ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ
ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Συγγραφή – Επιμέλεια: Παναγιώτης Φ. Μοίρας

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 - ΑΘΗΝΑ ☎ 6932 946778
www.pmoiras.weebly.com

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ

$$x = x(X,Y,Z,t)$$
$$y = y(X,Y,Z,t)$$
$$z = z(X,Y,Z,t)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν την θέση (x,y,z) στην οποία βρίσκεται τώρα (t) το στοιχείο ρευστού που στην αρχή του χρόνου (t_0=0) βρισκόταν στην θέση (X, Y, Z).

Οι μεταβλητές (x,y,z) ονομάζονται χωρικές ή Euler. Οι μεταβλητές (X, Y, Z) ονομάζονται σωματιδιακές ή Lagrange. Αντίστοιχα η περιγραφή ενός μεγέθους h (π.χ της ταχύτητας) συναρτήσει των (x,y,z) ονομάζεται χωρική περιγραφή ή περιγραφή Euler ενώ συναρτήσει των (X, Y, Z) ονομάζεται υλική ή περιγραφή Lagrange.

ΠΕΔΙΟ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ

Η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ που έχει ένα στοιχείο ρευστού κάποια χρονική στιγμή αναλύεται σε τρείς συνιστώσες (u, v, w) κατά τους άξονες (x, y, z) αντίστοιχα. Όπως είπαμε παραπάνω η ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές Lagrange ή τις Euler. Άρα έχω:

$$\vec{\upsilon} = \begin{matrix} u(X,Y,Z,t) \\ v(X,Y,Z,t) \\ w(X,Y,Z,t) \end{matrix}$$

Η υλική (Lagrange) περιγραφή της $\vec{\upsilon}$ δίνει την ταχύτητα που έχει τώρα (t) το συγκεκριμένο στοιχείο ρευστού που στην αρχή του χρόνου βρισκόταν στο σημείο (X,Y,Z). Δηλαδή κατά την Lagrange περιγραφή ο παρατηρητής βρίσκεται συνεχώς πάνω σε ένα συγκεκριμένο στοιχείο ρευστού (αυτό που στην αρχή του χρόνου ήταν στο σημείο (X,Y,Z)), κινείται μαζί του και μετράει την ταχύτητα του.

$$\vec{\upsilon} = \begin{matrix} u(x,y,z,t) \\ v(x,y,z,t) \\ w(x,y,z,t) \end{matrix}$$

Η χωρική (Euler) περιγραφή της $\vec{\upsilon}$ δίνει την ταχύτητα που έχει τώρα (t) ένα στοιχείο ρευστού που περνάει αυτή τη στιγμή από το σημείο (x, y, z). Δηλαδή κατά την Euler περιγραφή ο παρατηρητής βρίσκεται ακίνητος σε ένα συγκεκριμένο σημείο του χώρου (το σημείο (x, y, z)), και μετράει την ταχύτητα των στοιχείων ρευστού που περνούν από μπροστά του. Στο 99% των περιπτώσεων χρησιμοποιείται αυτή η περιγραφή.

Ταχύτητα ενός σωματιδίου ορίζεται η υλική παράγωγος του $\vec{r}$=(x,y,z) ως προς το χρόνο. Δηλαδή:

$$\vec{\upsilon} = (u,v,w) = \left(\frac{Dx}{Dt},\frac{Dy}{Dt},\frac{Dz}{Dt}\right) = \left(\frac{dx(X,Y,Z,t)}{dt},\frac{dy(X,Y,Z,t)}{dt},\frac{dz(X,Y,Z,t)}{dt}\right) \quad (1.1)$$

ΠΕΔΙΟ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΕΩΝ

Η επιτάχυνση αναλύεται και αυτή με την σειρά της σε 3 συνιστώσες κατά τους άξονες (x, y, z). Άρα $\vec{b}=(b_u,b_v,b_w)$. Προσοχή: το u στο b_u δεν σημαίνει παράγωγος του b ως προς u αλλά είναι απλά ένας δείκτης που λέει πως η b_u είναι παράλληλη στον άξονα των xx΄.

Επιτάχυνση ενός σωματιδίου ορίζεται η υλική παράγωγος της ταχύτητας ως προς το χρόνο:

$$\vec{b}=\frac{D\vec{\upsilon}}{Dt} \qquad (1.2)$$

Επειδή όμως τις περισσότερες φορές η ταχύτητα είναι δοσμένη με χωρικές μεταβλητές (Euler) τότε η επιτάχυνση δεν προκύπτει από την (2) αλλά από την παρακάτω:

$$\vec{b}=\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+grad^T\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon} \qquad (1.3)$$

Ή αλλιώς:

$$\begin{bmatrix} b_u \\ b_v \\ b_w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Η οποία αναλυτικά γράφεται:

$$\begin{aligned} b_u &= \frac{\partial u}{\partial t}+(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})=u_t+(uu_x+vu_y+wu_z) \\ b_v &= \frac{\partial v}{\partial t}+(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z})=v_t+(uv_x+vv_y+wv_z) \\ b_w &= \frac{\partial w}{\partial t}+(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z})=w_t+(uw_x+vw_y+ww_z) \end{aligned} \qquad (1.4)$$

ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ

Μία ροή ονομάζεται μόνιμη όταν το πεδίο ταχυτήτων είναι ανεξάρτητο του χρόνου. Σε ένα μόνιμο πεδίο ροής ισχύει η συνθήκη:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \qquad (1.5)$$

ΣΥΜΠΙΕΣΤΟΤΗΤΑ

Ένα ρευστό ονομάζεται ασυμπίεστο όταν η πυκνότητα του παραμένει σταθερή ρ=ct αλλιώς ρ≠ct δηλαδή ρ=ρ(x,y,z,t). Σε κάθε ρευστό ισχύει η αρχή διατήρησης της μάζας. Ένα ρευστό είναι ασυμπίεστο όταν ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$div\vec{\upsilon} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (1.6)$$

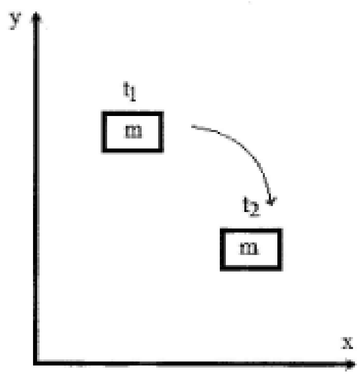
$$u_x + v_y + w_z = 0$$

Η παραπάνω σχέση δεν είναι τίποτε άλλο από την αρχή διατήρησης της μάζας για ασυμπίεστο ρευστό

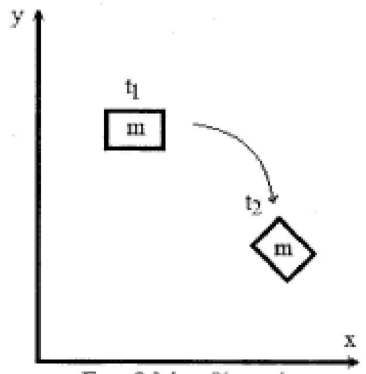
ΣΤΟΒΙΛΟΤΗΤΑ-ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

Ένα πεδίο ροής θεωρείται στροβιλό όταν τα στοιχεία ρευστού μπορούν να περιστρέφονται. Αυτό σημαίνει πως τα στοιχεία ρευστού έχουν γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ η οποία προκύπτει από την σχέση:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\vec{\upsilon} \qquad (1.7)$$



Αστρόβιλο πεδίο ροής



Στροβιλό πεδίο ροής

Σε ένα τρισδιάστατο (3D) πεδίο η σχέση (7) δίνει:

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} i^{(+)} & j^{(-)} & k^{(+)} \\ \partial/\partial x^{\,(-)} & \partial/\partial y^{\,(+)} & \partial/\partial z^{\,(-)} \\ u^{(+)} & v^{(-)} & w^{(+)} \end{vmatrix}$$

Από το οποίο προκύπτει:

$$\vec{\omega}=\frac{1}{2}\left[\vec{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \qquad (1.8)$$

Αν ορίσουμε ότι $\vec{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$ τότε ονομάζουμε τανυστή ρυθμού περιστροφής $\vec{R}$ τον παρακάτω πίνακα:

$$\vec{R}=\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(v_x-u_y) & \frac{1}{2}(u_z-w_x) \\ \frac{1}{2}(v_x-u_y) & 0 & -\frac{1}{2}(w_y-v_z) \\ -\frac{1}{2}(u_z-w_x) & \frac{1}{2}(w_y-v_z) & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.9)$$

Για να είναι ένα πεδίο αστρόβιλο πρέπει $\vec{\omega}=0$ άρα είτε από την (8) είτε από τον τανυστή (9) προκύπτει ότι:

$$(v_x-u_y)=(u_z-w_x)=(w_y-v_z)=0 \qquad (1.10)$$

Αν όποιος από τους παραπάνω όρους δεν είναι μηδέν τότε προκύπτει $\vec{\omega} \neq 0$ άρα το πεδίο είναι στροβιλό

Σε ένα δισδιάστατο (2D) πεδίο η σχέση (7) δίνει:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}k\begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ u & v \end{vmatrix}$$

Από το οποίο προκύπτει:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (1.11)$$

Αν ορίσουμε ότι $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ προφανώς λόγο του (2D) $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$ τότε ονομάζουμε τανυστή ρυθμού περιστροφής $\vec{\vec{R}}$ τον παρακάτω πίνακα:

$$\vec{\vec{R}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(v_x - u_y\right) \\ \frac{1}{2}\left(v_x - u_y\right) & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.12)$$

Για να είναι ένα πεδίο αστρόβιλο πρέπει $\vec{\omega} = 0$ άρα είτε από την (11) είτε από τον τανυστή (12) προκύπτει ότι:

$$\left(v_x - u_y\right) = 0 \qquad (1.13)$$

Αν ο παραπάνω όρος δεν είναι μηδέν τότε προκύπτει $\vec{\omega} \neq 0$ άρα το πεδίο είναι στροβιλό

ΜΗ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟ ΡΕΥΣΤΟ

Ένα ρευστό ονομάζεται μη συνεκτικό όταν αυτό ρέει χωρίς απώλειες (δυνάμεις τριβής). Οπότε η ενέργεια του ρευστού μένει σταθερή. Ικανή συνθήκη για να είναι ένα ρευστό σίγουρα μη συνεκτικό είναι:

$div\vec{\upsilon}=0$ (ασυμπίεστο) **και** $rot\vec{\upsilon}=0$ (αστρόβιλο) $\Longrightarrow$ Μη συνεκτικό

$div\vec{\upsilon}\neq 0$ (συμπιεστό) **ή/και** $rot\vec{\upsilon}\neq 0$ (στροβιλό) $\Longrightarrow$ Ίσως μη συνεκτικό

Για ένα ρευστό συμπιεστό ή/και στροβιλό μπορούμε να ελέγξουμε αν είναι μη συνεκτικό βλέποντας αν ικανοποιούν τις εξισώσεις ορμής για μη συνεκτικό ρευστό (Euler) (θα τις δούμε παρακάτω).

ΑΝΕΠΤΥΓΜΕΝΗ ΡΟΗ

Ανεπτυγμένη ή αλλιώς διαμορφωμένη ή ομοιόμορφη ροή ονομάζεται η ροή της οποίας η τελική μορφή συνεχίζει χωρίς αλλαγή.

Η συνθήκη που ελέγχουμε για να είναι μία ροή ανεπτυγμένη είναι ο μεταφορικό όρος κάθε συνιστώσας της επιτάχυνσης να ισούται με μηδέν:

$$grad^T\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}=0 \quad \text{ή} \quad \begin{array}{l} uu_x+vu_y+wu_z=0 \\ uv_x+vv_y+wv_z=0 \\ uw_x+vw_y+ww_z=0 \end{array} \qquad (1.14)$$

ΡΟΪΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν το πεδίο είναι δισδιάστατο (2D) και το ρευστό Ασυμπίεστο τότε ορίζεται συνάρτηση Ψ(x,y,t) τέτοια ώστε:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad -v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \text{ή} \quad \Psi_y = u \quad \Psi_x = -v \tag{1.15}$$

ΓΡΑΜΜΕΣ ΡΟΗΣ

Γραμμή ροής ονομάζεται η γραμμή εκείνη που ξεκινάει από ένα σημείο αναφοράς (Α) και η μορφή της είναι τέτοια ώστε το διάνυσμα της ταχύτητας να είναι εφαπτόμενο σε αυτήν.

Προφανώς δύο γραμμές ροής δεν τέμνονται ποτέ καθώς αυτό θα σήμαινε ότι ένα σημείο θα έχει δύο διαφορετικές ταχύτητες.

Υπάρχουν δύο τρόποι για να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής ροής που περνάει από δεδομένο Α για δεδομένο πεδίο ταχυτήτων.

Α) Εξορισμού οι γραμμές ροής πηγάζουν από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \tag{1.16}$$

Β) Από την ροϊκή συνάρτηση για Ψ = Κ = ct

ΤΡΟΧΙΑ

Τροχιά ονομάζεται η καμπύλη που διαγράφει ένα συγκεκριμένο στοιχείο ρευστού (που βρισκόταν σε στο σημείο Α στην αρχή του χρόνου) καθώς κυλάει ο χρόνος.

Χρήσιμη πρόταση

Αν το πεδίο είναι μόνιμο τότε η τροχιά ενός στοιχείου ρευστού ισοδυναμεί με την γραμμή ροής του.

Την τροχιά μπορώ να την βρω με δύο τρόπους, ανάλογα με τα δεδομένα της άσκησης

Α) Από τις εξ. Κίνησης με απαλοιφή της μεταβλητής t

Β) Τις περισσότερες φορές το δεδομένο είναι το πεδίο ταχυτήτων και όχι οι εξισώσεις κίνησης. Σε αυτήν την περίπτωση βρίσκω την εξίσωση της τροχιάς από τις παρακάτω σχέσεις.

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} \quad \overset{\int}{\Rightarrow} \quad x = x(t) \\ v &= \frac{dy}{dt} \quad \overset{\int}{\Rightarrow} \quad y = y(t) \\ w &= \frac{dz}{dt} \quad \overset{\int}{\Rightarrow} \quad z = z(t) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Μεγάλη προσοχή κατά την ολοκλήρωση ως προς t καθώς τα u, v, w δεν συναρτήσεις μόνο του χρόνου αλλά και των x, y, z που αυτά με την σειρά τους είναι x=x(t), y=y(t), z=z(t).

Στο τέλος λύνουμε την μία από αυτές ως προς t και αντικαθιστούμε στις άλλες.

ΕΥΡΕΣΗ ΕΞ. ΚΙΝΗΣΗΣ ΑΠΟ ΔΟΣΜΕΝΟ ΠΕΔΙΟ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ

Έστω ότι μας δίδεται το πεδίο ταχυτήτων $\vec{u}$ και μας ζητείται να βρούμε τις εξ. κίνησης, δηλαδή τις: $x = x(X,Y,Z,t,t_0)$, $y = y(X,Y,Z,t,t_0)$, $z = z(X,Y,Z,t,t_0)$. Η διαδικασία είναι η ίδια που θα κάναμε αν μας ζητούσαν να βρούμε την τροχιά ενός στοιχείου ρευστού που στον χρόνο t_0 βρισκόταν στη θέση Α(Χ,Υ,Ζ). Απλά στο τέλος της διαδικασίας δεν είναι ανάγκη να απαλείψουμε το t.

ΓΡΑΜΜΗ ΕΚΠΟΜΠΗΣ

Γραμμή εκπομπής ή Ινώδης φλέβα ονομάζεται η γραμμή επί της οποίας βρίσκονται μία δεδομένη t όλα τα στοιχεία που πέρασαν τις προηγούμενες χρονικές στιγμές τ από σημείο Α.

Στην εξ. κίνησης θέτω $t_0 = \tau$, Α(Χ,Υ) για δεδομένο t. Λύνω την μία (την πιο εύκολη) ως προς τ και αντικαθιστώ στην άλλη ώστε να απαλείψω το τ.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

Αν το πεδίο ροής είναι Αστρόβιλο τότε ορίζεται η συνάρτηση δυναμικού όπως παρακάτω:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad (1.18)$$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΡΕΥΣΤΟΥ

Μέχρι τώρα έχουμε δει πως ένα στοιχείο ρευστού μπορεί να μεταφέρεται από ένα σημείο σε ένα άλλο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ αλλά και να περιστρέφεται γύρο από κάποιον άξονα (αν είναι στροβιλό) με ταχύτητα $\vec{\omega}$.

Η βασική πρόταση της κινηματικής διατυπώνεται ως: Η μετακίνηση ενός στοιχείου ρευστού αναλύεται σε επαλληλία τριών κινήσεων: μεταφοράς, περιστροφής και παραμόρφωσης.

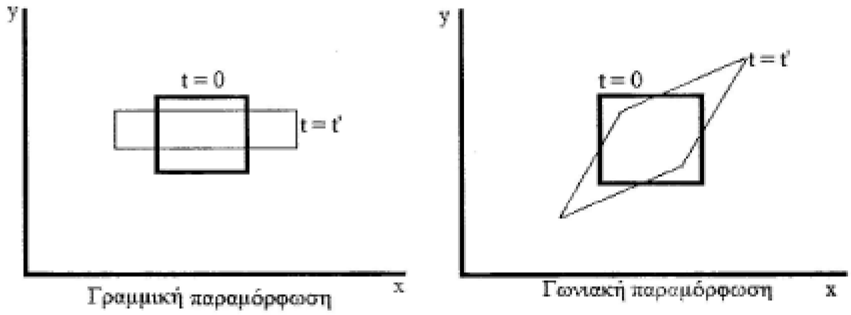
Ορίζεται τανυστής ταχύτητας παραμόρφωσης ή ρυθμού παραμόρφωσης $\vec{D}$ για τρισδιάστατο (3D) πεδίο ροής ως εξής:

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & \frac{1}{2}(v_x + u_y) & \frac{1}{2}(u_z + w_x) \\ \frac{1}{2}(v_x + u_y) & v_y & \frac{1}{2}(v_z + w_y) \\ \frac{1}{2}(u_z + w_x) & \frac{1}{2}(v_z + w_y) & w_z \end{bmatrix} \qquad (1.19)$$

Και για δισδιάστατο πεδίο ροής ως εξής:

$$\vec{D}=\begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_x & \frac{1}{2}\left(v_x+u_y\right) \\ \frac{1}{2}\left(v_x+u_y\right) & v_y \end{bmatrix} \qquad (1.20)$$

Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $\vec{D}$ είναι υπεύθυνα για την γραμμική παραμόρφωση των στοιχείων του ρευστού ενώ τα υπόλοιπα για την γωνιακή παραμόρφωση.



<u>ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ</u>

Τα παραπάνω στοιχεία θεωρίας γράφονται για κυλινδρικές συντεταγμένες ως εξής:

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ

$$\begin{aligned} r &= r(R,\Phi,Z,t) \\ \varphi &= \varphi(R,\Phi,Z,t) \\ z &= z(R,\Phi,Z,t) \end{aligned} \qquad (1.21)$$

ΠΕΔΙΟ ΤΑΧΥΤΗΤΩΝ

$$\vec{\upsilon}=(\upsilon_{(r)},\upsilon_{(\varphi)},\upsilon_{(z)}) \qquad (1.22)$$

ΠΕΔΙΟ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΕΩΝ

$$
\begin{aligned}
b_{(r)} &= \frac{\partial \upsilon_{(r)}}{\partial t} + \upsilon_{(r)} \frac{\partial \upsilon_{(r)}}{\partial r} + \frac{\upsilon_{(\varphi)}}{r} \frac{\partial \upsilon_{(r)}}{\partial \varphi} + \upsilon_{(z)} \frac{\partial \upsilon_{(r)}}{\partial z} - \frac{\upsilon^2_{(\varphi)}}{r} \\
b_{(\varphi)} &= \frac{\partial \upsilon_{(\varphi)}}{\partial t} + \upsilon_{(r)} \frac{\partial \upsilon_{(\varphi)}}{\partial r} + \frac{\upsilon_{(\varphi)}}{r} \frac{\partial \upsilon_{(\varphi)}}{\partial \varphi} + \upsilon_{(z)} \frac{\partial \upsilon_{(\varphi)}}{\partial z} + \frac{\upsilon_{(\varphi)}\upsilon_{(r)}}{r} \\
b_{(z)} &= \frac{\partial \upsilon_{(z)}}{\partial t} + \upsilon_{(r)} \frac{\partial \upsilon_{(z)}}{\partial r} + \frac{\upsilon_{(\varphi)}}{r} \frac{\partial \upsilon_{(z)}}{\partial \varphi} + \upsilon_{(z)} \frac{\partial \upsilon_{(z)}}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ

$$
\frac{\partial \upsilon_{(r)}}{\partial t} = \frac{\partial \upsilon_{(\varphi)}}{\partial t} = \frac{\partial \upsilon_{(z)}}{\partial t} = 0 \tag{1.24}
$$

ΣΥΜΠΙΕΣΤΟΤΗΤΑ

$$
div\vec{\upsilon} = \frac{\partial \upsilon_{(r)}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_{(\varphi)}}{\partial \varphi} + \frac{\upsilon_{(r)}}{r} + \frac{\partial \upsilon_{(z)}}{\partial z} \tag{1.25}
$$

ΣΤΟΒΙΛΟΤΗΤΑ-ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

$$
\vec{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_\varphi \\ \omega_z & 0 & -\omega_r \\ -\omega_\varphi & \omega_r & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\upsilon_{(\varphi)})}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_{(r)}}{\partial \varphi}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_{(r)}}{\partial z} - \frac{\partial \upsilon_{(z)}}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\upsilon_{(\varphi)})}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_{(r)}}{\partial \varphi}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_{(z)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \upsilon_{(\varphi)}}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \upsilon_{(r)}}{\partial z} - \frac{\partial \upsilon_{(z)}}{\partial r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon_{(z)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \upsilon_{(\varphi)}}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{1.26}
$$

Όπου:

$$
\frac{\partial (r\upsilon_{(\varphi)})}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial \upsilon_{(\varphi)}}{\partial r} + \upsilon_{(\varphi)}\frac{\partial r}{\partial r}\right) = \frac{\partial \upsilon_{(\varphi)}}{\partial r} + \frac{\upsilon_{(\varphi)}}{r}
$$

Με γωνιακή ταχύτητα:

$$\vec{\omega}=(\omega_r,\omega_\varphi,\omega_z)$$

ΡΟΪΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$\upsilon_{(r)}=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \qquad \upsilon_{(\varphi)}=-\frac{\partial\Psi}{\partial r} \qquad (1.27)$$

ΤΡΟΧΙΑ

$$\begin{aligned}
\upsilon_{(r)}&=\frac{dr}{dt} &\overset{\int}{\Rightarrow}&\quad r=r(t)\\
\upsilon_{(\varphi)}&=\frac{d\varphi}{dt} &\overset{\int}{\Rightarrow}&\quad \varphi=\varphi(t) \qquad (1.28)\\
\upsilon_{(z)}&=\frac{dz}{dt} &\overset{\int}{\Rightarrow}&\quad z=z(t)
\end{aligned}$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

$$\upsilon_{(r)}=\frac{\partial\Phi}{\partial r} \qquad \upsilon_{(\varphi)}=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \qquad \upsilon_{(z)}=\frac{\partial\Phi}{\partial z} \qquad (1.29)$$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΡΕΥΣΤΟΥ

$$\vec{D}=\begin{bmatrix}
\frac{\partial\upsilon_{(r)}}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon_{(r)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\upsilon_{(\varphi)}}{\partial r}-\frac{\upsilon_{(\varphi)}}{r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon_{(r)}}{\partial z}+\frac{\partial\upsilon_{(z)}}{\partial r}\right)\\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon_{(r)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\upsilon_{(\varphi)}}{\partial r}-\frac{\upsilon_{(\varphi)}}{r}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon_{(\varphi)}}{\partial\varphi}+\frac{\upsilon_{(r)}}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon_{(z)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\upsilon_{(\varphi)}}{\partial z}\right)\\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon_{(r)}}{\partial z}+\frac{\partial\upsilon_{(z)}}{\partial r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon_{(z)}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\upsilon_{(\varphi)}}{\partial z}\right) & \frac{\partial\upsilon_{(z)}}{\partial z}
\end{bmatrix} \qquad (1.30)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΑΡΟΧΗΣ ΟΓΚΟΥ ΔΙΑΜΕΣΟΥ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Η παροχή όγκου ενός ρευστού διαμέσου μίας ανοιχτής επιφάνειας ορίζεται ως εξής:

$$\dot{V} = \int_E \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dE \qquad (2.1)$$

Όπου το $\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια Ε (ανοιχτή επιφάνεια).

ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΜΑΖΑΣ ΕΝΤΟΣ ΚΛΕΙΣΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

Η μάζα που περικλείεται σε όγκο V μεταβάλλεται χρονικά σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$m(t) = \int_V \rho(x,y,z,t) dV \qquad (2.2)$$

Αν η ρ(x,y,z,t) είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη (τις περισσότερες φορές είναι) τότε είναι ρ=ρ(t) άρα μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα:

$$m(t) = \rho(t) \int_V dV \qquad (2.3)$$

ΠΑΡΟΧΗ ΑΝΑ ΜΟΝΑΔΑ ΒΑΘΟΥΣ

Έστω ότι δίδεται το πεδίο ταχυτήτων $\vec{\upsilon}$ και μας ζητείται να βρούμε την ογκοπαροχή αυτού του πεδίου διαμέσου ανοιχτής επιφάνειας dE. Το ζητούμενο μπορούμε να το βρούμε με τρεις τρόπους:

1ος τρόπος

Από τον ορισμό (2.1) για την παροχή διαμέσου επιφάνειας

2ος τρόπος

Αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο τότε κλείνω την ανοιχτή επιφάνεια με άλλες πολύ πιο εύκολες έτσι ώστε η παροχή που περνάει μέσα από την κλειστή πλέον επιφάνεια να είναι μηδέν (διατήρηση της μάζας)

3ος τρόπος

Αν γνωρίζω την ροϊκή συνάρτηση Ψ του πεδίου τότε έχω:

$$\dot{V} = b\left|\Psi(K) - \Psi(M)\right| \qquad (2.4)$$

Όπου Κ και Μ οι δύο άκρες της ανοιχτής επιφάνειας και b το βάθος του πεδίου.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Η Αρχή διατήρησης της μάζας εξηγεί πως εντός μίας κλειστής επιφάνειας η μάζα ούτε μπορεί να δημιουργηθεί ούτε και να καταστραφεί.

1) Εξ. Διατήρησης μάζας για Συμπιεστό ρευστό σε διαφορική μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{\upsilon}) = 0 \qquad (2.5)$$

Τις περισσότερες φορές η ρ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη συνεπώς αν δεν είναι σταθερή τότε είναι μόνο συνάρτηση του χρόνου ρ = ρ(t) δηλαδή:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho div\vec{\upsilon} = 0 \qquad (2,6)$$

Όταν ένα ρευστό είναι συμπιεστό και έχουμε δεδομένο το πεδίο ταχυτήτων μπορούμε από την (2,6) να βρούμε την συνάρτηση ρ (t) αν η πυκνότητα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη.

2) Εξ. Διατήρησης μάζας για Ασυμπίεστο ρευστό σε διαφορική μορφή:

$$div\vec{\upsilon} = 0 \qquad (2,7)$$

Την παραπάνω εξίσωση την έχουμε ξαναδεί και την χρησιμοποιούμε για να ελέγξουμε αν ένα ρευστό είναι ασυμπίεστο.

3) Εξ. Διατήρησης μάζας για Συμπιεστό ρευστό σε ολοκληρωματική μορφή:

$$\frac{\partial\left(\int_V \rho dV\right)}{\partial t} + \int_E \rho \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dE = 0 \qquad (2.8)$$

Αν η πυκνότητα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη (συνάρτηση ρ (t)) τότε η ρ βγαίνει εκτός ολοκληρώματος και σύμφωνα με την (2.3).

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t} + \rho \int_E \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dE = 0 \qquad (2.9)$$

Από την παραπάνω εξίσωση αν γνωρίζω την ρ(t) (την βρίσκουμε από την (2.6)) μπορώ να βρω την χρονική μεταβολή της μάζας σε δεδομένη κλειστή επιφάνεια.

4) Εξ. Διατήρησης μάζας για Ασυμπίεστό ρευστό σε ολοκληρωματική μορφή:

$$\int_E \vec{\upsilon} \cdot \vec{n} dE = 0 \qquad (2.10)$$

Η παραπάνω εξίσωση ισχύει για κάθε κλειστή επιφάνεια από την οποία διέρχεται ασυμπίεστο ρευστό. Πολλές φορές μας ζητείται να το ελέγξουμε. Ακόμα όπως έχουμε ήδη πει μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω σχέση για να βρούμε την παροχή μίας «δύσκολης» επιφάνειας συναρτήσει άλλων ευκολότερων (δες παράδειγμα 15 τρόπος 2ος)

ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ ΜΗ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

Η εξισώσεις διατήρησης της ορμής για μη συνεκτικό ρευστό λέγονται αλλιώς και εξισώσεις Euler και είναι οι εξής:

$$\rho \frac{D\vec{\upsilon}}{Dt} = \rho \vec{g} - gradP \qquad (2.11)$$

Ή αλλιώς:

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_x + vu_y + wu_z) &= \rho g_x - P_x \\ \rho(v_t + uv_x + vv_y + wv_z) &= \rho g_y - P_y \\ \rho(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) &= \rho g_z - P_z \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Με τις παραπάνω εξισώσεις βρίσκω την συνάρτηση της πίεσης P. Επίσης ελέγχω αν το ρευστό είναι μην συνεκτικό (αν δεν ισχύουν το Ασυμπίεστο και Αστρόβιλο οπότε και θα είναι μην συνεκτικό). Επίσης μέσο της συνάρτησης της πίεσης βρίσκω την πίεση σε ένα σημείο.

ΕΞΙΣΩΣΗ BERNOULLI

Αν το ρευστό είναι μη συνεκτικό τότε δεν υπάρχουν τριβές. Άρα το ρευστό δεν χάνει ενέργεια κατά την ροή του. Συνεπώς ανάμεσα σε δύο σημεία η ολική πίεση παραμένει σταθερή οπότε αν έχω δεδομένα για μία θέση μπορώ να βρω τα αντίστοιχα σε μία άλλη.

Αν. Μη συνεκτικό, Αστρόβιλο, Μη μόνιμο, Συμπιεστό:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\vec{\upsilon}^2}{2} + U + \int \frac{dP}{\rho} = k(t) \qquad (2.13)$$

Άρα για μία δεδομένη στιγμή t το k = ct άρα μπορώ να εφαρμόσω την παραπάνω έκφραση ανάμεσα σε δύο σημεία A, B αφού $k_A = k_B$.

Αν, Μη συνεκτικό, Αστρόβιλο, Μη μόνιμο, Ασυμπίεστο:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\vec{\upsilon}^2}{2} + U + \frac{P}{\rho} = k(t) \qquad (2.14)$$

Άρα για μία δεδομένη στιγμή t το k = ct άρα μπορώ να εφαρμόσω την παραπάνω έκφραση ανάμεσα σε δύο σημεία A, B αφού $k_A = k_B$.

Αν, Μη συνεκτικό, Αστρόβιλο, Μόνιμο, Ασυμπίεστο:

$$\frac{\vec{\upsilon}^2}{2} + U + \frac{P}{\rho} = k \qquad (2.15)$$

Για οποιαδήποτε δύο σημεία k = ct. Άρα αν γνωρίζω ταχύτητα και πίεση σε ένα σημείο βρίσκω ταχύτητα ή πίεση σε ένα οποιοδήποτε άλλο. Αυτή είναι η πιο απλή και η πιο συνηθισμένη μορφή τις Bernoulli

Αν, Μη συνεκτικό, Στροβιλό, Μόνιμο, Ασυμπίεστο:

$$\frac{\vec{\upsilon}^2}{2} + U + \frac{P}{\rho} = k_s \qquad (2.16)$$

Αν το πεδίο είναι στροβιλό τότε το $k_ς$ είναι ίδιο ανάμεσα σε δύο σημεία A και B εφόσον αυτά βρίσκονται πάνω στην ίδια γραμμή ροής. Δηλαδή εφόσον Ψ(A)=Ψ(B).

Οι πιο συνηθισμένες μορφές είναι οι (2.15) και (2.16). Αν το πεδίο είναι μη μόνιμο τότε χρησιμοποιούμε την (2.14) που χρειάζεται ως προαπαιτούμενο την έκφραση της συνάρτησης δυναμικού Φ. Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Bernoulli αν το πεδίο είναι μη μόνιμο και στροβιλό καθώς δεν μπορώ (εφόσον είναι στροβιλό) να βρω την συνάρτηση δυναμικού.

Επίσης:

$$U = gh \qquad (2.17)$$

Με g: η επιτάχυνση της βαρύτητας και h η υψομερτική διαφορά από τον άξονα που είναι κάθετος στο διάνυσμα της βαρύτητας. Προφανώς αν δίδεται ότι το ρευστό είναι αβαρές ή ότι οι δυνάμεις βαρύτητας δεν λαμβάνονται υπόψιν τότε U=0

Πολλές φορές ως δεδομένο μας δίδεται η ολική πίεση P_0. Αυτή είναι η πίεση του σημείου ανακοπής δηλαδή η πίεση του σημείου όπου το διάνυσμα της ταχύτητας είναι μηδέν.

Έτσι μεταξύ δύο σημείων 1 και 2 για Μη συνεκτικό, Αστρόβιλο, Μόνιμο, Ασυμπίεστο ρευστό με την χρήση της Bernoulli (2.15) παίρνω:

$$\overbrace{\rho\frac{\vec{\upsilon}_1^{\,2}}{2}}^{1}+\overbrace{\rho g h_1}^{2}+\overbrace{P_1}^{3}=\overbrace{\rho\frac{\vec{\upsilon}_2^{\,2}}{2}+\rho g h_2+P_2}^{4}$$

Όπου:

Ο όρος (1) ονομάζεται: Δυναμική πίεση

Ο όρος (2) ονομάζεται: Δυνητική πίεση ή γεωστατική πίεση

Ο όρος (3) ονομάζεται: Στατική πίεση

Ο όρος (4) ονομάζεται: Ολική πίεση