταχύτητα του σώματος.
β. Την αντίδραση της επιφάνειας πάνω στο σώμα.
γ. Την τάση του νήματος.
δ. Τη γωνιακή ταχύτητα που απαιτείται για να γίνει η αντίδραση της επιφάνειας μηδέν.

<u>Λύση:</u>

α. Το σώμα, καθώς περιστρέφεται ο κώνος, εκτελεί κυκλική κίνηση με ακτίνα R και κέντρο Ο. Άρα η γραμμική ταχύτητα του σώματος σύμφωνα με τη σχέση της κυκλικής κίνησης είναι:

$$\upsilon = \omega R$$

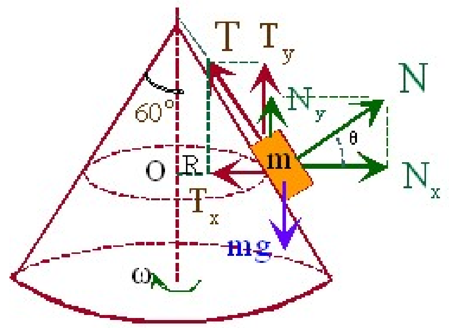
όπου από το σχήμα είναι:

$$\sin\theta = \frac{R}{\ell} \Rightarrow R = \ell\sin\theta = 1,5\sin 60^o = 1,5\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = 1,3m$$

Άρα:

$$\upsilon = 1\cdot 1,3\ m/sec \Rightarrow \boxed{\upsilon = 1,3\ m/sec}$$

β. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος του mg, η τάση του νήματος T και η κάθετη αντίδραση N.



Αναλύοντας την τάση στις δυο κάθετες συνιστώσες της:

$$T_x = T\sin\theta,\ T_y = T\cos\theta$$

και την κάθετη αντίδραση στις:

$$N_x = N\cos\theta \text{ και } N_y = N\sin\theta$$

η συνθήκη ισορροπίας στον άξονα y δίνει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T_y + N_y - mg = 0$$

$$\Rightarrow T\cos\theta + N\sin\theta = mg \quad (1)$$

Ενώ η συνισταμένη των T_x και N_x παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή:

$$F_k = m\alpha_k \Rightarrow T_x - N_x = m\omega^2 R \Rightarrow T\sin\theta - N\cos\theta = m\omega^2 R \Rightarrow$$

$$T\sin 60^o = N\cos 60^o + 12\cdot 1^2\cdot 1,3 \Rightarrow T\frac{\sqrt{3}}{2} = N\frac{1}{2} + 15,6 \Rightarrow$$

$$T\sqrt{3} = N + 31,2 \Rightarrow T = \frac{N}{\sqrt{3}} + \frac{31,2}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Άρα η (1) λόγω της (2) δίνει:

$$\left(\frac{N}{\sqrt{3}} + \frac{31,2}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{2} + N\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\cdot 10 \Rightarrow \frac{N}{\sqrt{3}} + \frac{31,2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}N = 240 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)\cdot N = 240 - \frac{31,2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1+3}{\sqrt{3}}N = 240 - \frac{31,2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$4N = 240\sqrt{3} - 31,2 \quad \Rightarrow \quad 4N = 240 \cdot 1,73 - 31,2 = 384,5 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{N = 96,1 \text{ Nt}}$$

γ. Άρα η (2) δίνει:

$$T = \frac{96,1 + 31,2}{1,732} = \frac{127,3}{1,732} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 73,5 \text{ Nt}}$$

δ. Για να γίνει η αντίδραση της επιφάνειας μηδέν $(N = 0)$ η γωνιακή ταχύτητα θα είναι τέτοια ώστε η T_x μόνο να παίζει το ρόλο της κεντρομόλου. Δηλαδή:

$$T_x = m\omega^2 R \quad \Rightarrow \quad T\sin\theta = m\omega^2 R \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{T\sin\theta}{mR}}$$

και η (1) τώρα δίνει:

$$T\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad T = 240 \text{ Nt}$$

οπότε:

$$\omega = \sqrt{\frac{240 \cdot 0,866}{12 \cdot 1,3}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = 3,65 \text{ rad/ sec}}$$

<u>**Άσκηση 8η**</u>

Σε ένα λούνα πάρκ υπάρχει ένας μεγάλος κατακόρυφος κύλινδρος ο οποίος περιστρέφεται αρκετά γρήγορα γύρω από τον άξονα του έτσι ώστε κάθε άτομο στο εσωτερικό του να στηρίζεται χωρίς να γλιστρά στο κυλινδρικό μέρος όταν το πάτωμα εξαφανίζεται. Βρείτε τη μέγιστη περίοδο περιστροφής ώστε ο άνθρωπος να μην πέφτει προς τα κάτω αν ο συντελεστής στατικής τριβής είναι μ_s και η ακτίνα του κυλίνδρου R. Δίνεται η βαρυτική επιτάχυνση g.

(Εξετάσεις ΦΥΕ 14 Αύγουστος 2004)

<u>**Λύση:**</u> Οι δυνάμεις που ασκούνται στον άνθρωπο είναι το βάρος του mg, η δύναμη στατικής τριβής T_s μεταξύ ανθρώπου και τοιχώματος και η κάθετη αντίδραση N που ασκεί το τοίχωμα στον άνθρωπο, όπως φαίνονται στο σχήμα.

Η κάθετη αντίδραση παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης που απαιτείται για να κινείται ο άνθρωπος κυκλικά και είναι:

$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad N = m\omega^2 R \quad (1)$$

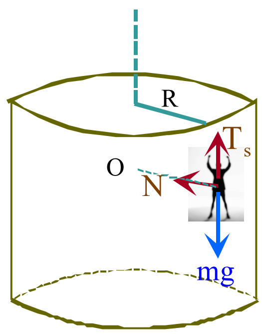
Ενώ επειδή ο άνθρωπος δεν κινείται κατακόρυφα, λόγω ισορροπίας ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_s - mg = 0 \quad T_s = mg \quad (2)$$

Αλλά: $T_s \le \mu_s N$

οπότε η (2) δίνει:

$$mg \le \mu_s N \overset{(1)}{\Rightarrow} mg \le \mu_s m\omega^2 R \Rightarrow \omega \ge \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}} \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s R}}$$

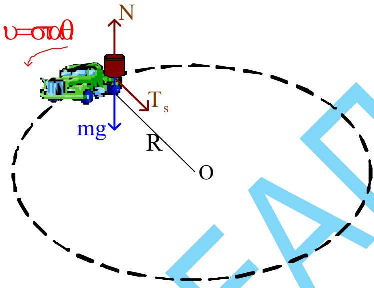


Άρα η μέγιστη περίοδος περιστροφής είναι:

$$T_{max} = \frac{2\pi}{\omega_{min}} \overset{(3)}{\Rightarrow} \boxed{T_{max} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu_s R}{g}}}$$

Άσκηση 9η

Κιβώτιο μάζας m βρίσκεται στο επίπεδο πάτωμα ενός φορτηγού που κινείται με σταθερή ταχύτητα υ και συγκρατείται στη θέση του από την τριβή. Το φορτηγό κινείται σε κυκλικό δρόμο, χωρίς κλίση, ακτίνας R. Βρείτε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιείται από το συντελεστή στατικής τριβής μ μεταξύ του κιβωτίου και του πατώματος του φορτηγού σαν συνάρτηση των υ, R και g.



Λύση: Οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο είναι το βάρος του mg, η κάθετη αντίδραση N και η στατική τριβή T_s.

Λόγω ισορροπίας στον κατακόρυφο άξονα είναι:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \quad (1)$$

Επίσης επειδή το φορτηγό κινείται με σταθερή ταχύτητα, δηλαδή το κιβώτιο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, η στατική τριβή T_s παίζει εξ ολοκλήρου το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Δηλαδή:

$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad T_s = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad (2)$$

Αλλά:

$$T_s = \mu N \overset{(1)}{\Rightarrow} T_s = \mu mg \quad (3)$$

Άρα η (2) λόγω της (3) δίνει:

$$\mu mg = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu = \frac{\upsilon^2}{gR}}$$

Άσκηση 10η

Αν ο δρόμος του προηγούμενου προβλήματος ήταν κεκλιμένος με γωνία κλίσης θ, να βρεθεί η σταθερή ταχύτητα υ του φορτηγού συναρτήσει των μ, R και θ.

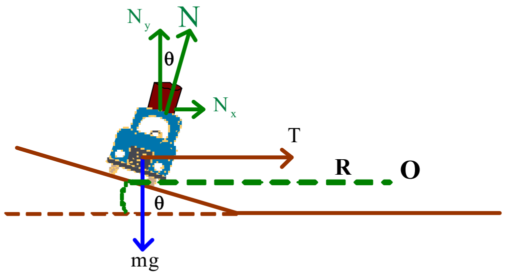
Λύση: Στην περίπτωση του κεκλιμένου δρόμου η κάθετη αντίδραση N αναλύεται σε δυο κάθετες συνιστώσες, που είναι:

$N_x = N\sin\theta$ και $N_y = N\cos\theta$

Η ισορροπία στον άξονα y δίνει:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_y - mg = 0 \quad \Rightarrow$$

$$N\cos\theta = mg \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{\cos\theta} \quad (1)$$



Ενώ τώρα η στατική τριβή T_s και η συνιστώσα N_x παίζουν το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης έτσι ώστε:

$$F_k = m\alpha_k \quad \Rightarrow \quad T_s + N_x = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow \quad T_s + N\sin\theta = \frac{m\upsilon^2}{R} \quad (2)$$

$$\mu N + N\sin\theta = \frac{m\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow \quad N(\mu+\sin\theta) = \frac{m\upsilon^2}{R} \quad \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{mg}{\cos\theta}(\mu+\sin\theta) = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad \Rightarrow$$

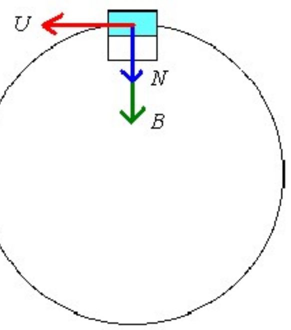
$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{gR}{\cos\theta}(\mu+\sin\theta)}}$$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση αυτή η N βοηθά την κυκλική κίνηση καθώς παρέχει με τη συνιστώσα της N_x στην κεντρομόλο δύναμη. Παρατηρείται ότι τώρα το κιβώτιο θα κινιόταν κυκλικά, ακόμη και αν το πάτωμα του φορτηγού δεν παρουσίαζε τριβή $(\mu = 0)$ και τότε θα ήταν $\upsilon = \sqrt{gR\tan\theta}$.

Άσκηση 11η

Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα περιστροφής ενός κουβά με μπογιά σε κυκλική κατακόρυφη τροχιά ακτίνας R ώστε να μη χυθεί το περιεχόμενό του.

Λύση



Το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης παίζουν το βάρος και η κάθετη αντίδραση από τη βάση του κουβά:

$$F_\kappa = B + N \Rightarrow m\frac{\upsilon^2}{R} = mg + N$$

Η οριακή περίπτωση στην οποία το νερό δε θα χυθεί έξω από τον κουβά είναι όταν θα θα χάνει σχεδόν την επαφή με τη βάση του κουβά, οπότε θα ακολουθεί κυκλική κίνηση με κεντρομόλο δύναμη το βάρος του (οριακά καμιά αντίδραση από τη βάση του κουβά).

$$N = m\left(\frac{\upsilon^2}{R} - g\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{R} \geq g \Rightarrow \upsilon \geq \sqrt{gR} \Rightarrow \upsilon_{\min} = \sqrt{gR}$$

Παρατηρούμε ότι η ελάχιστη ταχύτητα περιστροφής του κουβά, ώστε να μη χυθεί η μπογιά, δεν εξαρτάται από τη μάζα της μπογιάς, αλλά μόνο από την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.